



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>





(-6)

See 1991 d 57

1666-99(12)

MEMOIRES
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Depuis 1666. jusqu'à 1699.

TOME XI.



A PARIS.
PAR LA COMPAGNIE DES LIBRAIRES.

MDCC. XXXIII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.



ANALYSE GÉNÉRALE,

OU

METHODES NOUVELLES
POUR RESOUDRE LES PROBLÈMES.
de tous les Genres & de tous les Degrez à l'infini.

*Par M. DE LAGNY de l'Académie Royale des Sciences,
& de la Société Royale de Londres.*

Par les Soins de M. RICHER.

26

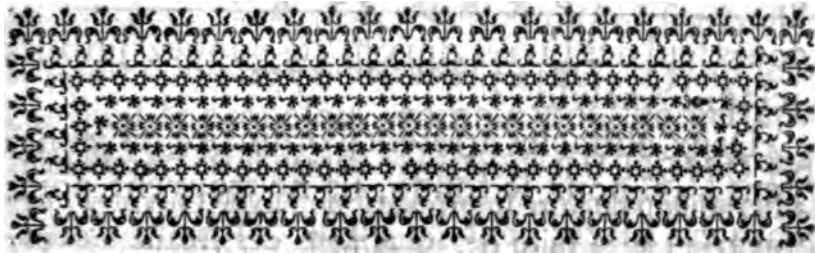
2. 1991 d 89

1666-99(12)

Du 23. Fevrier 1732.

MONSIEUR de Lagny demande à l'Académie la Permission de faire imprimer son nouvel Ouvrage sur l'Analyse , à la suite des Ouvrages des Académiciens dans la nouvelle édition de Coignard & Compagnie , dirigée par M^r. Godin. Accordé par l'Académie le 23 Fevrier 1732. FONTENELLE, *Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences*





P R É F A C E.

LE Service du Roi, le progrès de la Géométrie, la perfection des Sciences Philosophico - Mathématiques, & des Arts utiles à la Société, voilà l'objet que je me propose dans cet Ouvrage. J'ai principalement en vûe de donner aux Officiers de la Marine des Méthodes pour les mettre en état de découvrir par eux-mêmes tout ce qui peut contribuer à perfectionner la Navigation ; c'est de l'Analyse que l'on doit attendre un secours si utile & si important, puisque c'est la Science de faire des découvertes, c'est un instrument universel pour résoudre les Problèmes ; mais pour s'en servir avec succès, il faut pouvoir le manier en maître, & c'est un degré auquel les Commençans ne peuvent parvenir par le se-

cours seul des Livres qui ont été publiez jusques
ici sur l'Analyse.

Deux obstacles arrêtent d'ordinaire les jeunes
gens ; 1^o. pour le fonds , ils ne trouvent point
dans ces Livres tout ce qu'ils désirent , c'est à-
dire , des Méthodes générales pour résoudre les
Problèmes de tous les genres , de toutes les es-
pèces & de tous les degrez à l'infini ; 2^o. pour la
forme , les Méthodes qu'ils y trouvent sont d'un
accès difficile , on ne peut les pénétrer qu'après
un travail long & opiniâtre de plusieurs années ,
ce qui rebute le plus grand nombre. C'est M^r. le
Chevalier Renau , * si connu par son zèle pour
la perfection de la Marine , & qui proposoit si
souvent des Problèmes sur ce sujet à l'Académie
Royale des Sciences dont il étoit honoraire , qui
m'a inspiré le dessein de travailler à un traité
complet de l'Analyse , pour en faciliter l'étude
aux Officiers de la Marine , aux Ingénieurs , &
à tous ceux qui ont de l'inclination pour les
Mathématiques.

Je n'ai rien trouvé de plus propre à mon des-
sein , que les découvertes que M^r. de Lagny a
publié dans plusieurs volumes de l'Académie
Royale des Sciences , & que M^r. de Fontenelle

* Honoraire de l'Académie Royale des Sciences , Conseiller du Con-
seil de la Marine , Chevalier Grand Croix de l'Ordre Militaire de
Saint Louis , & Lieutenant Général des Armées de S. M. C. mort le
30. Septembre 1719.

a toujours accompagné d'éloges dûs à son mérite ; j'en connus d'abord tout le prix , j'y apperçûs qu'il se proposoit , comme moi , de perfectionner les Méthodes anciennes , & d'en inventer de nouvelles ; je lui communiquai mon projet, il le trouva de son goût , il le regarda comme un gage de l'estime que j'ai conçûe depuis longtemps pour sa Personne. & pour ses Ouvrages ; il y répondit avec une extrême politesse, il m'en pria même avec beaucoup d'instance , & voulut bien me communiquer généreusement tous ses écrits, qui contiennent près de trente volumes in folio ; mais en même tems , il m'a rendu le maître de leur donner la forme , que je jugerois la plus propre à les rendre utiles au Public. J'espérois d'abord n'avoir à surmonter que la longueur du travail , mais j'ai rencontré bien d'autres difficultés.

Les Mémoires de M^r. de Lagny sont destinez pour les Sçavans du 1^{er}. ordre , il n'est pas facile de les retoucher pour les ramener à la portée du commun des Géomètres ; d'ailleurs ce sont différentes Pièces séparées , il faut d'abord les développer dans toute leur étendue pour les mettre dans leur jour , ce qui ne fait qu'une partie du travail ; car il ne suffit pas de former chacun de ces membres séparément , il faut encore les réunir ensemble pour en composer un corps entier d'Analyse ; ce qui demande un travail encore

plus long & plus difficile ; il est vrai que ce travail devient agréable par les nouveautez que l'on rencontre sur la route , & qui croissent à mesure qu'on avance. Je fais souvent parler M^r. de Lagny dans cet Ouvrage , & sur-tout dans les Sections du second Livre. Je voulois même lui sacrifier tout l'honneur de mon travail , il a souhaité au contraire qu'il parût sous mon nom ; mais je veux que le Public sçache , que je ne prétend point partager avec lui la gloire de l'invention , qui lui appartient à juste titre.

Je n'ai rien négligé , ni dans la matière ni dans la forme , pour faciliter aux jeunes gens l'étude de l'Analyse , je leur présente dans ce premier volume plusieurs Méthodes générales pour résoudre tous les Problèmes ; j'entre dans tout le détail nécessaire pour les développer dans toute leur étendue , & pour en applanir toutes les difficultés Ce volume contient toutes les Régles générales de l'Analyse ; il est divisé en trois Livres qui contiennent la résolution des Problèmes de tous les genres , de toutes les espèces , & de tous les degrez à l'infini.

Dans le Livre premier , j'explique d'abord ce que c'est que l'Analyse , sa nature , son objet , & comment elle procède ; on y trouve ensuite la Résolution des Problèmes déterminez ou des Equations de tous les degrez à l'infini dont les Racines sont rationnelles , je donne pour cela

trois

trois Méthodes différentes. La première est celle des Formules , c'est l'ancienne , mais elle est expliquée dans un détail que l'on ne trouve point ailleurs, pour applanir toutes les difficultez capables d'arrêter ou d'embarrasser les Commençans. La seconde est la Méthode de résoudre les Equations par le terme dominant. Et la troisième est celle des Progressions Arithmétiques dont M^r. de Lagny avoit promis l'application qui se trouve ici.

Je donne dans le Livre second trois Méthodes différentes pour trouver les racines irrationelles des Problèmes déterminez & des Equations de tous les degrez à l'infini.

Ces trois Méthodes donnent les séries infinies qui expriment le plus exactement qu'il est possible les racines irrationelles; mais la troisième Méthode qui est celle du triangle des Rapports est la plus parfaite de toutes, parce qu'elle donne la série la plus prompte & la plus convergente qui soit possible.

Cette Méthode du triangle des Rapports me donne occasion de traiter à fonds la Science universelle des Rapports peu connue jusques ici, ce qui fait le sujet de la cinquième Section du second Livre, on y voit comment les Rapports s'étendent de toutes parts à l'infini; je distingue les degrez , les genres , les espèces, simples, composées, primitives, subalternes ou dérivées;

je donne la formation de toutes leurs séries qui sont infinies; j'examine comment chaque terme en particulier de chacune de ces séries est lui-même l'origine d'autres séries infinies d'individus. Je présente sous une idée claire toute cette infinité d'infinis différens, une simple division me découvre le caractère particulier qui distingue tout à la fois le genre, l'espèce & l'individu, sans courir aucun risque de les confondre.

Le troisième Livre contient la résolution des Problèmes indéterminez & plus qu'indéterminez, simples ou composez de quelque nombre d'égalitez qu'ils soient composez, dans tous les degrez à l'infini.

Je donne enfin dans la Section sixième de ce dernier Livre, la résolution des Problèmes plus que déterminez & je cite les différens endroits de ce volume, où j'ai eu besoin d'en établir les Régles, & de les appliquer à des exemples qui en contiennent le détail. Voilà où se réduisent toutes les Régles générales de l'Analyse.

Outre cela, j'ai mis à la tête de ce volume un Traité de ma nouvelle Méthode pour résoudre les Equations de tous les degrez à l'infini, même dans le cas irréductible, par des Tables d'une construction simple & facile, j'ai lû ce Traité dans les Assemblées de l'Académie Royale des Sciences du 14 & du 17 du mois de May 1732. Je l'ai mis au commencement pour ne point

mêler cette Méthode avec celles de M^r. de Lagny; mais sa place naturelle doit être à la fin du premier livre où je l'avois mise d'abord parce que les Commençans ne la doivent point voir, qu'après qu'ils auront appris ce qui est contenu dans le premier Livre. J'ai ajouté en leur faveur un Discours Préliminaire où j'explique son origine; il précède l'Avertissement, dans lequel je montre ses avantages pour résoudre du premier coup d'œil toutes les Equations, tant dans le cas ordinaire que dans le cas irréductible, en la comparant avec la Méthode des Formules qui est connue.

Comme l'Analyse employe dans toutes ses opérations le calcul numérique & algébrique, je suppose que le Lecteur en est instruit; il peut consulter les Elémens que M^r. de Lagny en a publié en 1697, ou les Leçons de M^r. de Molière, ou autres dont les Traitez sont connus.

Si ce premier volume qui contient toutes les Régles générales de l'Analyse est reçu favorablement du Public; cela me donnera de l'émulation pour mettre la dernière main aux trois autres volumes qui suivront de près sur l'Analyse particulière, où je ferai l'application de ces mêmes Régles à toutes les parties de la Géométrie des lignes droites & des lignes courbes, c'est-à-dire, aux angles, aux surfaces & aux solides; on y trouvera tout ce qui appartient à la rectification & à

la quadrature des lignes courbes, &c.

Davantage , on y trouvera plusieurs Traitez utiles pour l'Astronomie & pour la Navigation, où les grands calculs sont d'un usage fréquent, qui sont encore des découvertes de M^r. de Lagny. 1°. La nouvelle Arithmétique Binaire, ou les Logarithmes naturels , pour faire toutes les opérations du calcul par simple addition ou soustraction sans aucunes Tables & sans charger sa mémoire , j'en ferai usage pour trouver les Logarithmes hyperboliques, pour les Racines des puissances imparfaites & des Equations irrationnelles , pour la construction des Sinus, des Tangentes & des Sécantes, même pour les Tables Loxodromiques dont l'usage est si nécessaire & si important dans la Navigation pour déterminer la route des vaisseaux ; car ces Tables se font avec plus de facilité & de précision par cette Méthode que par toute autre. 2°. J'y donnerai une nouvelle Trigonométrie Analytique plus exacte & plus simple que la Trigonométrie ordinaire. 3°. Enfin on y trouvera le calcul différentiel & le calcul intégral réduits à l'expression sensible des nombres ordinaires avec une approximation à l'infini dans les cas où la précision est impossible par la nature & l'essence même de la chose.



DISCOURS PRÉLIMINAIRE

Sur les Tables pour résoudre les Equations de tous les degrez à l'infini, où j'explique la route que j'ai tenue pour découvrir la formation de ces Tables & leur usage.

J'Ai fait un Traité fort abrégé de cette Méthode, que j'ai lû à l'Académie Royale des Sciences dans les Assemblées du 14 & du 17 du mois de Mai 1732, je l'ai mis à la tête de ce volume, pour ne point mêler cette Méthode avec celles de Mr. de Lagny; mais sa place naturelle est à la fin du premier livre, parce qu'il faut le posséder pour entendre cette Méthode, c'est pour cette raison que je l'avois placée d'abord à la fin du premier Livre.

Ce Traité contient plusieurs tables au nombre de 25, tant pour le second degré, que pour le troisième & le cinquième, ces tables sont précédées d'un Avertissement, où je montre les avantages de cette nouvelle Méthode sur la Méthode ancienne des formules, j'en fais le Parallèle tant dans le cas réductible que dans le cas irréductible. Cet Avertissement est suivi du Traité qui contient trois choses, 1°. sept Problèmes qui renferment tout ce qui regarde les formules littérales & les Equations numériques de tous les degrez à l'infini, qui sont le fondement de ces tables, 2°. la formation des tables, 3°. enfin leur usage pour résoudre les Equations.

Je tiens d'abord pour maxime de réduire une Equation proposée à son Equation primitive, ou à ses moindres termes, l'opération en est expliquée dans les pages

58 & 311, on réduit d'ordinaire les fractions à leurs moindres termes, avant d'opérer dessus, il est également naturel de faire la même préparation sur les Equations; cette idée quoique naturelle a échappé à de grands Géomètres comme Hariot & Ougtrehg qui ont beaucoup écrit sur les Equations, & Mr. de Lagny est le premier qui se soit apperçu de la nécessité & de l'importance de cette préparation.

J'expliquerai ici la route que j'ai tenuë pour découvrir la formation de mes tables & leur usage, pour ne point laisser de difficulté, qui soit capable d'arrêter les jeunes gens qui commencent, ce seroit s'opposer au progrès de ceux de qui l'on doit tout attendre pour la perfection des Sciences, car je suis persuadé que ceux qui posséderont les Méthodes que je publie pousseront encore plus loin leurs découvertes, en suivant la route qu'ils trouveront ici applanie : je n'écris point pour les sçavans Géomètres, ils n'ont pas besoin de livres, ils tirent de leur propre fonds tout ce qu'ils désirent, les livres sont faits pour ceux qui veulent s'instruire, je veux leur ouvrir le chemin, & exciter en eux cette sagacité si nécessaire pour faire éclore des vérités neuves; on sçait que Dieu a mis dans l'esprit de tous les hommes toutes les vérités géométriques, mais on ne peut les en tirer que par la force de la méditation & par le secours des calculs; il est d'une nécessité aussi absolue à un Géomètre de calculer beaucoup, comme à un Architecte de dessiner beaucoup, on ne peut juger de l'effet de ses pensées que par leur expression, quand on suit une vérité avec attention, soit dans le fini, soit dans l'infini, on aperçoit toutes ses progressions, que l'esprit ne peut & n'oseroit même soupçonner.

Voici comment j'ai découvert la formation & l'usage des tables pour résoudre les Equations; j'avois dessein de perfectionner la Méthode ancienne des formules, de l'é-

tendre au cas irréductible du troisieme degre , & de l'élever même au-dessus dans tous les degrez supérieurs ; je crûs qu'il n'y avoit pas de meilleur moïen que de réunir dans une table pour chaque formule toutes les séries d'équations numériques qui sont infinies à l'infini. Je commençai par la troisieme formule du second degre , dont les trois termes sont positifs , substituant chacun des nombres de la suite naturelle en commençant par le zéro , qui est le terme commun d'où partent toutes les grandeurs à la place de l'inconnuë , & leur quarré à la place de la seconde puissance de l'inconnuë , chaque substitution me donna autant d'homogènes (ou de valeurs de b différentes,) tels qu'ils sont dans les colonnes de l'échiquier de la première table du second degre.

En réitérant les mêmes substitutions sur une valeur du coefficient a différente , je trouvai aussi pour chaque valeur de a une colonne différente, & mettant ces colonnes les unes à côté des autres , je m'apperçus que les homogènes formoient des rangs horizontaux où regnoit une progression Arithmétique du premier degre , dont la différence première étoit constante & égale à la valeur de x du même rang horizontal, ce qui me donnoit une grande facilité pour former la table ; je disposai tous ces homogènes par ordre dans un échiquier que j'entourai de deux bordures , la première bordure d'en haut contenoit les valeurs de a , qui sont la suite naturelle des nombres 0. 1. 2. 3. 4. &c. la seconde bordure à gauche contenoit deux colonnes , la première pour les valeurs de x qui sont encore la même suite des nombres naturels , la seconde colonne pour les secondes puissances de x avec les quarrés naturels 0. 1. 4. 9. 16. &c. par ce moïen j'exprimai dans ma première table tous les trois termes des Equations ; sçavoir , le premier dans la seconde colonne de la bordure à gauche , le coefficient du second terme dans la bordure d'en haut , son inconnuë dans la première co-

lonne à gauche de la bordure, & l'homogène ou le dernier terme dans l'échiquier.

Je continuai cette table très-loin en tout sens, dans le fini & même dans l'infini, ensuite je fis une table où les valeurs de x & celles de a s'étendoient jusqu'à 100, afin de considérer avec plus d'attention la marche des termes & leurs progressions, ce qui me fit découvrir une infinité de Théorèmes importans sur les Equations, les tables suivantes des autres formules & des degrez supérieurs m'en ont fourni aussi un nombre si grand, qu'il seroit ennuyeux de les rapporter, d'autant que le lecteur les trouvera de lui-même avec une extrême facilité.

Pour l'usage, ayant pris à volonté des Equations dont l'homogène étoit contenu dans la table, & la divisant par la valeur positive de x du même rang qui donnoit la première racine positive, le quotient négatif étoit toujours égal au coefficient a de la même colonne augmenté de la première racine x , ce qui donnoit la seconde racine, par ce moïen j'avois les racines rationnelles.

Mais lorsque je prenois un homogène compris dans l'interval de deux homogènes consécutifs de la table, un plus petit, l'autre plus grand, la première racine de chacun de ces homogènes divisoit mon Equation, mais avec un reste, négatif lorsque le diviseur étoit la racine de l'homogène moindre, & positif lorsque le diviseur étoit la racine de l'homogène prochain plus grand, ce qui donne les racines approchées à moins de l'unité près, puisque celles de ces deux homogènes ne diffèrent que de l'unité, & que l'une est trop petite & l'autre trop grande, d'où je conclus comme on le trouve aussi par la formule ordinaire, que dans ce cas les deux racines sont irrationnelles; voilà comment j'ai trouvé par ma table les racines irrationnelles approchées à moins de l'unité près, soit par excès, soit par défaut dans la troisième formule du second degré.

Il s'agit présentement des quatre formules restantes du même degré ; j'ai fait une seconde table par soustraction suivant la quatrième formule du second degré dont le second terme seul est négatif , j'ai trouvé dans cette table tous les homogènes à l'infini avec la même facilité , que par addition dans la précédente ; mais au lieu que toutes leurs séries sont infinies dans la première table , j'ai trouvé deux séries dans chaque rang horizontal de la seconde table , la première série qui est finie contient des homogènes positifs qui décroissent constamment de la valeur de x du même rang d'un terme au suivant , & arrivent au zéro, après lequel les homogènes sont négatifs, & croissent toujours constamment à l'infini de la même valeur de x du même rang horizontal, ce qui fait la seconde série qui est infinie.

Dans cette seconde table , je remarquai quatre choses.

1°. Que tous ces zéros qui séparent les séries finies des homogènes, d'avec les séries infinies , sont rangez dans la table en ligne diagonale ; de telle sorte que cette diagonale divise la table en deux triangles rectangles, l'inférieur est à gauche , le supérieur est à droite.

2°. Que les homogènes négatifs n'étoient plus dans la quatrième formule , mais dans la cinquième dont le second & le troisième terme sont négatifs.

3°. Je m'apperçûs d'un côté que cette seconde table me donnoit les deux racines négatives pour le premier & second cas de la cinquième formule, la première de ces racines est la valeur de x du même rang horizontal , la seconde racine est la valeur de a de la même colonne que l'homogène , diminué de la même valeur de x .

3°. D'un autre côté, cette table ne pouvoit me donner ni les racines de la quatrième formule , pour laquelle je l'avois dressée, qui sont irrationnelles, ni les racines pour le troisième cas de la cinquième formule qui sont imaginaires, ce qui m'obligea d'avoir recours à une seconde es-

pièces de tables qui puissent donner ces racines, comme il suit ; & voilà ce qui a donné occasion aux tables de la seconde espèce.

Les tables de la seconde espèce sont entièrement semblables à celles de la première espèce, elles se font de la même manière, toute la différence consiste en ce que les tables de la première espèce donnent la première racine sur la bordure à gauche, & ne peuvent donner que les racines rationnelles, & les tables de la seconde espèce donnent sous chacun des homogènes toutes les racines telles qu'elles sont, rationnelles, ou irrationnelles, ou même imaginaires.

Ainsi pour former cette seconde table de la seconde espèce sur la quatrième formule du second degré, puisque j'avois tous les homogènes dans l'échiquier, & même les deux racines négatives des homogènes compris dans le triangle supérieur de la table à droite, il ne restoit plus qu'à trouver les racines des homogènes compris dans le triangle inférieur à gauche, qui sont égales & irrationnelles dans la quatrième formule, pour les placer sous chacun des homogènes ; j'en cherchai les racines irrationnelles par la Méthode ordinaire des formules, & je les écrivis sous chaque homogène ; de cette sorte sous chacun des homogènes positifs, j'eus les deux racines égales & irrationnelles dont le second signe sous le radical doit être positif.

Mais comme je m'apperçus que ces mêmes homogènes positifs contenus dans le premier triangle inférieur à gauche de l'échiquier de la table, étoient eux-mêmes les homogènes du troisième cas dans la cinquième & sixième formule, (en changeant seulement le signe positif en négatif, dans les homogènes & conservant le signe moins comme il est dans la table devant le second chiffre sous le radical) ce, qui donne leurs racines imaginaires ; d'ailleurs toutes ces racines, soit irrationnelles, soit ima-

ginaires forment des progressions arithmétiques croissantes dans chaque rang horizontal ; sçavoir , hors du signe radical $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3$ &c, qui sont la moitié de la valeur de 4, & sous le signe radical $1, 2\frac{1}{4}, 4, 6\frac{1}{4}, 9$, &c. qui sont les quarrés de cette moitié , j'ai mis toutes ces racines sous leur homogène correspondant.

Ainsi cette seconde table de la seconde espèce me donne dans le triangle supérieur à droite.

1°. Les deux racines dans le premier & le second cas de la cinquième & sixième formule, sçavoir , les deux racines négatives pour la sixième formule qui ont le signe moins dans la table.

2°. Mais ces mêmes racines , en les supposant positives ou précédées du signe plus , seront les racines positives du premier & du second cas de la cinquième formule.

Mais pour le triangle inférieur à gauche de la même table , il y a plus de difficulté , je n'ai mis dans la table qu'un signe négatif devant le second chiffre sous le radical , qui est contraire à celui de l'homogène positif , au lieu qu'il faut supposer par tout les deux signes contraires (que j'ai omis pour éviter la confusion & la difficulté de l'impression) si l'on veut renfermer tous les cas, comme il suit.

3°. Sa première colonne qui est la première de l'échiquier a tous ses homogènes positifs , & le signe négatif sous le radical , ce qui rend la racine imaginaire , au lieu qu'elle est irrationnelle , ce que j'ai fait à dessein de renfermer tous les cas en abrégé , car supposant tous les signes positifs , cette colonne contient les homogènes de la première formule avec leurs racines sous une expression irrationnelle.

4°. Au contraire supposant le signe moins devant les homogènes , & laissant le second signe de la racine négatif, comme il est dans la Table, on aura les racines imaginaires des homogènes de la seconde formule.

5°. Tout le reste de ce triangle est donc pour les homogènes de la quatrième formule, & pour ceux du troisième cas de la cinquième & de la sixième formule, en observant ce qui suit.

6°. Pour les homogènes de la quatrième formule, ils sont positifs, tels qu'ils sont dans la table; mais pour leurs racines qui sont irrationnelles, il faut supposer le signe plus devant le second chiffre sous le radical, au lieu du signe moins qui est dans la table.

7°. Pour les homogènes du troisième cas de la cinquième & de la sixième formule, dont les racines sont imaginaires; il faut supposer les homogènes précédés du signe moins, & prendre les racines imaginaires, telles qu'elles sont exprimées dans la table, en observant qu'elles sont positives dans la cinquième formule, & négatives dans la sixième formule.

Cette difficulté auroit pû embarrasser les commençans, on trouve encore les mêmes difficultez dans les degrez supérieurs, dont l'exposant est pair à cause des racines, soit irrationnelles, soit imaginaires qui s'y trouvent toujours en nombre pair, & qui étant multipliées les unes par les autres, se détruisent dans l'équation qui en est le produit; pour éviter cet embarras, on peut faire deux ou trois copies de cette table, afin de mettre séparément cette différence de signes contraires pour tous les cas différens, que j'ai voulu abréger.

Ainsi cette seconde table de la seconde espèce donne les deux racines des Equations des cinq formules du second degré.

Il est facile après cela de former les tables des degrez supérieurs, & ce que nous en avons dit en son lieu suffit, pour en dresser d'aussi étendues qu'on voudra, & leur usage est si simple & si évident qu'il seroit inutile de s'y arrêter. Une Equation étant proposée, son coefficient est donné, je cherche dans la table dressée sur la même formule ce coef-

ficient donné , c'est la colonne où je dois trouver l'homogène, s'il y est, alors j'ai au-dessous toutes les racines dans les tables de la seconde espèce , si l'homogène proposé n'est pas dans la table, mais est compris dans l'intervalle de deux homogènes consécutifs , alors les racines sont irrationnelles, & les racines de ces deux homogènes consécutifs sont les racines approchées, soit par excès, soit par défaut.

Mais les tables de la première espèce ne peuvent donner qu'une seule racine sur leur bordure , lorsqu'elle est rationnelle & non autrement.

Il suit de-là que sur chaque formule il y a deux tables , l'une de la première espèce , qui donne seulement la première racine rationnelle sur la bordure , l'autre table de la seconde espèce donne tout à la fois toutes les racines , ou sous chacun des homogènes, comme je l'ai pratiqué dans les premières tables, ou bien elle en donne plusieurs sur la bordure à gauche , & la dernière sous chaque homogène comme je l'ai pratiqué dans la quatorzième & la quinzième table pour les Equations de la cinquième & de la sixième formule de la troisième classe du troisième degré.

Enfin chaque table du second degré , n'a que quatre termes variables ; sçavoir , sur la bordure à gauche , 1°. la racine x , 2°. sa haute puissance , 3°. sur la bordure d'en haut , le coefficient a du terme moïen , 4°. les homogènes b sur l'échiquier.

C'est la même chose en général dans tous les degrés supérieurs , pour les équations qui n'ont que trois termes , parce qu'il n'y a qu'un terme moïen ; dans les autres qui ont 2 , 3 , ou quatre termes moïens , &c. il faut combiner ensemble les valeurs de leurs coefficients de toutes les manières possibles , prenant un seul coefficient variable & tous les autres constans , & chaque combinaison donne une table dans la même formule , ce qui ne souffre aucune difficulté.

FAUTES A CORRIGER.

Page.	Ligne.	Erreur.	Correction.
7.	16.	par -	lisez partant.
17.	11.	membres	nombres.
23.	29.	$+$	$-$
115.	28.	$b c$	$b + c$
128.	15	} inconnue	connue.
137.	20		
144.	20.	9000.	10000.
146.	16.	0000.	5000.
147.	7 & 8.	11000.	10000.
149.	15 & 17.	27.	72.
154.	18.	$+$	$-$
158.	25		
157.	4.	$-$	$+$
182.	11.	Signes.	lignes.

Notex. Dans la cinquième Table des Equations (seconde espèce au troisième rang) que la fraction de la Racine doit toujours être $\frac{1}{2}$ hors du radical, & $\frac{1}{4}$ sous le radical, ce qui est général.

AVERTISSEMENT.



AVERTISSEMENT.

LA Méthode que nous donnons pour résoudre les Equations par des tables, est tres-propre à éclairer le Lecteur & à lui fournir les moïens d'approfondir tout ce qui regarde cette matiere : ces tables presentent à la vûe une infinité de séries infinies d'Equations semblables dans chaque cas particulier, qui ne diffèrent que dans l'homogene. Toutes ces Equations forment des progressions Arithmétiques, de telle sorte qu'une Equation étant proposée, on apperçoit le rang qu'elle occupe dans l'infini, on connoît sa série, sa progression & la loi de cette progression.

Cette Méthode a d'ailleurs tout l'avantage qu'on peut désirer sur la Méthode ordinaire de résoudre les Equations par des formules, & ne participe point à ses défauts.

1^o. Par son étendue, la nouvelle Méthode des tables s'étend à tous les degrez à l'infini, elle embrasse également le cas irréductible comme le cas ordinaire, & le résoud avec la même facilité : mais les formules sont bornées au 3^e. degré au-delà duquel elles ne peuvent s'étendre, elles n'embrassent pas même le 3^e. degré tout entier, car elles ne peuvent résoudre.

Analyse.

A

2. AVERTISSEMENT.

dre les quatre formules de la 2^{de}. espece de la 2^{de}. classe du 3^e. degré, dans lesquelles le 3^e. terme est évanoui.

Elles ne peuvent servir pour les huit formules de la 3^e. classe qui ont quatre termes, qu'indirectement, & après en avoir fait évanouir le second terme.

L'usage des formules se borne donc directement aux quatre formules de la 1^{re}. espece de la 2^{de}. classe dans lesquelles le second terme est évanoui; mais il en faut encore retrancher le cas irréductible, qui comprend la 4^e. formule toute entiere, & le quart des Equations possibles de la 3^e. formule, parce qu'il est impossible d'en tirer les racines par la formule ordinaire, quoiqu'elles soient tres-réelles.

2^o. Par la facilité; par les tables je résoud les Equations du 1^{er}. coup d'œil sans aucune opération, leur construction est facile, elles se font par la simple addition ou soustraction suivant les signes de l'expression générale de l'Equation. On peut les continuer aussi-loin qu'on voudra avec la même facilité, nous donnons même des abrégés afin de pouvoir se servir dans les grands nombres des petites tables comme des plus grandes.

Mais la Méthode des formules oblige à plusieurs extractions de racines quarrées & cubiques, opérations longues & ennuyeuses, mais

A V E R T I S S E M E N T. 3

souvent inutiles , lorsque les racines quoique réelles & rationnelles viennent sous une forme irrationnelle , ou sous une forme imaginaire, où la formule devient entierement inutile.

3°. Par son exactitude , puisque les tables donnent exactement les racines des Equations telles qu'elles sont , mais les formules de la 1^{re}. racine du 3^e. degré donnent le plus souvent les racines réelles & rationnelles déguisées, ou sous une forme irrationnelle , ou sous une forme imaginaire.

Tous ces avantages sont sensibles dans les exemples qui suivent , où l'on compare les deux Méthodes en les appliquant à résoudre les mêmes Equations.

1^{er}. exemple.

Soit proposée l'Equation du 3^e. degré $x^3 + 6x = 88$.

1°. Par les tables. La 5^e. table de la 1^{re}. espèce donne sa 1^{re}. racine positive $x = 4$.

La 5^e. table de la seconde espèce donne ses trois racines dans une même cellule que l'homogene 88 ; sçavoir , la 1^{re}. racine positive $x = 4$, les deux autres négatives égales & imaginaires $x = -2 + \sqrt{-18}$.

2°. Par les formules.

La formule de la premiere racine est

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}} \quad \text{qui}$$

A ij

$$\text{donne } x = \sqrt[3]{44 + \sqrt{1944}} - \sqrt[3]{44 - \sqrt{1944}}.$$

qui donne la 1^{re}. racine sous une forme irrationnelle, puisque 1944 est un carré imparfait, sa racine est entre 44 & 45, d'où l'on tire la valeur de la 1^{re}. racine $4 +$, ou $5 -$ qui est irrationnelle. Quoiqu'elle soit rationnelle, puisque c'est précisément 4. il suffit de multiplier les trois racines que nous venons de trouver par les tables pour en avoir la démonstration.

2^d. Exemple.

Soit $x^3 - 90x = 100$, qui est l'origine du cas irrédutible.

10. Les tables donnent les 3 racines qui sont réelles.

La 6^e. table de la 1^{re}. espèce donne la 1^{re}. racine positive $x = 10$. la 6^e. table de la 2^{de}. espèce donne dans une même cellule sous l'homogène proposé 100, les trois racines, la 1^{re}. $x = 10$ qui est réelle & positive, les deux autres réelles, négatives, égales & irrationnelles $x = -5 \pm \sqrt{15}$.

20. Par les formules.

La formule de la première racine est

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} \text{ qui}$$

$$\text{donne } x = \sqrt[3]{50 + \sqrt{-24500}} + \sqrt[3]{50 - \sqrt{-24500}}.$$

Dans laquelle l'expression imaginaire $\sqrt{-24500}$ rend toute la formule imaginaire par

A V E R T I S S E M E N T.

une espece de contagion qu'elle communique à la partie réelle 50, d'où il est impossible absolument de tirer la valeur de la racine, quoiqu'elle soit réelle & positive.

3^e. Exemple. *Dans le cas irréductible.*

Soit $x^3 - 90x = 110$. dans la 3^e. formule.

ou $x^3 - 90x = -110$. dans la 4^e. formule.

Ces Equations sont dans le cas irréductible, par conséquent les 3 racines quoique réelles sont irrationnelles, c'est-à-dire incommensurables entr'elles, on ne peut les exprimer exactement par aucun nombre entier qui soit un diviseur exact de ces Equations; on peut seulement en approcher, & il n'y a qu'un seul nombre qui donne cette valeur approchée, c'est 10.

1^o. La table de la 1^{re}. espece donne $x = 10$ dans la 3^e. formule, & $x = -10$ dans la 4^e. formule.

La table de la 2^{de}. espece donne tout ensemble les trois racines; Sçavoir, dans la 3^e. formule $x = 10$, & $x = -5 \pm \sqrt[3]{15}$. & dans la 4^e. formule $x = -10$, & $x = 5 \pm \sqrt[3]{15}$.

2^o. Par les formules.

La formule de la 1^{re}. racine est

$$x = \sqrt[3]{45 + \sqrt{2025 - 39304}} + \sqrt[3]{45 - \sqrt{2025 - 39304}}$$

$$x = \sqrt[3]{45 + \sqrt{37279}} + \sqrt[3]{45 - \sqrt{37279}}$$

qui est une formule imaginaire d'où il est absolument impossible de tirer aucune valeur pour la racine qui est cependant réelle mais irrationnelle.

4^e. Exemple. *cas irréductible.*

Soit $x^3 - 90x = 90$ dans la 3^e. formule.

ou $x^3 - 90x = -90$ dans la 4^e. formule.

10. Par les tables. La 6^e. table de la 1^{re}. espèce donne la 1^{re}. racine approchée. $x = 10$ dans la 3^e. formule, & $x = -10$ dans la 4^e. formule.

La 6^e. table de la 2^{de}. espèce donne dans la même cellule de l'homogene 90. les trois racines, $x = 10, x = -5 \pm \sqrt{15}$ dans la 3^e. formule. Mais pour la 4^e. formule $x = -10$, & $x = 5 \pm \sqrt{15}$.

Remarque. Comme 10 est la 1^{re}. racine exacte de l'Equation $x^3 - 90x = 100$, qui est l'origine d'où partent les Equations dans le cas irréductible, elle est aussi seule la 1^{re}. racine approchée de toutes les équations semblables qui ne diffèrent que dans le seul homogene qui peut varier à l'infini, soit en diminuant de 10, soit en augmentant de 10 à l'infini : or dans toutes ces variations de l'homogene, 10 est la seule racine la plus approchée en nombres entiers, car elle pourra toujours diviser toutes ces équations non pas exactement, mais avec un reste positif, lorsque les homogenes sont moindres que 100. & avec un reste négatif lorsque les homogenes > 100 en la 3^e. formule, & au contraire en la 4^e. formule : mais aucun autre nombre que 10 ne pourra être le diviseur de ces équations dont la série est infinie. Donc les tables donnent la racine la plus approchée en nombres entiers dans le cas

irréductible sans aucune opération ; & pour avoir une approximation plus grande, on se servira des Méthodes nouvelles que nous donnons dans cette Analise.

La premiere racine approchée étant trouvée $x=10$, on connoîtra quelle est cette approximation, en comparant l'homogene proposé, ou le reste que donne la division avec 100, qui est l'homogene de l'origine du cas irréductible. L'approximation sera d'autant plus approchée que la difference sera moindre, & l'approximation sera d'autant plus éloignée que la difference sera plus grande.

2°. Par les formules, on trouve une formule imaginaire & impossible pour la 1^{re}. racine c'est $x = \sqrt[3]{45 + \sqrt{-24975}} + \sqrt[3]{45 - \sqrt{-24975}}$ par inutile comme dans l'exemple précédent.

Les avantages de cette nouvelle Méthode nous ont engagé de la tirer du corps de l'Analise entiere & complete que nous publions, où elle occupoit la section 7. du livre 1^{er}. & de la placer séparément à la tête de l'ouvrage pour satisfaire à l'empressement du public.


METHODE



M É T H O D E N O U V E L L E

*POUR RESOUDRE LES PROBLEMES
déterminez ou les Equations de tous les degrez à
l'infini, & même dans le cas irréductible.*



Ette Méthode consiste dans la construc-
tion & l'usage des tables expliquées p. 31,
&c ; chaque le est dressée sur une for-
mule & sert encore pour d'autres, en y
accommodant les signes.

Ces tables sont de deux espèces, qui ne
diffèrent que dans la manière de donner
les racines des Equations qu'elles contiennent.

Les tables de la première espèce donnent sur leur bor-
dure à gauche la première racine de tous les homogènes
qui sont dans l'échiquier, lorsqu'elle est rationnelle ; mais
non pas lorsqu'elle est irrationnelle.

Analyse.

* B

La seconde espèce des tables donne directement tout à la fois toutes les racines des Equations de tous les degrez , de quelque nature que soient les racines , réelles ou imaginaires , rationnelles ou irrationnelles , en quoi elle a l'avantage sur la première espèce.

Cette Méthode ne se borne point là , car en continuant ces tables , leur considération seule présentera à l'esprit une infinité de Théorèmes & de Problèmes importants , d'où l'on pourra tirer plusieurs Méthodes différentes pour résoudre les Equations.

Les commençans pourront s'exercer à dresser ces tables aussi amples qu'ils le jugeront à propos , ils en tireront beaucoup d'utilité , ils y remarqueront les progressions Arithmétiques qui y regnent constamment , soit dans les homogènes , soit dans les coefficients ou facteurs , soit dans les puissances de l'inconnue , soit enfin dans les racines des Equations , c'est le fondement de la construction de ces tables & de leur usage ; d'ailleurs ces tables par elles-mêmes serviront comme un instrument universel , pour résoudre du premier coup d'œil & sans aucune opération toutes les Equations qu'elles renferment.

Pour faciliter la construction de ces tables , on peut éviter de tracer les lignes de l'échiquier , en se servant d'un châssis de carton divisé avec des fils par différens carreaux , on peut aussi mettre la bordure d'en haut , & celle qui est à gauche sur deux bandes de papier qui se déplient en dehors , & qui excèdent les pages qui contiennent l'échiquier.

Une *Equation* littérale se nomme une formule , parce que c'est l'expression générale de toutes les Equations numériques semblables ; car il n'y a qu'à substituer des nombres à la place des lettres connues pour avoir des Equations numériques , & substituant successivement chacun des nombres de la suite naturelle à l'infini , on

POUR LES EQUATIONS A L'INFINI. 11
aura des séries infinies d'Equations semblables à l'infini.

Dans chaque degré, il y a des Equations complètes & incomplètes, ce qui fait deux genres que je divise par classes & par espèces différentes afin de traiter cette matière avec ordre pour faciliter la résolution des Equations.

Une Equation complète contient toujours un terme de plus que l'exposant de son degré ne contient d'unités. Ainsi dans le second degré elle a trois termes, dans le troisième degré quatre termes, &c. Voilà la dernière classe des formules de chaque degré, son exposant est celui de son degré.

Une Equation incomplète contient moins de termes que l'Equation complète, ce qui ne se trouve que dans les Equations abrégées, car lorsque l'Equation n'est point abrégée, elle contient en détail tous les produits de sa formation qui la rendent toujours complète; mais en abrégant, lorsqu'il se trouve dans un même terme ou dans plusieurs termes des produits égaux & contraires, ils rendent ce terme ou ces termes nuls, les détruisent & les font évanouir, voilà l'origine des Equations & des formules incomplètes qui donnent les autres classes.

L'Equation pure & simple dans chaque degré n'a que deux termes extrêmes, le premier terme est la haute puissance de l'inconnuë, & le dernier terme que je nomme l'homogène de comparaison qui est exprimé en nombres ou en lettres connues dans cette Equation, tous les termes moyens employés dans sa formation ont été détruits par des signes contraires en l'abrégant.

Voilà la plus simple Equation ou formule dans chaque degré, & la première classe des formules: entre cette première classe & la dernière, il y a autant de classes différentes qu'il y a d'unités entre leurs exposants, ou ce qui revient au même dans chaque degré, il y a autant

de classes différentes entre les formules , que l'exposant du degré contient d'unités.

Je distingue encore dans chaque classe des espèces différentes , & dans chaque espèce des individus qui sont autant de formules différentes dans un même degré , & pour traiter cela avec plus d'ordre & de Méthode , je réduis à sept Problèmes tout ce qui regarde en général les formules de tous les degrés à l'infini , car dans un degré quelconque , on peut demander.

1°. Le nombre de ses formules.

2°. Le nombre des formules ou de plusieurs degrés , ou de tous les degrés à l'infini pris ensemble.

3°. Le nombre des classes différentes des formules dans chaque degré.

4°. Le nombre des espèces différentes des formules dans chaque classe.

5°. Le nombre des individus ou formules particulières dans chaque espèce.

6°. Chacune des formules particulières en lettres , pour une espèce & une classe déterminées dans un degré quelconque.

7°. Enfin la formation des Equations numériques dans chaque formule particulière.

Nous donnons la résolution de ces sept Problèmes , afin qu'il n'y ait rien qui puisse arrêter le lecteur.

PROBLEME I.

Déterminer le nombre des formules dans chaque degré.

Soit p l'exposant du degré proposé , le nombre de ses formules est $2 \times 3^{p-1}$, c'est à dire que ce nombre est double de la puissance de 3 moindre de l'unité que l'exposant de ce degré.

POUR LES EQUATIONS A L'INFINI. 13
E X E M P L E S.

Dans le 1^{er}. degré, où $p=1$, j'ai $\frac{2 \times 3^{1-1}}{1} = \frac{2 \times 3^0}{1} = 2$.
Donc le premier degré a deux formules.

Dans le 2^d. degré, où $p=2$, j'ai $\frac{2 \times 3^{2-1}}{1} = \frac{2 \times 3^1}{1} = 6$ formules.

Dans le 3^e. degré, où $p=3$, j'ai $\frac{2 \times 3^{3-1}}{1} = \frac{2 \times 9}{1} = 18$. formules.

Dans le 4^e. degré, où $p=4$, j'ai $\frac{2 \times 3^{4-1}}{1} = \frac{2 \times 27}{1} = 54$. formules.

Dans le 5^e. degré, où $p=5$, j'ai $\frac{2 \times 3^{5-1}}{1} = \frac{2 \times 81}{1} = 162$. formules.

Dans le 6^e. degré, où $p=6$, j'ai $\frac{2 \times 3^{6-1}}{1} = \frac{2 \times 243}{1} = 486$. formules.

Dans le 7^e. degré, où $p=7$, j'ai $\frac{2 \times 3^{7-1}}{1} = \frac{2 \times 729}{1} = 1458$. formules.

Dans le 8^e. degré, où $p=8$, j'ai $\frac{2 \times 3^{8-1}}{1} = \frac{2 \times 2187}{1} = 4374$. formules.

Dans le 9^e. degré, où $p=9$, j'ai $\frac{2 \times 3^{9-1}}{1} = \frac{2 \times 6561}{1} = 13122$ formules.

Dans le 10^e. degré, où $p=10$, j'ai $\frac{2 \times 3^{10-1}}{1} = \frac{2 \times 19683}{1} = 39366$. formules.

Ce qui donne la série suivante.

<i>Exposans des degrés.</i>	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	&c.
<i>Nombre des formules.</i>	2.	6.	18.	54.	162.	486.	1458.	4374.	13122.	&c.

B iij

PROBLEME II.

Trouver le nombre des formules de plusieurs degrez pris de suite. 1°. En nombre fini. 2°. De tous les degrez à l'infini.

1°. Pour plusieurs degrez pris de suite en nombre fini, le nombre des formules est $3^p - 1$, en supposant p égal à l'exposant du dernier degré qui a été pris, la somme des formules est égale à une semblable puissance de 3 moins l'unité.

Pour le 1^{er}. degré seul où $p = 1$, j'ai $3^1 - 1 = 3 - 1 = 2$.

Pour les deux premiers degrez, l'exposant du second est $2 = p$, j'ai $3^2 - 1 = 9 - 1 = 8 = 2 + 6$, trouvez ci-dessus.

Pour les trois premiers degrez, l'exposant du troisième est $3 = p$, j'ai $3^3 - 1 = 27 - 1 = 26 = 2 + 6 + 18$, trouvez ci-dessus.

Pour les quatre premiers, où $p = 4$, j'ai $3^4 - 1 = 81 - 1 = 80 = 2 + 6 + 18 + 54$ trouvez ci-dessus ; & ainsi des autres.

2°. Pour tous les degrez à l'infini pris ensemble, l'exposant du dernier & infinitième degré est ∞ . Donc la somme des formules de tous les degrez à l'infini est $3^\infty - 1$. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE I.

Et remarque, Dans ce grand nombre de formules on doit retrancher comme inutiles toutes les formules dont le second membre qui contient tous les termes (excepté la haute puissance de l'inconnuë) est totalement négatif, parce qu'il est impossible que le positif soit égal au négatif absolu, & si on veut absolument les résoudre, on le pourra toujours de la même manière que celles dont les deux membres sont totalement positifs. Nous verrons dans la suite comment on peut encore diminuer le nombre des formules.

POUR LES EQUATIONS A L'INFINI. 11

Il est évident qu'il n'y a qu'une seule formule négative dans le premier degré $x = -b$. Dans tous les degrés supérieurs, soit p l'exposant du degré proposé, le nombre des formules totalement négatives dans le second membre & partant inutiles, est une puissance de 2 moindre de l'unité que l'exposant du degré, c'est donc 2^{p-1} .

Ainsi dans le second degré, où $p = 2$, j'ai $2^{2-1} = 2^{1-1} = 2$, ce qui donne deux formules inutiles.

Dans le troisième degré, où $p = 3$, j'ai $2^{3-1} = 4$ formules inutiles.

Enfin dans le 10^e. degré, où $p = 10$, j'ai $2^{10-1} = 2^9 = 512$ formules inutiles. On peut les exprimer par la série qui suit.

<i>Exposans des degrés</i>	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9 ^{me} . degré, &c.
<i>Nombre des formules.</i>	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256. 512. &c.

COROLLAIRE II.

Donc dans chaque degré, dont l'exposant soit p , le nombre des Equations utiles est $2 \times 3^{p-1} - 2^{p-1}$, qui est

un binôme dont la première partie contient le nombre des formules possibles dans chaque degré trouvé par le Problème I. & la seconde partie contient le nombre des formules inutiles trouvées par le Corollaire précédent, à retrancher du nombre total des formules.

Ainsi dans le second degré, où $p = 2$, j'ai $2 \times 3^{2-1} - 2^{2-1} = 2 \times 3 - 2 = 6 - 2 = 4$, nombre des formules utiles.

Dans le troisième degré , où $p = 3$, j'ai $2 \times 3^{1-1}$
 $\underline{\underline{2^{1-1}}} = 2 \times 9 - 4 = 18 - 4 = 14$, nombre des
 formules utiles.

Dans le septième degré , où $p = 7$, j'ai $2 \times 3^{7-1}$
 $\underline{\underline{2^{7-1}}} = 2 \times 3^6 - 2^6 = 2 \times 729 - 64 = 1458$
 $\underline{\underline{64}} = 1394$.

Dans le dixième degré , où $p = 10$, j'ai $2 \times 3^{10-1}$
 $\underline{\underline{2^{10-1}}} = 2 \times 3^9 - 2^9 = 39366 - 512 = 38854$.

On peut les exprimer par les quatre séries suivantes.
 pour en avoir le rapport , le premier est l'exposant du
 degré , la seconde est le nombre total des formules dans
 chaque degré correspondant , la troisième contient le
 nombre des formules inutiles à retrancher , la quatrième
 contient le nombre des seules formules utiles , & c'est la
 différence de chaque terme correspondant dans la se-
 conde & la troisième série.

<i>Exposant du degré</i>	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
<i>Total des formules</i>	2.	6.	18.	54.	162.	486.	1458. &c.
<i>Inutiles</i>	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64. &c.
<i>Utiles</i>	1.	4.	14.	46.	146.	454.	1394. &c.

PROBLEME III.

*Déterminer le nombre des classes des formules différentes
 dans chaque degré.*

Pour distinguer en différentes classes les formules d'un
 même degré , je prends dans ce degré , par exemple , le
 cinquième , les deux Equations extrêmes ; sçavoir , son
 Equation pure & simple $x^5 = b^5$. qui n'a que deux ter-
 mes , & son Equation complete qui a tous ses six termes.
 $x^5 = a^1 x^4 + a^{11} x^3 + a^{111} x^2 + a^{1111} x^1 - b^5$. & je les écris
 de cette sorte , mettant dans le premier membre la haute
 puissance

POUR LES EQUATIONS A L'INFINI. 17
 puissance de l'inconnuë toute seule , & dans le second
 membre tous les autres termes , par cette disposition
 j'ai un seul terme dans le second membre de l'Equa-
 tion pure & simple , c'est la premiere classe dont l'expo-
 sant est 1.

Mais j'ai cinq termes dans le second membre de l'E-
 quation complete , c'est la cinquième classe de ce de-
 gré , son exposant est 5.

Donc j'ai les deux classes extrêmes 1 & 5 , je remplis
 leur interval par la suite naturelle des nombres, 1, 2, 3, 4, 5,
 ce qui me donne cinq membres, qui donnent cinq classes
 différentes , dont ils sont les exposans , & marquent en
 même tems le nombre des termes de chacune de ces
 classes dans le second membre de la formule comme il
 suit.

1 ^{re} . classe.	$x^5 = \pm b^5.$	Une seule espèce.
2 ^{de} . classe.	$x^5 = a^1 x^4 - b^5.$	1 ^{re} . espèce.
& 4 ^e . espèces.	$x^5 = a^{II} x^4 - b^5.$	2 ^{de} . espèce.
	$x^5 = a^{III} x^2 - b^5.$	3 ^e . espèce.
	$x^5 = a^{IV} x - b^5.$	4 ^e . espèce.

3^e. classe. $x^5 = a^1 x^4 \pm a^2 x^3 \pm b^5.$
 & 8 espèces.

4^e. classe $x^5 = a^1 x^4 \pm a^2 x^3 \pm a^3 x^2 \pm b^5.$
 & 4 espèces.

5^e. classe $x^5 = a^1 x^4 \pm a^2 x^3 \pm a^3 x^2 \pm a^4 x^1$
 & 16 espèces. $\pm b^5.$

Analyse.

C

Ainsi dans le cinquième degré, comme il y a cinq termes dans le second membre, il y a cinq classes de formules.

En général, il y a dans chaque degré autant de classes différentes de formules, que l'exposant de ce degré contient d'unités.

PROBLEME IV.

Trouver le nombre des espèces différentes des formules dans chaque classe d'un même degré.

Le nombre des termes établit la différence des classes, ainsi la 5^e. classe du 5^e. degré qui est complète contient cinq termes dans le second membre, mais il y a dans ce même degré quatre classes de formules incomplètes, qui se réduisent à trois classes, en retranchant la première classe qui est celle des Equations pures & simples, de sorte que de ces cinq classes retranchant les deux classes extrêmes la première & la dernière; il reste trois classes dans lesquelles il peut y avoir plusieurs espèces: car je nomme espèces différentes de formules, celles de la même classe qui ont par conséquent le même nombre de termes, mais non pas les mêmes termes. Par exemple, la seconde classe du cinquième degré qui a deux termes dans le second membre a aussi quatre espèces, car retranchant dans l'Equation pure & simple, & dans l'Equation complète l'homogène qui doit toujours se trouver dans toutes les formules, il me reste une place à remplir dans la seconde classe, & j'ai quatre termes dans l'Equation complète qui peuvent occuper cette place chacun en particulier, ce qui donne quatre espèces différentes de la seconde classe.

$$1^{\text{re}}. \text{ classe. } x^5 = \pm b^5.$$

$$5^{\text{me}}. \text{ classe. } x^5 = \pm a^1 x^4 \pm a^2 x^3 \pm a^3 x^2 \pm a^4 x^1 \pm b^5.$$

$$2^{\text{de}}. \text{ classe. } x^5 = \pm a^1 x^4 \pm b^5. 1^{\text{re}}. \text{ espèce.}$$

$$x^5 = \pm a^2 x^3 \pm b^5. 2^{\text{de}}. \text{ espèce.}$$

$$x^5 = \pm a^3 x^2 \pm b^5. 3^{\text{me}}. \text{ espèce.}$$

$$x^5 = \pm a^4 x^1 \pm b^5. 4^{\text{me}}. \text{ espèce.}$$

De même dans la 3^e. classe du 5^e. degré qui a trois termes dans le second membre, j'ai deux places à remplir en combinant quatre termes de toutes les manières possibles, deux à deux. Ces termes sont, x^4 , x^3 , x^2 , x^1 . ce qui se peut combiner deux à deux sans répétition de six manières différentes, ce qui donne six espèces différentes dans la 3^e. classe.

$$3^{\text{e}}. \text{ classe. } x^5 = \pm a^1 x^4 \pm a^2 x^3 \pm b^5. \text{ sans } x \text{ \& } x^2.$$

$$x^5 = \pm a^1 x^4 \pm a^3 x^2 \pm b^5. \text{ sans } x \text{ \& } x^3.$$

$$x^5 = \pm a^1 x^4 \pm a^4 x^1 \pm b^5. \text{ sans } x^2 \text{ \& } x^3.$$

$$x^5 = \pm a^2 x^3 \pm a^3 x^2 \pm b^5. \text{ sans } x^3 \text{ \& } x^4.$$

$$x^5 = \pm a^2 x^3 \pm a^4 x^1 \pm b^5. \text{ sans } x^4 \text{ \& } x^2.$$

$$x^5 = \pm a^2 x^3 \pm a^3 x^2 \pm b^5. \text{ sans } x \text{ \& } x^4.$$

Pareillement dans la 4^e. classe du 5^e. degré, qui a quatre termes dans le second membre, au lieu de cinq termes dans l'Equation complete, ce qui se réduit à 3. &

à 4. retranchant de part & d'autre l'Homogène, or de quatre termes on en peut arranger trois de quatre manières différentes, ce qui donne quatre espèces différentes dans la 4^e. classe du 5^e. degré.

Mais la 1^{re}. classe qui n'a qu'un terme dans le second membre, & l'Equation complete de la 5^e. classe qui en a cinq, n'ont chacune qu'une seule espèce; car on ne peut varier ni le nombre ni l'espèce des termes dans ces classes, mais elles ont des individus ou formules particulières différentes, qui viennent de la seule diversité des Signes $+$ & $-$.

PROBLEME V.

Trouver les Individus ou Formules particulières & leur nombre dans chaque espèce & dans chacune des Classes d'un même degré & de tous les degrez à l'infini.

Les formules particulières dans chaque espèce & dans chacune des classes viennent des combinaisons différentes des Signes, $+$ & $-$. Or toutes les combinaisons utiles qui donnent des formules différentes sont exprimées par les deux Séries suivantes, dont la première marque l'exposant de la classe & le nombre des termes dans le second membre, c'est la Série des nombres naturels. La 2^{de}. qui marque le nombre des combinaisons qui détermine le nombre des formules particulières ou des individus dans chaque espèce, est la Série des puissances de 2.

<i>Nombre des</i>									
<i>termes.</i>	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9. &c.

<i>Nombre des</i>									
<i>Formules.</i>	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512, &c.

Ainsi dans la 1^{re}. classe où il n'y a qu'un terme, il y a deux formules, parce que les Signes $+$ & $-$ peuvent être mis tous les deux devant ce terme unique. Ce qui donne deux formules.

POUR LES EQUATIONS A L'INFINI. 22

Dans la 2^{de}. classe où il y a deux termes , les signes $+$ & $-$ peuvent être combinez en quatre manières. Ce qui donne quatre formules.

Dans la 3^{me}. classe qui a trois termes , les signes $+$ & $-$ peuvent se combiner en huit manières , ce qui donne huit formules. Et ainsi des autres à l'infini.

PROBLEME VI.

Trouver en lettres chaque formule particulière d'une espèce , & d'une classe quelconque d'un degré proposé.

Comme toutes les formules particulières dans une espèce & dans une classe d'un degré déterminé , vient de la seule combinaison des signes , lorsqu'on aura une classe & une espèce déterminée. Par exemple , la 1^{re}. espèce de la 3^{me}. classe du 5^{me}. degré $x^5 = \pm a^1 x^4$. $\pm a^2 x^3 \pm b^5$. qui est sans x & sans xx . & qui a trois termes dans le second membre ; or par le Problème 5^{me}. j'ai dans la Serie huit combinaisons ou formules pour 3. termes. Ainsi j'écris de suite ces huit formules qui comprennent toutes les combinaisons différentes des signes $+$ & $-$ comme il suit.

$$x^5 = + a^1 x^4 + a^2 x^3 + b^5. \text{ 1^{re}. form.}$$

$$x^5 = + a^1 x^4 + a^2 x^3 - b^5. \text{ 2^{de}. form.}$$

$$x^5 = + a^1 x^4 - a^2 x^3 + b^5. \text{ 3^{me}. form.}$$

$$x^5 = + a^1 x^4 - a^2 x^3 - b^5. \text{ 4^{me}. form.}$$

$$x^5 = - a^1 x^4 + a^2 x^3 + b^5. \text{ 5^{me}. form.}$$

$$x^5 = - a^1 x^4 - a^2 x^3 + b^5. \text{ 6^{me}. form.}$$

$$x^5 = - a^1 x^4 + a^2 x^3 - b^5. \text{ 7^{me}. form.}$$

$$x^5 = - a^1 x^4 - a^2 x^3 - b^5. \text{ 8^{me}. form.}$$

C iij

PROBLEME VII.

Former les Equations en nombres dans chaque Formule particulière d'un degré quelconque.

Ce Problème est important pour la résolution des Equations , car il est ridicule de chercher les racines d'une Equation proposée, si on ignore le nombre & la nature des élémens dont elle contient le produit.

De la nature des racines des Equations de tous les degrez, de leurs genres & de leurs espèces.

Les racines d'une Equation composée d'un degré quelconque ou ses élémens sont les Equations simples, ou du premier degré dont elle contient le produit. Je divise les racines en plusieurs genres.

Les racines sont ou positives ou négatives : Voilà leur premier genre.

Les racines positives sont celles dont la valeur de l'inconnue est une grandeur positive comme $x - 2 = 0$, qui donne par transposition $x = + 2$, c'est une valeur positive.

Les racines négatives sont celles dont la valeur de l'inconnue est négative, comme $x + 2 = 0$, qui donne par transposition $x = - 2$, c'est une valeur négative.

Le second genre divise les racines en réelles & imaginaires, qui se divisent chacune en deux espèces, 1°. rationnelles, 2°. irrationnelles.

Les racines réelles, rationnelles ou commensurables, sont celles dont la valeur s'exprime exactement, ou par un nombre, ou par une lettre connue, comme $x - 2 = 0$, $x - a = 0$.

Les racines réelles, irrationnelles ou incommensurables, sont celles dont la valeur ne peut être exprimée exactement par un nombre ou par une lettre connue, sans y

ajouter un signe Radical comme $x - \sqrt{2} = 0$, $x - \sqrt{a} = 0$ ce qui marque la racine quarrée de 2, ou de a , qu'il est impossible d'exprimer sans le signe Radical, on les nomme incommensurables, parce qu'on ne peut pas les mesurer par l'unité ni par aucune partie connue de l'unité.

Les racines imaginaires sont aussi de deux espèces, il y en a qui sont imaginaires & rationnelles comme $+$ $-a$ qui est une valeur imaginaire négative dans $x + -a = 0$, mais imaginaire positive dans $x - -a = 0$, ces deux valeurs sont des imaginaires du premier degré.

Les valeurs imaginaires du second degré ont toujours deux signes comme les autres imaginaires, le premier qui est hors du signe est $+$ ou $-$, le second qui est ici sous le signe Radical est toujours $-$ dans l'imaginaire du second degré $x + \sqrt{-a}$ & $x - \sqrt{-a}$, comme dans le premier degré $x + -a$ & $x - -a$.

Or le second signe $-$ est toujours invariable dans tous les imaginaires, il n'y a que le premier signe qui peut varier.

Ces racines imaginaires sont proprement des racines négatives, sourdes & irrationnelles, mais les positives sont simplement des racines sourdes ou irrationnelles.

Les racines imaginaires sont rationnelles, lorsque la grandeur ou valeur imaginaire qui est sous le signe Radical, est une puissance parfaite égale & semblable à l'exposant du signe radical, comme dans $x + \sqrt{-a^2} + 0$, & $x - \sqrt{-a^2} = 0$, dans lesquels a^2 est élevé à la puissance exacte du signe Radical $\sqrt{}$ qui est la seconde puissance.

Mais les racines imaginaires sont irrationnelles, lorsque la grandeur imaginaire qui est sous le signe Radical n'est pas de même degré que l'exposant du signe Radical comme dans $x - \sqrt[3]{-a} = 0$ dans lequel le Ra-

dical est du troisième degré, & la grandeur imaginaire sous le signe Radical est du premier degré.

Du nombre des racines dans chaque formule, de tous les degrés à l'infini.

Dans tous les degrés à l'infini, chaque formule contient autant de racines ou d'équations simples & du premier degré, que l'exposant de la haute puissance contient d'unités.

Ces équations du premier degré en sont les éléments les plus simples, ainsi dans une formule du second degré dont l'exposant est 2, il y a deux racines ou deux éléments, trois racines dans une formule du troisième degré, quatre racines dans une formule du quatrième degré, &c.

On peut aussi considérer une formule du troisième degré, comme le produit d'une équation du second degré multipliée par une équation du premier degré; de même une équation du quatrième degré peut être considérée comme le produit de deux équations du second degré; pareillement une équation du cinquième degré peut être regardée comme le produit d'une équation du troisième degré, multipliée par une équation du second degré.

En général toute équation, par exemple, du septième degré, est le produit de toutes les équations dont les exposants peuvent être les diviseurs exacts de son exposant 7; c'est-à-dire, qu'elle est le produit de sept équations du premier degré, parce que leur exposant 1 divisé 7, & le quotient est 7 qui donne les sept équations du premier degré. On peut encore la considérer comme formée par les équations, dont les exposants pris ensemble font le nombre 7, qui est son exposant, ainsi comme $2 \times 3 + 1 = 7$, cette équation peut être formée par deux équations du troisième degré & une du premier degré,

&

& enfin comme $4 \times 3 = 7$, on peut aussi la former par une équation du quatrième degré, & une du troisième degré, & ainsi des autres.

Des termes des Equations, de leur nombre, & de leur différence.

Dans chaque équation d'un degré quelconque, il y a toujours un terme de plus que l'exposant de son degré ou de sa haute puissance qui sont égaux, contient d'unités. Ainsi lorsqu'il se trouve moins de termes, c'est une marque qu'il y en a qui sont évanouïs, ce qui se fait en abrégant l'équation, lorsqu'il y a des produits égaux avec des signes contraires, ils se détruisent & ce terme manque dans l'équation abrégée.

Les différentes puissances de l'inconnuë font la différence des termes, ainsi tous les produits qui ont une même puissance de l'inconnuë ne font qu'un seul & même terme, on les écrit les uns sous les autres, à mesure qu'on les trouve dans la formation de l'équation, & on les abrège en écrivant une seule lettre, ou un nombre qui est la somme des facteurs s'ils ont le même signe, ou leur différence s'ils ont des signes contraires, ainsi ce facteur est zéro, lorsque la somme des facteurs positifs égale celle des négatifs.

Le premier terme contient la plus haute puissance de l'inconnuë seule, les termes suivans qui sont les termes moïens, contiennent un coefficient ou facteur exprimé en nombre ou en lettres avec une puissance de l'inconnuë.

Dans les termes moïens, les exposans des puissances de l'inconnuë décroissent de l'unité d'un terme à l'autre, jusqu'à la puissance linéaire de l'inconnuë, qui est toujours le pénultième terme de l'équation.

Le dernier terme n'a point d'inconnuë, il contient

Analyse.

D

seulement un nombre, ou des lettres qui expriment le produit de toutes les valeurs des racines de l'équation.

Dans une équation réduite à sa plus simple expression comme la suivante qui est du cinquième degré.

Exposans
des I . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . . . 6.
termes.

$$x^5 + a^I x^4 + a^{II} x^3 + a^{III} x^2 + a^{IV} x^I - b^V = 0.$$

Il y a six termes, le premier terme contient la haute puissance de l'inconnuë seule x^5 . Le sixième & dernier terme b^V contient une lettre connuë, dont l'exposant en chiffre Romain ou Italique V marque cinq dimensions, ou le produit de cinq racines, & non pas une cinquième puissance.

Les autres termes (compris entre le premier & le dernier qui sont les termes extrêmes) se nomment les termes moïens, qui ont chacun un coefficient ou facteur avec une puissance de l'inconnuë décroissante de l'unité.

Dans les équations abrégées, les coefficients ou facteurs sont exprimez en général par des a , dont l'exposant en chiffre Italique marque le nombre des dimensions nécessaire, pour rendre tous les termes homogenes, & de cinq dimensions comme dans le premier terme, ce qui fait que ces exposans de a croissent de l'unité d'un terme au suivant, à mesure que l'exposant de x décroît.

Ces coefficients ou facteurs sont chacun en particulier le résultat, c'est-à-dire la somme ou la différence de tous les coefficients particuliers qu'on trouve en détail dans la formation de l'équation; c'est la somme lorsque les signes sont semblables dans tous les facteurs d'un même terme, mais c'est leur différence, lorsqu'il y a dans un

POUR LES EQUATIONS A L'INFINI. 27
 même terme des facteurs qui ont des signes contraires,

Ainsi, si je forme une équation du quatrième degré en multipliant quatre racines positives a, b, c, d , ensuite en supposant d négative.

$$x - a = 0.$$

$$-b = 0.$$

$$x^2 - ax$$

Abrégé pour le second degré.

$$-bx + ab = 0.$$

$$xx - c = 0.$$

$$x^2 - ax - ab = 0.$$

$$x^3 - ax^2 -$$

$$-bx^2 + abx.$$

$$-cx^2 + acx.$$

$$+bcx - abc = 0.$$

$$xx + d.$$

Abrégé pour le troisième degré.

$$x^3 - ax^2 + a^2x - abc = 0.$$

$$x^4 - ax^3.$$

$$-bx^3 + abx^2.$$

$$-cx^3 + acx^2.$$

$$-dx^3 + bcx^2 + abcx + a, b, c, = 0.$$

$$+adx^2 + abdx.$$

$$+bdx^2 + acdx.$$

$$+cdx^2 + bcdx.$$

D ij

Abrégé pour le quatrième degré supposant d positif.

$$x^4 - x^1 a^3 + a^{II} x^2 - a^{III} x^1 + a b c d = 0.$$

Mais supposant d négatif.

$$j'ai \ x^4 - a^1 x^3 + a^{II} x^2 + a^{III} x^1 - a b c d = 0.$$

Dans laquelle j'ai mis deux signes au troisième terme, ce sera $+$ si les produits positifs surpassent les négatifs, au contraire ce sera $-$ si les produits négatifs surpassent les positifs, & s'ils sont égaux, ils feront évanouir le troisième, comme alors son coefficient est nul ou zero, ce qui s'exprime ainsi $\pm 0^{II} x^2$.

Il suit delà que le facteur du second terme contient la somme ou la différence des valeurs de toutes les racines de l'équation; Sçavoir la somme, lorsqu'elles ont des signes semblables, mais la différence lorsqu'elles ont des signes contraires.

Dans le troisième terme, le facteur contient la somme ou la différence des produits de toutes les valeurs des racines prises deux à deux.

Dans le quatrième terme, le facteur contient la somme ou la différence des produits de toutes les valeurs des racines prises trois à trois.

En général, les valeurs des racines sont multipliées en nombre pair dans tous les termes impairs, à commencer par le troisième terme, cinquième, septième, &c. car le premier contient la seule haute puissance de l'inconnue, mais elles sont multipliées en nombre impair, dans les termes pairs à commencer par le quatrième terme, sixième, huitième, &c. car dans le second terme les valeurs des racines s'y trouvent seules sans être multipliées les unes par les autres.

Méthode pour faire évanouir les termes moyens, & former des équations numériques où il manque quelque terme moyen.

Il suit delà que pour faire évanouir les termes moyens, & rendre leur facteur nul ou égal à zero, ce qui est nécessaire pour former une équation numérique, suivant une formule où il manque un ou plusieurs termes.

1°. Pour faire évanouir le second terme, il faut que la somme des racines positives soit égale à la somme des racines négatives. Ainsi dans le second degré il faut que les deux racines soient égales avec des signes contraires, dans le troisième degré, il faut que la troisième racine égale la somme des deux premières avec un signe contraire, &c.

2°. Pour faire évanouir le troisième terme, & même tout autre, dans le troisième degré, & dans tous les degrés supérieurs, il faut considérer l'équation du degré prochain inférieur, afin de pouvoir par là tirer une valeur de la dernière racine capable de rendre les produits négatifs égaux aux positifs.

Ainsi pour faire évanouir le troisième terme dans une équation numérique du troisième degré, ou en former une où le troisième terme manque, je prends une équation du second degré, dont le facteur soit un diviseur exact de son dernier terme, comme $x^2 - 4x - 32 = 0$. & le quotient $+8$ sera la troisième racine positive.

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x - 32 = 0 \\ \underline{xx - 8 = 0.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ - 4x^2 - 32x + 256 = 0. \\ - 8x^2 + 32x. \\ \hline \end{array}$$

$$x^3 - 12x^2 + 0x + 256 = 0.$$

Mais dans $x^2 + 4x - 32 = 0$, la troisième racine est négative $x + 8 = 0$. en général ce quotient prend le signe propre à détruire le troisième produit, c'est celui du facteur du second terme de l'équation précédente comme ici, ou le contraire comme dans l'exemple suivant, selon que le cas l'exige.

Pour former dans le quatrième degré une équation où le troisième terme manque, je prends une équation du troisième degré dans laquelle le facteur du second terme soit un diviseur exact du troisième terme, comme

$$\begin{array}{l} x^3 + b x^2 + 12 x + 8 = 0. \\ x x - 2 = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^4 + 6 x^3 + 12 x^2 + 8 x. \\ - 2 x^3 - 12 x^2 - 24 x - 16 = 0. \end{array}$$

$$x^4 + 4 x^3 + 0 x^2 - 16 x - 16 = 0.$$

Je divise 12 par 6, son quotient 2, est la quatrième racine propre à faire évanouir le troisième terme.

Il est facile de faire évanouir tel terme qu'on voudra par la même Méthode dans tous les degrez supérieurs, ou de former des équations numériques, où il manque un ou plusieurs termes, ce qui revient au même, nous sommes obligés de supprimer un plus grand détail pour abréger ce traité.

En général, pour faire évanouir quelque terme d'une équation proposée, je considère tous les produits particuliers de ce terme dans l'équation du degré inférieur moindre de l'unité que la proposée pour opérer dessus; il y a deux cas, le premier cas est, lorsque tous les produits de

ce terme ont le même signe $+$ ou $-$, alors il faut pour le détruire former dans ce terme un produit égal à la somme des facteurs avec un signe contraire.

Ainsi dans ce cas il faut diviser la somme des facteurs de ce terme par la somme des facteurs du terme précédent, & prendre le quotient pour multiplicateur cherché ou dernière racine, avec un signe propre à faire évanouir le terme désiré. Mais dans le second cas où les facteurs du terme proposé ont des signes différens, il faut prendre leur différence, & opérer comme on a fait ci-dessus pour le premier cas.

Explication & formation générale des Tables des Equations.

Il y a deux espèces de Tables, & chacune de ces Tables sert généralement pour deux formules soucontraires du même degré, dont l'une a les mêmes racines que l'autre, mais avec des signes contraires, ce qui est de l'essence des équations & des formules soucontraires.

Toutes ces Tables consistent dans un échiquier avec deux bordures, l'une en haut, & l'autre à gauche.

L'échiquier contient toujours les séries des homogènes, qui sont des progressions arithmétiques, ce sont les valeurs du dernier terme b , qui a toujours un exposant exprimé ou sous-entendu en chiffre Romain, d'autant de dimensions que l'exposant de la haute puissance de l'inconnuë.

Des Tables de la première espèce.

Dans les Tables de la première espèce, l'échiquier contient les séries horizontales & verticales des homogènes seuls de toutes les équations possibles, rationnelles & irrationnelles dans ces formules; ces séries horizontales suivent la formule, elles sont croissantes ou décroissantes,

de la valeur de x du même rang, c'est-à-dire, qu'elles se forment les unes par simple addition, les autres par simple soustraction, suivant qu'il est prescrit par la formule convenable à chacune des tables.

La bordure d'enhaut contient la série des valeurs de a qui est la suite naturelle des nombres qui commence par zéro. 0. 1. 2. 3. 4. 5, &c. ce zéro donne pour la première colonne de l'échiquier la série des équations pures & simples dans chaque degré.

La bordure à gauche contient deux rangs verticaux ou deux colonnes dans le second degré, trois dans le troisième degré, quatre dans le quatrième degré, &c. la première colonne contient la série des nombres qui commence par zéro, 0. 1. 2. 3. 4. 5, ce sont les valeurs de x .

La seconde colonne du second degré contient les valeurs de x^2 . c'est la suite des quarrés naturels, 0. 1. 4. 9. 16. 25, &c.

Dans le troisième degré, les deux premières colonnes qui contiennent les valeurs de x & de x^2 . sont les mêmes que les précédentes, la troisième colonne contient les valeurs de x^3 . qui est la série des cubes naturels, 0. 1. 8. 27. 64, &c. & ainsi des autres.

Des Tables de la seconde espèce.

Les Tables de la seconde espèce, ne contiennent que les seules Equations rationnelles, soit réelles soit imaginaires.

L'échiquier contient dans chaque cellule un homogène avec toutes ses racines; ainsi l'échiquier contient tout ensemble les séries des homogènes & les séries de de toutes leurs racines.

La

La bordure d'enhaut contient les valeurs de a variable & seule dans le 2^d. degré. Dans le 3^{me}. degré il y a des a^1 & des a^2 . Si la valeur de a est variable, la valeur de a^2 est constante, & dans quelques Tables elle contient une valeur constante de a avec une valeur de a^2 variable, & l'on peut dresser des Tables, supposant a variable sur chacune des valeurs de a^2 constante, prise dans la suite des nombres naturels, pour le 3^{me}. degré; dans les degrez supérieurs l'on aura un plus grand nombre de combinaisons; car on aura dans le quatrième degré a^1 , a^2 , a^3 , que l'on peut combiner à l'infini, en supposant, ou deux de ces valeurs constantes & la 3^{me}. variable, ou bien en les supposant variables toutes trois ensemble de toutes les manières possibles. Ce qui donnera autant de séries différentes pour les homogènes.

La bordure à gauche contient au premier rang vertical ou première colonne, les valeurs de x où la 1^{re}. racine, la 2^{me}. colonne contient la seconde racine pour le 2^d. degré; dans le 3^{me}. degré il y a trois colonnes qui donnent les trois racines, dont les deux premières sont constantes & la troisième est variable; quelquefois c'est la seconde qui est variable. Il y a des formules où il y a deux racines variables en même tems, & d'autres où les trois racines varient ensemble. Tout cela s'éclaircira par les Exemples & par les Tables qui suivent, beaucoup plus que par un plus long discours.

Usage des Tables, pour résoudre les Equations de tous les degres à l'infini.

1^o. Chaque Table porte en tête les formules sur lesquelles elle est dressée, & les termes des formules sont placez séparément.

Analyse.

E

parément dans les endroits de la table qui leur conviennent; la haute puissance de l'inconnue est sur la bordure à gauche. Les facteurs a des termes moyens sont sur la bordure d'en haut; cette bordure détermine la colonne où l'on doit trouver l'homogène proposé b . Tous les homogènes sont dans l'échiquier avec l'exposant de leurs dimensions sous-entendu.

Pour la première espèce.

Les Tables de la première espèce, donnent directement la première racine dans la première colonne de la bordure à gauche vis-à-vis de l'homogène proposé pour chacune des équations possibles dans les formules sur lesquelles chacune des tables est dressée.

Premier exemple. Soit l'équation pure & simple du 2^d. degré $x^2 + 0x = 4$, dans laquelle $a = 0$, & $b = 4$. Je cherche dans la première table du 2^d. degré dans la bordure d'en haut $a = 0$; c'est la colonne où je dois trouver l'homogène $b = 4$. Je le trouve en effet, & j'ai à côté dans la première colonne entre les valeurs des x , du même rang horizontal $x = 2$, qui est la première racine désirée. La seconde racine est $x + a = 2 + 0 = 2$.

Second exemple. Mais si on propose l'équation $x^2 + 0x = 6$. comme l'homogène $b = 6$ ne se trouve point dans la table dans la colonne $a = 0$, mais qu'il est compris dans la suite naturelle des nombres dans l'intervalle des deux homogènes consécutifs $b = 4$, $b = 9$. la première racine est plus grande que 2 racine de $b = 4$, & moindre que 3 racine de $b = 9$. or 2 & 3 sont deux racines qui ne diffèrent que de l'unité. Donc 2 est une racine approchée par défaut, & 3 une racine approchée par excès à moins de l'unité près. La seconde racine est $x + a = 2 + 0$ trop petite, ou $3 + 0$ trop grande.

Troisième Exemple. Soit l'équation affectée de termes

moïens du 2^d. degré $x^2 + 3x = 10$. je cherche dans la bordure d'enhaut $a = 3$, c'est la colonne où je dois trouver l'homogène $b = 10$. Je le trouve en effet, & j'ai à côté à la première cellule du même rang horizontal $x = 2$; c'est la première racine qui est positive; la 2^{de}. racine est $x + a = 2 + 3 = 5$ qui est négative.

Quatrième exemple. Soit l'équation irrationnelle du 2^d. degré $x^2 + 3x = 20$. dans laquelle $a = 3$, & $b^{II} = 20$. je cherche $a = 3$ dans la bordure d'enhaut, c'est la colonne où je dois trouver l'homogène $b^{II} = 20$, je ne l'y trouve point mais 18 & 28, dans l'intervalle, desquels il se trouve dans la suite naturelle des nombres, d'où je conclus que l'équation proposée est irrationnelle, & que ses racines sont plus grandes que celle de l'homogène $b^{II} = 18$, dont les racines sont $x = 3$ positive, $x + a = 3 + 3 = 6$ négative, puisque $20 > 18$. de même comme $20 < 28$, les racines de 28 sont trop grandes, c'est $x = 4$ positive & $x + a = 4 + 3 = 7$ négative. Donc $+3 - 6$ sont les deux racines approchées par défaut; mais $+4 - 7$. sont les deux racines approchées par excès. Or ce défaut & cet excès sont moindres que l'unité.

Pour le troisième degré. -

Cinquième exemple. Soit $x^3 + 1x^2 + 0^{II}x = 36$, dans laquelle $a = 1$, & $b^{III} = 36$. dans la 3^{me}. table de la première espèce qui est dressée sur cette formule, je cherche dans la bordure d'enhaut $x = 1$. C'est la colonne où je dois trouver l'homogène 36 s'il est rationnel, (ou bien il sera compris dans l'intervalle de deux homogènes consécutifs de la même colonne, s'il est irrationnel) or $b = 36$ s'y trouve; & j'ai à côté dans la première cel-

POUR LES EQUATIONS A L'INFINI. 37
toutes les racines de l'équation proposée ; c'est-à-dire ,
autant de racines que l'exposant de la haute puissance ou
du degré de l'équation (qui sont les mêmes) contien-
nent d'unités.

Du cas irréductible du troisième degré.

Le cas irréductible du 3^{me}. degré se trouve dans les é-
quations du 3^{me}. degré dont les trois racines sont irra-
tionnelles ou incommensurables ; c'est-à-dire qui n'ont pas
même l'unité ni aucune fraction pour commune mesure ;
ainsi il n'y a point de racine exacte pour réduire l'équation
au second degré par la division.

Ce Problème n'est pas moins célèbre parmi les Ana-
listes, que la quadrature du cercle l'est parmi les Géomé-
tres c'est là où se réduit la trisection de l'angle.

Toutes les équations possibles dans la quatrième for-
mule de la 2^{de}. espèce de la 2^{de}. classe du 3^{me}. degré
 $x^3 - a''x = -b'''$, & le quart des équations possibles
sur une même valeur constante de x prise pour la grande
racine, tombent nécessairement dans le cas irréductible ;
il y en a aussi dans les formules de la 1^{re}. espèce de la 2^{de}.
classe du 3^{me}. degré, & dans des formules des degrés su-
périeurs.

Il est évident que l'homogène d'une équation dans le
cas irréductible qui a ses trois racines irrationnelles est
compris dans l'intervalle de deux homogènes consécutifs
d'une colonne de la 6^{me}. table du 3^{me}. degré, lesquels ont
chacun une racine réelle qui est approchée à moins de
l'unité près. Ainsi l'homogène moindre que le proposé
donne sa 1^{re}. racine approchée par défaut, & l'homogé-
ne plus grand, donne la racine approchée par excès. Ainsi
l'homogène irréductible aura sa véritable première racine
inexprimable entre deux nombres qui ne diffèrent que de
l'unité, & par ce moyen on pourra tenter la division par

l'une & l'autre de ces racines approchées pour avoir un quotient qui sera l'équation proposée abaissée au 2^d. degré, dont il est facile de trouver les deux autres racines irrationnelles.

Exemple. Dans les deux équations consécutives dans la même colonne de la 6^{me}. table de la première espèce $x^3 - 4x = 315$. dont la 1^{re}. racine est 7, & $x^3 - 4x = 480$. dont la 1^{re}. racine est 8, si je prends un homogène quelconque plus grand que 315 mais moindre que 480, comme $x^3 - 4x = 420$, j'aurai une équation dans le cas irréductible; la 1^{re}. racine de l'homogène 420 est irrationnelle, car elle est moindre que 8 & plus de que 7 qui ne diffèrent que de l'unité.

Ainsi les 6^{es} Tables de la 1^{re}. & de la 2^{de}. espèce donnent la 1^{re}. racine approchée tant par défaut que par excès de toute équation qui est dans le cas irréductible. Et la 6^{me}. table de la 2^{de}. espèce donne encore les deux autres racines irrationnelles sans aucune opération pour toutes les équations contenues dans cette table, soit qu'elles soient dans le cas ordinaire ou réductible qui a deux racines imaginaires, soit qu'elles se trouvent dans le cas irréductible dont les trois racines sont réelles mais irrationnelles ou incommensurable, & comme il est impossible de les exprimer exactement par aucun nombre, mais qu'on peut seulement en approcher tant par excès que par défaut, les tables donnent cette approximation à moins de l'unité près, & on pourra continuer cette approximation à l'infini par les Méthodes de M^r. Lagny qui sont expliquées dans le second Livre de l'Analyse qui suit.

Nous avons vû dans l'avertissement que 10 qui est la 1^{re}. racine exacte de l'équation $x^3 - 90x = 100$ prises pour l'origine d'une série infinie d'homogènes b''' . (dans

le cas irréductible) décroissans constamment de 10 jusqu'à zéro, & croissans constamment de 10 à l'infini, est aussi la première racine la plus approchée de toutes ces équations semblables.

De même si on prend l'équation $x^3 - 90x = 81$ pour l'origine du cas irréductible, dont la première racine est 9, on aura encore 9 pour la première racine approchée de toutes les équations semblables $x^3 - 90x = b'''$. prenant successivement pour les valeurs de b''' . ou pour la série des homogènes 9 & tous ses multiples à l'infini.

En général prenant une équation quelconque du 3^{me}. degré dans la formule $x^3 - a''x = b'''$. ou dans la formule $x^3 - a''x = -b'''$. dont la première racine soit réelle & les deux autres irrationnelles, on pourra sur cette équation faire varier le seul homogène par tous les multiples de sa première racine en décroissant, & par tous les multiples de la même première racine en croissant à l'infini; alors tous ces homogènes donneront des équations semblables dans le cas irréductible, dont les trois racines seront irrationnelles & leur première racine la plus approchée, est la première racine de l'équation prise pour l'origine de cette série infinie d'équations qui sont dans le cas irréductible.

Ainsi dans tous ces cas les Tables donneront la racine désirée de la manière dont il est possible de la trouver, c'est-à-dire à moins de l'unité près; car dans le cas irréductibles il est absolument impossible de trouver cette première racine exactement; cela implique contradiction; car il est de l'essence & de la nature du cas irréductible d'avoir trois racines irrationnelles & incommensurables, partant inexprimables: pour les deux autres racines on

les exprime avec des radicaux qui est une expression qui détermine à la vérité leur valeur , mais d'une manière entièrement in-intelligible quoique réelle d'où il suit que les tables donnent tout ce qu'on peut désirer dans le cas irréductible , sçavoir une approximation pour la première racine à moins d'une unité près par les tables des deux espèces ; mais la table de la seconde espèce donne tout à la fois les trois racines ; de sorte que divisant une équation du troisième degré proposée dans le cas irréductible , la première racine trouvée par les tables divisera toujours l'équation , mais avec un reste soit positif , soit négatif. Ce qu'on ne pourra jamais faire par tout autre nombre , & le quotient contiendra la valeur exacte des deux autres racines irrationnelles , lesquelles sont contenues dans la table de la seconde espèce. Voilà tout ce qu'on peut désirer pour le cas irréductible.

Explication de chaque Table en particulier avec son usage.

Dans le second degré il y a six formules divisées en deux classes. La première contient les deux formules pures & simples. La seconde contient quatre formules complètes.

La 1^{re}. formule $x^2 \pm ox = b''$ a deux racines égales , l'une positive l'autre négative , en nombres entiers lorsque b'' est un carré parfait ; mais ces racines sont irrationnelles lorsque b'' est une seconde puissance imparfaite.

La seconde formule $x^2 \pm ox = -b''$ a deux racines égales & imaginaires $\pm \sqrt{-b''}$ Voilà les deux formules des équations pures & simples.

La troisième formule $x^2 + a'x = b''$ a sa petite racine positive , & la grande négative réelles & irrationnelles.

La quatrième formule $x^2 - a'x = b''$ a sa grande
racine

POUR LES EQUATIONS A L'INFINI. 41
 racine positive, & la petite racine négative, toutes deux réelles.

La cinquième formule $x^2 - ax = -b''$ ses deux racines sont ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires, suivant les cas.

Troisième cas. Lorsque $b'' > \frac{1}{4} aa$, les deux racines sont imaginaires, égales & positives :

Premier cas. Elles sont réelles égales & positives lorsqu'on a $b'' = \frac{1}{4} aa$.

Second cas. Elles sont réelles, inégales & positives lorsqu'on a $b'' < \frac{1}{4} aa$.

La sixième formule $x^2 + ax = -b'''$ a ses deux racines ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires suivant les cas.

Troisième cas. Lorsque $b''' > \frac{1}{4} aa$ ses deux racines sont imaginaires, égales & négatives.

Premier cas. Elles sont réelles, égales & négatives lorsqu'on a $b''' = \frac{1}{4} aa$.

Second cas. Mais elles sont réelles, inégales & négatives lorsqu'on a $b''' < \frac{1}{4} aa$.

La première table de la première espèce du second degré contient la première formule $x^2 \pm ax = b''$, la série de ses homogènes est dans la première colonne de l'échiquier. Le reste de l'échiquier contient les séries des homogènes de la troisième formule $x^2 + ax = b'''$. Sa première racine positive est x , la seconde négative $x + a$.

Cette Table contient encore le premier cas ; & le 2^{me}. cas des équations de la sixième formule dans lesquelles les deux racines sont réelles & négatives en suppo-

Analyse.

F

sant $-b''$ précédé du signe $-$, le troisième cas de cette formule sera dans la table des racines imaginaires qui suivra ci-après.

La première Table de la seconde espèce contient les mêmes séries que celle de la première espèce ; on y trouve sous chaque valeur de a son homogène correspondant avec sa seconde racine au-dessous dans chaque cellule, & la première racine est dans la bordure à gauche dans la première cellule du même rang horizontal, cette table donne les racines telles qu'elles sont pour la première formule $x^2 + 0x = b''$ & pour la 3^{me}. formule $x^2 + ax = b''$, mais pour les deux premiers cas de la sixième formule $x^2 + ax = -b''$, il faut supposer la première racine négative comme la seconde.

La seconde Table de la première espèce du second degré sert pour la seconde formule $x^2 = -b''$ pour la 4^{me} $x^2 - ax = b''$ pour la 5^{me}. $x^2 - ax = -b''$ & même pour le 3^{me}. cas de la 6^{me}. formule $x^2 + ax = b''$ qui est imaginaire.

Cette seconde Table contient deux séries d'homogènes, l'une finie, l'autre infinie, séparées par des zéros qui coupent en diagonale tout l'échiquier & le partagent en deux triangles rectangles, le premier à gauche est pour la 4^{me}. formule, l'autre à droite pour la 5^{me}.

Dans la seconde formule $x^2 = -b''$ les deux racines sont imaginaires, c'est $\pm \sqrt{-b''}$ elle se trouve dans la seconde table de la deuxième espèce contenue dans le premier triangle à gauche dans la quatrième formule $x^2 - ax = b'''$ la grande racine positive est \pm de la bordure à gauche du même rang horizontal que l'homogène, la petite racine positive est $\underline{\underline{a-x}}$.

Exemple. Dans $x^2 - 3x = 4$, la grande racine positive est $x = 2$ la petite négative est $\frac{a-x}{a} = 1 - 2 = -1$.

Dans $x^2 - 3x = 4$. La grande racine est $x = 4$, la petite est $\frac{a-x}{a} = 3 - 4 = -1$. Les séries horizontales des équations de cette quatrième formule finissent aux zéros qui forment la grande diagonale, après laquelle commencent les séries horizontales des équations de la cinquième formule $x^2 - ax = -b''$.

Le triangle rectangle qui est à gauche de la diagonale dans la même table contient le premier & le second cas des équations de la cinquième formule $x^2 - ax = -b''$ & même de la sixième formule $x^2 + ax = -b''$ & on peut négliger cette dernière comme inutile.

Or dans le premier cas de la cinquième formule où $\frac{1}{4}aa = b''$ les deux racines sont réelles, égales & positives. Soit $x^2 - 10x = 25$, la 1^{re} est $x = 5$, la seconde est $\frac{a-x}{a} = 10 - 5 = 5$.

On peut marquer ce cas dans la Table par une petite diagonale dans chaque cellule où il se trouve.

Dans le second cas, où $b < \frac{1}{4}aa$, les deux racines sont réelles, inégales & positives, comme dans $x^2 - 10x = 16$. La première racine est $x = 2$. La seconde est $\frac{a-x}{a} = 10 - 2 = 8$. ou bien $x = 8$, & $\frac{a-x}{a} = \frac{10-8}{8} = 2$, car ces équations ont deux solutions, parce que leur homogène se trouve deux fois dans une même colonne.

Le troisième cas de la cinquième formule dans lequel $b'' > \frac{1}{4}aa$, a ses deux racines imaginaires égales & positives.

Les séries de ces équations imaginaires commence
F ij

dans tous les rangs verticaux; précisément dans les cellules supposées coupées par des diagonales médiocres qui s'étendent de cinq à cinq cellules en descendant toujours & continuant au dessous à l'infini, supposant le signe — devant les homogènes d'un rang seulement. Exemple, soit $x^2 - 8x = -20$, dont les deux racines sont $4 \pm \sqrt{16-20} = 4 \pm \sqrt{-4}$. Comme la seconde table de la première espèce ne donne point ces racines imaginaires d'une manière assez simple, j'ai été obligé d'employer la seconde espèce des tables où les racines sont dans l'expression qui leur est propre.

On peut appliquer ce que nous avons dit des trois cas de la cinquième formule aux trois cas de la sixième formule, ce sont les mêmes racines, mais négatives au lieu qu'elles sont positives dans la cinquième formule.

La seconde Table de la seconde espèce contient deux feuilles, la première contient les deux racines réelles des formules 4, 5 & 6, la seconde feuille contient les deux racines imaginaires du troisième cas de la cinquième & de la sixième formule, dont les homogènes sont contenus dans le premier triangle rectangle qui est à gauche, dans lequel il faut supposer les homogènes précédés du signe —, sans quoi les racines ne seroient point imaginaires, comme elles doivent l'être en effet, puisque ce signe se trouve dans le second membre de ces deux formules.

Du troisième degré.

Dans le troisième degré, il y a 18 formules qui se divisent en trois classes.

La première classe contient les deux formules pures & simples, la première formule $x^3 = -b'''$. a deux racines imaginaires négatives & égales, & la troisième racine positive, réelle, égale à la somme des deux premières racines.

La seconde formule $x^3 = -b'''$ a deux racines imaginaires positives & égales, la troisième réelle & négative, égale à la somme des deux autres racines.

La seconde classe se divise en deux espèces, & chaque espèce contient quatre formules.

Dans la première espèce de la 2^{de}. classe, où le facteur du troisième terme x est égal à zéro.

Première formule $x^3 + a'x^2 + 0x = b'''$ qui vient de l'équation du second degré $x^2 + ax - b'' = 0$. dont la grande racine est négative & la petite positive, multipliée par une troisième racine négative, dont la valeur est le quotient $\frac{b''}{a'}$ c'est-à-dire, le quotient exact de l'homogène de l'équation du second degré, b'' divisé par son facteur a .

$$x + 8 = 0.$$

$$x - 4 = 0.$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x - 32. \\ x x + 8. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 12x^2 + 0x - 256 = 0 \\ \hline \end{array}$$

La troisième Table de la première espèce contient les séries des homogènes des équations suivant cette première formule, toutes ces séries sont infinies. Cette troisième table donne toujours la première racine qui est positive, & qui sert à abaisser l'équation proposée au second degré; après quoi il est facile d'en trouver les deux racines.

Autrement. La première formule $x^3 + ax^2 + 0x$
F iiij

$\equiv + b'''$ vient de l'équation $x^2 + ax + b'' = 0$, qui est dans la sixième formule du second degré qui a deux racines négatives; multipliée par une troisième racine positive qui est le quotient exact en nombres entiers de l'homogène du second degré divisé par son facteur, d'où il suit que toutes les équations du second degré ne sont pas propres pour entrer dans les formules de cette espèce, mais seulement celles dont le facteur est un diviseur exact de leur homogène

$$x - 8 = 0.$$

$$xx + 4 = 0.$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0.$$

$$xx - 2.$$

$$x^3 + bx^2 + 32 = 0.$$

La seconde formule $x^3 + ax^2 + 0x = -b''$, vient de l'équation de la cinquième formule du second degré, dont les deux racines sont positives & imaginaires & égales, multipliée par une troisième racine négative, qui est le quotient exact de l'homogène du second degré divisé par son facteur.

$$x - 1 - \sqrt{-7} = 0.$$

$$xx - 1 + \sqrt{-7} = 0.$$

Donne $x^2 - 2x + 1 + 7 = 0.$

ou $x^2 - 2x + 8 = 0.$

$$xx + 4 = 0.$$

$$x^3 + 2x^2 + 0x + 32 = 0.$$

ou $x^3 + 2x^2 + 0x = -32.$

Les équations de cette formule sont impossibles , car soit $x = 4$, on aura par substitution & transposition $64 = 32 - 32$, ce qui est impossible & inutile , puisque le positif ne peut être égal au négatif pur & simple; ainsi les tables ne contiendront point cette formule.

La troisième formule $x^3 - 4x^2 \pm 0x = 72$, vient de l'équation $x^2 \mp 2x + 12 = 0$, qui est dans la sixième formule du second degré , dont les deux racines sont égales & imaginaires. — $1 \pm \sqrt{1-12}$, multipliée par une troisième racine positive 6 égale au quotient exact de l'homogène du second degré divisé par son facteur.

$$x \mp 1 \pm \sqrt{-11} = 0.$$

$$x x \mp 1 \pm \sqrt{-11} = 0.$$

$$x^2 \mp 2x \mp 1 \mp 11(\mp 12) = 0.$$

$$x^2 \mp 2x \mp 12 = 0.$$

$$x x - b = 0.$$

$$x^3 - 4x^2 \mp 12x - 72 = 0.$$

$$- 12x.$$

La quatrième formule $x^3 - ax^2 \pm 0x = -b^m$, vient de l'équation $x^2 - ax \mp b^n = 0$, qui est dans la quatrième formule du second degré , dont la grande racine est positive, qui est le quotient exact de l'homogène du second degré divisé par le facteur du second terme.

$$x - 8 = 0.$$

$$x x + 4 = 0.$$

$$x^2 - 4x - 32 = 0.$$

$$x x - 8 = 0.$$

$$x^3 - 12x^2 - 32x + 256 = 0.$$

$$+ 32x.$$

La quatrième table de la première espèce donne la première racine positive des équations qui sont dans la troisième formule $x^3 - a^1 x^2 \pm o'' x = b'''$, & dans la quatrième formule $x^3 - a^1 x^2 \pm o'' x = -b'''$, & la quatrième table de la seconde classe donne les trois racines de la troisième & de la quatrième formule.

Des formules de la seconde classe du troisième degré, où le second terme est évanoui.

Il y a quatre formules de la seconde espèce de la seconde classe du troisième degré, sont celles où le second terme manque.

La première formule est $x^3 \pm o x^2 \mp a'' x = b'''$, qui vient d'une équation du second degré dont les deux racines sont positives, égales & imaginaires, multipliée par une troisième racine négative & réelle égale à leur somme.

La cinquième table de la seconde espèce donne ces trois racines en détail pour chaque homogène de la première formule, on a mis aussi en tête la seconde formule, formule $x^3 \pm o x^2 \mp a'' x = -b'''$, pour laquelle elle peut servir; mais cette formule est inutile & impossible, car il est impossible que le positif du premier membre soit égal au négatif pur, & simple du second membre.

La

La cinquième table de la première espèce donne seulement la troisième racine réelle dans la première & dans la seconde formule de cette seconde espèce.

La troisième formule $x^3 \pm 0 x^2 - a'' x' = b'''$, vient d'une équation du second degré qui a deux racines négatives égales & imaginaires, multipliée par une racine positive réelle égale à leur somme; toutes les séries de ses homogènes sont finies, & arrivent à des zéros qu'on peut marquer avec des croix de St André dans les cellules de la sixième table de la première espèce, qui forment une diagonale interrompue comme par des espèces de degrés. Cette sixième table donne seulement la troisième racine réelle.

La sixième table de la seconde espèce contient deux feuilles, la première contient les homogènes qui ont trois racines rationnelles qui sont marquées à côté; la seconde feuille contient les trois racines des équations pures & simples du troisième degré, & celles de la troisième & de la quatrième formule de cette seconde espèce qui ont des racines imaginaires.

La quatrième formule $x^3 \pm 0 x^2 - a'' x' = -b'''$ vient d'une équation du second degré qui a deux racines négatives égales & irrationnelles, multipliée par une troisième racine positive égale à leur somme. Ces homogènes occupent la partie supérieure des tables, la sixième table de la première espèce donne la troisième racine: mais la table de la seconde espèce donne toutes les trois racines.

Des Formules de la troisième classe du troisième degré.

Il y a huit Formules dans la troisième classe du troisième degré.

$$1^{\text{re}}. x^3 + a^{\text{I}} x^2 + a^{\text{II}} x = b^{\text{III}}.$$

$$2^{\text{de}}. x^3 + a^{\text{I}} x^2 + a^{\text{II}} x = -b^{\text{III}}.$$

$$3^{\text{me}}. x^3 + a^{\text{I}} x^2 - a^{\text{II}} x = b^{\text{III}}.$$

$$4^{\text{me}}. x^3 + a^{\text{I}} x^2 - a^{\text{II}} x = -b^{\text{III}}.$$

$$5^{\text{me}}. x^3 - a^{\text{I}} x^2 + a^{\text{II}} x = b^{\text{III}}.$$

$$6^{\text{me}}. x^3 - a^{\text{I}} x^2 + a^{\text{II}} x = -b^{\text{III}}.$$

$$7^{\text{me}}. x^3 - a^{\text{I}} x^2 - a^{\text{II}} x = b^{\text{III}}.$$

$$8^{\text{me}}. x^3 - a^{\text{I}} x^2 - a^{\text{II}} x = -b^{\text{III}}.$$

Ce que nous avons dit suffit pour expliquer la Méthode.

Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail, il sera facile au lecteur de dresser lui-même des tables suivant chacune de ces formules, & de même dans tous les degrés supérieurs pour s'en servir dans le besoin, je me contenterai d'ajouter quelques tables des deux espèces différentes pour les formules de la troisième classe du troisième degré, avec deux tables des formules du cinquième degré, je ferois un trop gros volume si je voulois mettre toutes les recherches que j'ai faites sur ce sujet; il est bon de laisser au lecteur le plaisir de travailler par lui-même, & de suivre la route que j'ai re-

POUR LES EQUATIONS A L'INFINI. 51
 nuë aussi loin qu'il lui plaira , il ne me reste plus que de
 donner des moïens d'abrèger la construction des tables,
 pour les continuer promptement aussi loin qu'on voudra
 à l'infini , en quoi consiste la perfection de la Méthode,
 pour résoudre les équations dont l'homogène est un très-
 grand nombre , & dont chaque racine contient plusieurs
 chiffres.

Différentes Méthodes pour abrèger les Tables.

Il est évident que toutes les puissances des nombres
 de tous les degrez à l'infini , ont une dernière différence
 toujours égale & constante , laquelle a le même expo-
 sant que celui du degré de la puissance supposée ; ainsi
 la suite des secondes puissances des quarez naturels ,
 ont la seconde différence 2 constante. La suite des troi-
 sièmes puissances ou des cubes , ont leur troisième dif-
 férence 6 toujours égale & constante , pour trouver ces
 différences , il faut avoir trois termes dans le second de-
 gré , quatre termes dans le troisième degré ; c'est-à-dire,
 un terme de plus que l'exposant du degré proposé ne
 contient d'unitéz , ensuite écrire les mêmes termes au-
 dessous en les avançant d'un rang pour ôter le premier
 du second , & le second du troisième pour avoir les pre-
 mières différences , ensuite écrire les premières diffé-
 rences les unes sous les autres , en les avançant d'un
 rang pour ôter la première de la seconde , & ainsi de
 suite , pour avoir les secondes différences qui sont égales
 & constantes dans le second degré.

<i>Secondes puissances.</i>	1.	4.	9.	16.	25.	36, &c.
	ôtez	1.	4.	9.	16.	25, &c.
<hr/>						
<i>Premières différences.</i>		3.	5.	7.	9.	11, &c.
		ôtez	3.	5.	7.	9, &c.
<hr/>						
<i>Secondes différ. constantes.</i>			2.	2.	2.	2, &c.

G ij

Troisièmes puissan.	1.	8.	27.	64.	125,	&c.
	ôtez	1.	8.	27.	64,	&c.
Premières différences.		7.	19.	37.	61,	&c.
	ôtez		7.	19.	37,	&c.
Secondes différences.			12.	18.	24,	&c.
	ôtez			12.	18,	&c.
Troisième différence constante				6.	6,	&c.

Si au lieu de prendre ces mêmes puissances de suite , on les prend dans une progression quelconque , en faisant quelques termes de 3 en 3 , ou de 5 en 5 , ou de 8 en 8 , de 10 en 10 , &c. On pourra toujours trouver par la soustraction leur dernière différence égale & constante, qui sera la seconde différence dans le second degré, la troisième différence dans le troisième degré, la quatrième différence dans le quatrième degré, &c. Mais cette différence constante ne sera pas un même nombre , que celui qui se trouve dans la suite naturelle de ces puissances.

Il suit de-là que l'on pourra toujours continuer à l'infini la série d'une puissance quelconque , en opérant par l'addition de ses différences dans un sens contraire à la soustraction qui a donné leurs différences ; il suffit pour cela d'avoir la dernière différence constante , & pour la trouver , il ne faut qu'un seul terme de plus que l'exposant du degré : par ce moyen on formera les premières colonnes des tables pour résoudre les équations.

De même dans chaque degré il y a des séries infinies d'équations arithmétiquement semblables , lesquels ne diffèrent que dans leur dernier terme ou l'homogène seul , qui est la valeur de b , que nous considérons toujours avec un exposant (exprimé ou sous-entendu dans les tables) en chiffres italiques qui marque autant de dimensions que l'exposant du degré de l'équation con-

tient d'unitéz. Or dans chaque cas particulier ces homogènes forment une série infinie, & même dans quelques formules, ils ont d'abord une série finie qui arrive au zéro, après lequel commence la série infinie, & toutes ces séries d'homogènes compris dans les colonnes des tables, sont des progressions arithmétiques du même degré que l'équation, qui ont une dernière différence toujours égale & constante, qui a pour exposant celui du degré de l'équation, ce Théorème a été démontré par M^r. de Lagny dans les Mémoires de l'Académie des années 1705, & 1706. C'est sur le fondement que j'établis la construction & l'usage de mes tables, avec les différens moyens que je donne pour les abrégé, qui sont une démonstration sensible de cette vérité.

Premier moïen d'abrégé les Tables, en se servant pour les grands nombres des petites Tables, comme des plus grandes.

Je suppose qu'on ait seulement les petites tables imprimées de dix rangs horisontaux pour les valeurs de $x = 0$, jusqu'à $x = 10$. de $a = 0$, jusqu'à $a = 10$. pour trouver par leur moïen des équations exprimées par de grands nombres, il y a trois cas pour trouver tout d'un coup un terme très-éloigné.

Le premier cas est de le trouver promptement dans un rang horisontal.

Le second cas est de le trouver dans un rang vertical.

Le troisième cas est de trouver un terme très-éloigné, & dans un rang horisontal, & dans un rang vertical tout ensemble.

Premier cas pour trouver tout d'un coup un terme très-éloigné dans un rang horisontal déterminé, dans la troisième formule du second degré, par exemple, dans le neuvième rang horisontal, si on demande le nonante-

septième terme, je n'ai qu'à écrire simplement $a = 97$.

Dans les degrez supérieurs où il y a des a de plusieurs dimensions, on trouvera de même les valeurs de a , mais pour les valeurs de a'' , a''' , a^{iv} , a^v , &c. Il faut considérer la progression qui regne dans leur série exprimée dans la table où ils se trouvent, pour en prendre la différence & la multiplier par l'exposant du terme proposé, par exemple, pour avoir le nonante-septième de la série de a'' , dont la progression croit de 7 d'un terme au suivant, il faut multiplier par 7 l'exposant 97, qui marque le rang que doit occuper le terme proposé dans la série des a de deux dimensions, & le produit 679 donne $a'' = 679$, pour la valeur du terme proposé.

Pour avoir un homogène ou une valeur de b très-éloignée dans un rang horizontal déterminé, par exemple, le nonante-septième terme dans le huitième rang horizontal de la première table sur la troisième formule $x^8 + ax = b''$. (car dans toutes les tables il faut toujours que les b de l'échiquier aient autant de dimensions sous-entendues ou exprimées en chiffres romains, que l'exposant de la haute puissance de l'inconnue x contient d'unités.) Je considère la différence qui regne dans le rang horizontal est égale à la valeur de $x = 8$ du même rang. Ainsi je multiplie 8 par 97 exposant du terme proposé, le produit 776 est la valeur des 96 termes précédents, auxquels il faut ajouter le carré $x^2 = 64$, car le premier terme $a = 1$ donne pour le premier homogène $b'' = 72 = 8 + 64$. Or $776 + 64$ donne $b'' = 840$ qui est le nonante-septième homogène désiré.

Mais pour avoir le nonante-septième homogène dans la seconde table du second degré suivant la quatrième formule $x^2 + ax = b''$, comme les termes se trouvent

par soustraction à cause du signe moins de la formule, je multiplie l'exposant 8 du rang donné par 97, exposant du terme proposé, le produit est 776, dont j'ôte $x^2 = 64$, la somme $776 - 64 = 712$, donne pour le terme désiré $b'' = 712$. La raison en est évidente, puisqu'il y a deux séries, l'une finie qui arrive au zéro, l'autre infinie toujours croissante, suivant la quatrième formule le huitième rang, ou $x = 8$ ne croit de -8 qu'au dixième terme qui est $b'' = -8$, le neuvième est zéro, & le huitième est $b'' = 8$. Ainsi il faut retrancher pour ces huit termes le carré de 8 $= 64$.

Dans tout autre rang, il faut toujours retrancher le carré de la valeur de x prise dans le même rang, & qui est son exposant, car je ne compte point le premier rang de $x = 0$, qui n'est mis que par simple analogie seulement, & pour faire partir les séries verticales des homogènes du zéro, d'où partent toutes les grandeurs numériques, pour partir d'aussi loin qu'il est possible.

Le second cas, est pour trouver un ou plusieurs termes très-éloignés dans un rang vertical, chaque rang vertical ou colonne contient une série d'homogènes d'équations Arithmétiquelement semblables; c'est-à-dire, des équations qui ont les mêmes termes moïens avec les mêmes facteurs, & qui ne diffèrent uniquement que dans leur homogène seul, 2°. que tous ces homogènes sont du même degré que l'équation, par conséquent ils font une progression du même degré qui a une dernière différence toujours égale & constante, & dont l'exposant est celui du même degré, c'est la seconde différence dans le second degré, la troisième dans le troisième degré, &c.

Pour trouver un terme très-éloigné dans une colonne de la bordure qui est à gauche dans la première table

du second degré, si on demande le soixante-troisième terme de la première colonne, c'est cet exposant proposé qui donne lui-même $x = 63$; si on demande ce soixante-troisième terme dans la seconde colonne de x il faut élever 63 à la seconde puissance pour avoir $x^2 = 3969$ qui est le terme désiré.

Si on demande le nonante-septième homogène, dans une autre colonne déterminée par la valeur de a , comme $a = 3$, contenuë dans l'échiquier entre les valeurs de b^n ; c'est à-dire, le nonante-septième homogène dans la même table première, sur la troisième formule $x^2 + ax = b^n$, je cherche d'abord ce nonante-septième terme pour la bordure à gauche, j'ai pour la première colonne $x = 97$, & son quarré donne pour la seconde colonne $x^2 = 9409$, & opérant suivant la formule & substituant ces nombres, dans $x^2 + ax = b^n$, j'ai $9409 + 3 \times 97 = b^n$, qui donne $9700 = b^n$, c'est le nonante-septième homogène désiré.

Pour avoir de suite plusieurs homogènes très-éloignez dans une même colonne, il faut d'abord en trouver plusieurs de suite; Sçavoir, un de plus que l'exposant du degré, afin de trouver leurs différences pour la soustraction expliquée ci-dessus, & on continuëra leur série aussi loin qu'on voudra par l'addition de leurs différences trouvées.

Par exemple. J'ai trois homogènes dans la troisième formule du second degré $x^2 + ax = b^n$; Sçavoir, 595, 648, 703, dans une même colonne de $a = 18$. Je trouverai la série entière par l'addition de leurs différences comme il suit.

valeurs

Valeurs de $x =$	17.	18.	17.	20.	21.	22,&c.
Valeurs de $x^2 =$	595.	648.	703.	760.	819.	880,&c.
	ôtez	595.	648.	703.	760.	819,&c.
Première différence.	53.	55.	57.	59.	61,&c.	
	ôtez	53.	55.	57.	59,&c.	
Seconde différence constante.	2.	2.	2.	2.	2,&c.	

Le troisième cas ne renferme aucune difficulté, puisqu'il contient les deux premiers que nous venons d'expliquer.

Deuxième moyen d'abrégé les Tables afin d'employer les petites Tables pour les grands nombres.

Le moyen le plus court & le plus simple est de faire des petites tables qui puissent servir pour de grands nombres, & de substituer dans la formule qui sert à construire chaque table les nombres premiers, au lieu de la suite ordinaire des nombres naturels, & d'écrire dans les bordures en haut & à gauche la suite de ces nombres premiers tels qu'ils suivent. 1. 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. 61. 67. 71. 73. 79. 83. 89. 97. 101. &c. Il sera facile par ce moyen d'avoir les autres nombres moindres compris dans leur interval qui ne sont point ici, puisqu'ils sont des multiples de quelque nombre premier qui les précède.

On peut aussi employer la suite des nombres naturels dans l'une des bordures, & la suite des nombres premiers dans l'autre bordure lorsque l'on voudra des tables plus amples.

Lorsqu'on veut des tables pour des grands nombres, on peut d'abord substituer 100, ou 1000, ou tout autre nombre plus grand dans la formule au lieu de 1, 2, 3, &c.

Analyse.

H

que nous avons substitué pour former les petites tables. Ce qui est facile, & ce qui ne demande pas un plus grand détail.

Troisième moïen d'abrégé les Tables.

On peut encore pour abrégé la construction des tables sauter plusieurs termes de 3 en 3, ou de 5 en 5, ou dans telle autre progression que l'on voudra.

Quatrième moïen en réduisant l'Equation à ses moindres termes.

Lorsqu'une Equation est proposée en grands nombres, dans le second degré, j'ôte du second terme le plus grand nombre possible, & j'ôte le quarré du même nombre de son homogène, & par ce moïen je réduis l'équation à de très petits nombres, de sorte que je peux la résoudre par de très-petites tables.

Dans le troisième degré j'ôte la troisième puissance d'un nombre, & j'ôte les puissances inférieures du même nombre des coefficients ou facteurs des termes moïens, chacun suivant le nombre de ses dimensions, pour réduire l'équation à sa plus simple expression, & aux moindres nombres, afin de pouvoir la résoudre par de petites tables; mais après avoir trouvé la racine, il faut l'augmenter de la racine qui a été retranchée, & par ce moïen on pourra se servir facilement des petites tables pour les grands nombres: mais le lecteur trouvera toujours beaucoup à profiter en continuant d'abord assez loin les tables pour considérer dans le détail leurs progressions, qui sont une source très-abondante de Theorèmes & de Problèmes que je supprime ici pour abrégé ce Traité; on tirera même plusieurs Méthodes générales pour résoudre les équations de tous les degrez à l'infini, par exemple. Dans le

second degré la valeur de a est toujours le diviseur exact de l'homogène, il contient toujours deux puissances de a qui diffèrent de la valeur de a , ce qui donne une méthode simple & facile pour résoudre les équations affectées de termes moïens dans le second degré.

Par exemple. Soit une équation quelconque dans la quatrième formule du second degré $x^2 - ax = b''$, soit $a = 7$. la série des homogènes ou des valeurs de b'' dans cette colonne est double l'une finie, & l'autre infinie; la série finie est 0. 6. 10. 12. 10. 6. 0. & la série infinie qui commence après le zéro est 8. 18. 30. 44. 60. 68. 98. 120. 144. 170. 198. 228. &c.

Le premier homogène 6. dans la série infinie a pour racine deux puissances de $a = 7$, dont la différence est $a = 7$. la première racine est $1 = 7 \times 1 - 6$. la seconde est $6 = 7 \times 1 - 1$. Le second homogène 10, a pour racines 2 & 5. Or $2 = 7 \times 1 - 5$ & $5 = 7 \times 1 - 2$.

De même dans la série infinie l'homogène 8, a pour racines 8 & 1. Or $8 = 7 \times 1 + 1$, & $1 = 7 \times 1 - 6$.

Dans l'homogène 18 ses racines sont $+ 2$ & $- 9$. Or $2 = 7 \times 1 - 5$ & $9 = 7 \times 1 + 2$.

Dans l'homogène 228. les racines sont $+ 12$ & $- 19$. Or $12 = 7 \times 2 - 2$, & $19 = 7 \times 2 + 5$.

Ce qui montre évidemment que les racines de l'homogène sont deux puissances semblables de a , dont la différence l'une positive & l'autre négative font toujours une somme égale à la valeur déterminée de $a = 7$ dans ce cas particulier,

Il seroit à désirer qu'on pût trouver une Méthode aussi simple pour tous les degrez supérieurs; je l'ai tenté, mais il mereste encore des difficultez à surmonter pour la rendre générale pour tous les degrez supérieurs à l'infini.

Suivent les Tables pour la Résolution des Equations de tous les degrez à l'infini. J'en ai mis seulement 25 pour servir d'exemples pour en dresser de semblables.

Pour le second degré, il y a quatre tables, deux de la première, & deux de la seconde espèce.

Pour le troisième degré, il y a dix-neuf tables, & on peut augmenter leur nombre, & mettre à part les Equations qui ont des racines imaginaires d'un côté, & de l'autre celles dont les racines sont réelles, comme on le voit dans la sixième table qui a trois feuilles, la première est pour la première espèce des tables, mais la seconde espèce des tables a deux feuilles, l'une pour les racines réelles, l'autre pour les racines imaginaires.

La seconde classe du troisième degré a cinq tables, la troisième classe en a dix, dont la formation est évidente. Les deux dernières tables sont pour la seconde classe du cinquième degré; on pourra en construire de même pour toutes les formules de tous les degrez à l'infini.

Première Table

Première Table de
la 1^{re} espèce.

Pour les formules.

$$\left. \begin{array}{l} 1^{\text{re}} x^2 = b'. \\ 2^{\text{de}} x^2 + a'x' = b''. \\ 3^{\text{e}} x^2 + a'x' = b'' \dots \end{array} \right\}$$

2 ^d . degré.		a=0	a=1	a=2	a=3	a=4
x=0	x²=0	b=0	b=0	b=0	b=0	b=0
x=1	x²=1	b=1	b=2	b=3	b=4	b=5
x=2	x²=4	b=4	b=6	b=8	b=10	b=12
x=3	x²=9	b=9	b=12	b=15	b=18	b=21
x=4	x²=16	b=16	b=20	b=24	b=28	b=32
x=5	x²=25	b=25	b=30	b=35	b=40	b=45
x=6	x²=36	b=36	b=42	b=48	b=54	b=60
x=7	x²=49	b=49	b=56	b=63	b=70	b=77
x=8	x²=64	b=64	b=72	b=80	b=88	b=96
x=9	x²=81	b=81	b=90	b=99	b=108	b=117
x=10	x²=100	b=100	b=110	b=120	b=130	b=140
x=11	x²=121	b=121	b=132	b=143	b=154	b=165
x=12	x²=144	b=144	b=156	b=168	b=180	b=192
x=13	x²=169	b=169	b=182	b=195	b=208	b=221
x=14	x²=196	b=196	b=210	b=224	b=238	b=252

Analysé.

I^{re} Table de la
2^{de} espèce.

Pour les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 0x = +b'' \\ x^2 + ax = b'' \\ x^2 + ax = -b'' \end{array} \right\}$$

2 ^d . degré.		a=0	a=1	a=2	a=3	a=4
x=0	x=0	b=0	b=0	b=0	b=0	b=0
x=1	x-1	b=1 x-1	b=2 x-2	b=3 x-3	b=4 x-4	b=5 x-5
x=2	x-2	b=4 x-2	b=6 x-3	b=8 x-4	b=10 x-5	b=12 x-6
3	x-3	b=9 -3	b=12 -4	b=15 -5	b=18 -6	b=21 -7
4	x-4	b=16 -4	b=20 -5	b=24 -6	b=28 -7	b=32 -8
5x	-5	b=25 -5	b=30 -6	b=35 -7	b=40 -8	b=45 -9
6x	-6	b=36 -6	b=42 -7	b=48 -8	b=54 -9	b=60 -10
7x	-7	b=49 -7	b=56 -8	b=63 -9	b=70 -10	b=77 -11
8x	-8	b=64 -8	b=72 -9	b=80 -10	b=88 -11	b=96 -12
9x	-9	b=81 -9	b=90 -10	b=99 -11	b=108 -12	b=117 -13
10x	-10	b=100 -10	b=110 -11	b=120 -12	b=130 -13	b=140 -14

. Equations pures & simples 1^{re} classe.

. 2^{de} classe Equations réelles rationnelles.

$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$	$a=11$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=6$ $x-6$	$b=7$ $x-7$	$b=8$ $x-8$	$b=9$ $x-9$	$b=10$ $x=10$	$b=11$ $x-11$	$b=12$ $x-12$
$b=14$ $x-7$	$b=16$ $x-8$	$b=18$ $x-9$	$b=20$ $x-10$	$b=22$ $x-11$	$b=24$ $x-12$	$b=26$ $x-13$
$b=24$ -8	$b=27$ -9	$b=30$ -10	$b=33$ -11	$b=36$ -12	$b=39$ -13	$b=42$ -14
$b=36$ -9	$b=40$ -10	$b=44$ -11	$b=48$ -12	$b=52$ -13	$b=56$ -14	$b=60$ -15
$b=50$ -10	$b=55$ -11	$b=60$ -12	$b=65$ -13	$b=70$ -14	$b=75$ -15	$b=80$ -16
$b=66$ -11	$b=72$ -12	$b=78$ -13	$b=84$ -14	$b=90$ -15	$b=96$ -16	$b=102$ -17
$b=84$ -12	$b=91$ -13	$b=98$ -14	$b=105$ -15	$b=112$ -16	$b=119$ -17	$b=126$ -18
$b=104$ -13	$b=112$ -14	$b=120$ -15	$b=128$ -16	$b=136$ -17	$b=144$ -18	$b=152$ -19
$b=126$ -14	$b=135$ -15	$b=144$ -16	$b=153$ -17	$b=162$ -18	$b=171$ -19	$b=180$ -20
$b=150$ -15	$b=160$ -16	$b=170$ -17	$b=180$ -18	$b=190$ -19	$b=200$ -20	$b=210$ -21

a ij

2^{de} Table de la Pour les formules
 1^{re} espèce. 1^{re} classe $x^2 = b''$ 2^{de} formule . .

2 ^d . degré.						
		$a=0$	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$
$x=0$	$x^2=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$b=1$	$b=0$	$b=-1$	$b=-2$	$b=-3$
$x=2$	$x^2=4$	$b=4$	$b=2$	$b=0$	$b=-2$	$b=-4$
$x=3$	$x^2=9$	$b=9$	$b=6$	$b=3$	$b=0$	$b=-3$
$x=4$	$x^2=16$	$b=16$	$b=12$	$b=8$	$b=4$	$b=0$
$x=5$	$x^2=25$	$b=25$	$b=20$	$b=15$	$b=10$	$b=5$
$x=6$	$x^2=36$	$b=36$	$b=30$	$b=24$	$b=18$	$b=12$
$x=7$	$x^2=49$	$b=49$	$b=42$	$b=35$	$b=28$	$b=21$
$x=8$	$x^2=64$	$b=64$	$b=56$	$b=48$	$b=40$	$b=32$
$x=9$	$x^2=81$	$b=81$	$b=72$	$b=63$	$b=54$	$b=45$
$x=10$	$x^2=100$	$b=100$	$b=90$	$b=80$	$b=70$	$b=60$

... 2^{de} classe $\left\{ \begin{array}{l} x^2 - a'x' = b''... \quad 4^{\text{e}} \text{ formule.} \\ x^2 - a'x' = -b''... \quad 5^{\text{e}} \text{ formule.} \\ x^2 + a'x' = -b''... \quad 6^{\text{e}} \text{ formule.} \end{array} \right.$

$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$	$a=11$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-4$	$b=-5$	$b=-6$	$b=-7$	$b=-8$	$b=-9$	$b=-10$
$b=-6$	$b=-8$	$b=-10$	$b=-12$	$b=-14$	$b=-16$	$b=-18$
$b=-6$	$b=-9$	$b=-12$	$b=-15$	$b=-18$	$b=-21$	$b=-24$
$b=-4$	$b=-8$	$b=-12$	$b=-16$	$b=-20$	$b=-24$	$b=-28$
$b=0$	$b=-5$	$b=-10$	$b=-15$	$b=-20$	$b=-25$	$b=-30$
$b=6$	$b=0$	$b=-6$	$b=-12$	$b=-18$	$b=-24$	$b=-30$
$b=14$	$b=7$	$b=0$	$b=-7$	$b=-14$	$b=-21$	$b=-28$
$b=24$	$b=16$	$b=8$	$b=0$	$b=-8$	$b=-16$	$b=-24$
$b=36$	$b=27$	$b=18$	$b=9$	$b=0$	$b=-9$	$b=-18$
$b=50$	$b=40$	$b=30$	$b=20$	$b=10$	$b=0$	$b=-10$

a ij

2^{de} Table de la
2^{de} espèce.

Pour les formules $x^2 + ax = -b'''$

2 ^d . degré.		a=0	a=1	a=2
x=0	x ² =0	b=0	b=0	b=0
x=1	x ² =1	$b=1$ $\pm\sqrt{-1}$	b=0	$b=-1$ -1×-1
x=2	x ² =4	$b=4$ $\pm\sqrt{-4}$	$b=2$ $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-2}$	b=0
x=3	x ² =9	$b=9$ $\pm\sqrt{-9}$	$b=6$ $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-6}$	$b=3$ $1 \pm \sqrt{1-3}$
x=4	x ² =16	$b=16$ $\pm\sqrt{-16}$	$b=12$ $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-12}$	b=8 $1 \pm \sqrt{1-8}$
x=5	x ² =25	$b=25$ $\pm\sqrt{-25}$	$b=20$ $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-20}$	$b=15$ $1 \pm \sqrt{1-15}$
x=6	x ² =36	$b=36$ $\pm\sqrt{-36}$	$b=30$ $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-30}$	$b=24$ $1 \pm \sqrt{1-24}$
x=7	x ² =49	$b=49$ $\pm\sqrt{-49}$	$b=42$ $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-42}$	$b=35$ $1 \pm \sqrt{1-35}$
x=8	x ² =64	$b=64$ $\pm\sqrt{-64}$	$b=56$ $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-56}$	$b=48$ $1 \pm \sqrt{1-48}$
x=9	x ² =81	$b=81$ $\pm\sqrt{-81}$	$b=72$ $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-72}$	$b=63$ $1 \pm \sqrt{1-63}$

2^{de} classe $\begin{cases} x^2 - ax = b'' \dots 4^e \text{ formule.} \\ x^2 - ax = -b''' \dots 5^e \text{ formule.} \\ x^2 + ax = -b''' \dots 6^e \text{ formule.} \end{cases}$

$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-2$ -1×-2	$b=-3$ -1×-3	$b=-4$ -1×-4	$b=-5$ -1×-5	$b=-6$ -1×-6
$b=-2$ -1×-2	$b=-4$ -2×-2	$b=-6$ -2×-3	$b=-8$ -2×-4	$b=-10$ -2×-5
$b=0$	$b=-3$ -1×-3	$b=-6$ -2×-3	$b=-9$ -3×-3	$b=-12$ -3×-4
$b=4$ $1\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4}}$ -4	$b=0$	$b=-4$ -1×-4	$b=-8$ -2×-4	$b=-12$ -3×-4
$b=10$	$b=5$ $2 + \sqrt{4-5}$	$b=0$	$b=-5$ -1×-5	$b=-10$ -2×-5
$b=18$	$b=12$ $2 + \sqrt{4-12}$	$b=6$ $2\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4}}$ -6	$b=0$	$b=-6$ -1×-6
$b=28$	$b=21$ $2 + \sqrt{4-21}$	$b=24$	$b=7$ $3 + \sqrt{9-7}$	$b=0$
$b=40$	$b=32$ $2 + \sqrt{4-32}$	$b=24$	$b=16$ $3 + \sqrt{9-16}$	$b=8$ $3\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4}-8}$
$b=54$	$b=45$ $2 + \sqrt{4-45}$	$b=36$	$b=27$ $3 + \sqrt{9-27}$	$b=18$

3^e Table de la
1^{re} espèce.

$$\begin{cases} x^3 + a'x^2 + 0''x' = b''' \dots\dots\dots \\ x^3 + a'x^2 + 0''x' = -b''' \dots\dots\dots \end{cases}$$

3^e. degré.

			$a'=0$ $a''=0$	$a'=1$ <i>constant</i>	$a'=2$	$a'=3$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=12$	$b=16$	$b=20$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=36$	$b=45$	$b=54$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=80$	$b=96$	$b=112$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=150$	$b=175$	$b=200$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=252$	$b=288$	$b=324$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=392$	$b=441$	$b=490$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=576$	$b=640$	$b=704$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=810$	$b=891$	$b=972$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=1100$	$b=1200$	$b=1300$

..... formule

..... 1^{re} formule.
 2^{de} formule.

$a'=4$	$a'=5$	$a'=6$	$a'=7$	$a'=8$	$a'=9$	$a'=10$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=5$	$b=6$	$b=7$	$b=8$	$b=9$	$b=10$	$b=11$
$b=24$	$b=28$	$b=32$	$b=36$	$b=40$	$b=44$	$b=48$
$b=63$	$b=72$	$b=81$	$b=90$	$b=99$	$b=108$	$b=117$
$b=128$	$b=144$	$b=160$	$b=176$	$b=192$	$b=208$	$b=224$
$b=225$	$b=250$	$b=275$	$b=300$	$b=325$	$b=350$	$b=375$
$b=360$	$b=396$	$b=432$	$b=468$	$b=504$	$b=540$	$b=576$
$b=539$	$b=588$	$b=637$	$b=686$	$b=735$	$b=784$	$b=833$
$b=768$	$b=832$	$b=896$	$b=960$	$b=1024$	$b=1088$	$b=1152$
$b=1053$	$b=1134$	$b=1215$	$b=1296$	$b=1377$	$b=1458$	$b=1539$
$b=1400$	$b=1500$	$b=1600$	$b=1700$	$b=1800$	$b=1900$	$b=2000$

Analyse

b

3^e Table de la
2^{de} espèce.

Pour les formules $\begin{cases} x^3 + a'x^2 + o''x' = b''' \\ x^3 + a'x^2 + o''x' = -b''' \end{cases}$

3 ^e . degré.	$a' = 1$ $a = 0$: <i>constant</i>	$a' = 2$
$x = 0$	$b = 0$	$b = 0$
$x = 1$	$b = 2$ $-1 + \sqrt{\frac{1}{4}} - 2 \times 1$	$b = 3$ $-1 + \sqrt{1} - 3 \times 1$
$x = 2$	$b = 12$ $-1\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4}} - 6 \times 2$	$b = 16$ $1 - \frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4}} - 8 \times 2$
$x = 3$	$b = 36$ $-2 + \sqrt{4} - 12 \times 3$	$b = 45$ $-2 + \sqrt{4} - 15 \times 3$
$x = 4$	$b = 80$ $-2\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4}} - 20 \times 4$	$b = 96$ $-2\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4}} - 24 \times 4$
$x = 5$	$b = 150$ $-3 + \sqrt{9} - 30 \times 5$	$b = 175$ $-3 + \sqrt{9} - 35 \times 5$
$x = 6$	$b = 252$ $-3\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4}} - 42 \times 6$	$b = 288$ $-3\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4}} - 48 \times 6$
$x = 7$	$b = 392$ $-4 + \sqrt{16} - 56 \times 7$	$b = 441$ $-4 + \sqrt{16} - 63 \times 7$
$x = 8$	$b = 576$ $-4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{1}{4}} - 72 \times 8$	$b = 640$ $-4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{1}{4}} - 80 \times 8$
$x = 9$	$b = 810$ $-5 + \sqrt{25} - 90 \times 9$	$b = 891$ $-5 + \sqrt{25} - 99 \times 9$
$x = 10$	$b = 1100$ $-5\frac{1}{2} + \sqrt{30\frac{1}{4}} - 110 \times 10$	$b = 1200$ $-5\frac{1}{2} + \sqrt{30\frac{1}{4}} - 120 \times 10$

$$\dots \dots \dots \begin{cases} x^3 + a'x^2 + o''x' = b''' \\ x^3 + a'x^2 + o''x' = -b''' \end{cases}$$

$a^1=3$	$a^1=4$	$\phi c.$
$b=0$	$b=0$	$\phi c.$
$b=4$ $-1+\sqrt{1-4} \times 1$	$b=5$ $-1+\sqrt{1-5} \times 1$	$\phi c.$
$b=20$ $-1\frac{1}{2}+\sqrt{2\frac{1}{4}-10} \times 2$	$b=24$ $-1\frac{1}{2}+\sqrt{2\frac{1}{4}-12} \times 2$	$\phi c.$
$b=54$ $-2+\sqrt{4-18} \times 3$	$b=63$ $-2+\sqrt{4-21} \times 3$	$\phi c.$
$b=112$ $-2\frac{1}{2}+\sqrt{6\frac{1}{4}-28} \times 4$	$b=128$ $-2\frac{1}{2}+\sqrt{6\frac{1}{4}-32} \times 4$	$\phi c.$
$b=200$ $-3+\sqrt{9-40} \times 5$	$b=225$ $-3+\sqrt{9-45} \times 5$	$\phi c.$
$b=324$ $-3\frac{1}{2}+\sqrt{12\frac{1}{4}-54} \times 6$	$b=360$ $-3\frac{1}{2}+\sqrt{12\frac{1}{4}-60} \times 6$	$\phi c.$
$b=490$ $-4+\sqrt{16-70} \times 7$	$b=539$ $-4+\sqrt{16-77} \times 7$	$\phi c.$
$b=704$ $-4\frac{1}{4}+\sqrt{20\frac{1}{4}-88} \times 8$	$b=768$ $-5\frac{1}{2}+\sqrt{20\frac{1}{4}-96} \times 8$	$\phi c.$
$b=972$ $-5+\sqrt{25-108} \times 9$	$b=1053$ $-5+\sqrt{25-117} \times 9$	$\phi c.$
$b=1306$ $-5\frac{1}{2}+\sqrt{30\frac{1}{2}-130} \times 10$	$b=1400$ $-5\frac{1}{2}+\sqrt{30\frac{1}{2}-140} \times 10$	$\phi c.$

bij

4^e Table de la 1^{re} espèce. Pour les formules de la 2^e classe $\begin{cases} x^3 - a'x^2 + a''x' = b''' \\ x^3 - a'x^2 + a''x' = -b''' \end{cases} \dots$

3 ^e degré.			$a' = 0$ $a'' = 0$	$a' = 1$ <i>constant.</i>	$a' = 2$
$x = 0$	$x^2 = 0$	$x^3 = 0$	$b = 0$	$b = 0$	$b = 0$
$x = 1$	$x^2 = 1$	$x^3 = 1$	$b = 1$	$b = 0$	$b = -1$
$x = 2$	$x^2 = 4$	$x^3 = 8$	$b = 8$	$b = 4$	$b = 0$
$x = 3$	$x^2 = 9$	$x^3 = 27$	$b = 27$	$b = 18$	$b = 9$
$x = 4$	$x^2 = 16$	$x^3 = 64$	$b = 64$	$b = 48$	$b = 32$
$x = 5$	$x^2 = 25$	$x^3 = 125$	$b = 125$	$b = 100$	$b = 75$
$x = 6$	$x^2 = 36$	$x^3 = 216$	$b = 216$	$b = 180$	$b = 144$
$x = 7$	$x^2 = 49$	$x^3 = 343$	$b = 343$	$b = 294$	$b = 245$
$x = 8$	$x^2 = 64$	$x^3 = 512$	$b = 512$	$b = 448$	$b = 384$
$x = 9$	$x^2 = 81$	$x^3 = 729$	$b = 729$	$b = 648$	$b = 567$
$x = 10$	$x^2 = 100$	$x = 1000$	$b = 1000$	$b = 900$	$b = 800$

. . 1^{re} classe $x^3 = b'''$ 2^{de} classe $\begin{cases} x^3 - a'x^2 + a''x' = b''' \\ x^3 - a'x^2 + a''x' = -b''' \end{cases}$

$a'=3$	$a'=4$	$a'=5$	$a'=6$	$a'=7$	$a'=8$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-2$	$b=-3$	$b=-4$	$b=-5$	$b=-6$	$b=-7$
$b=-4$	$b=-8$	$b=-12$	$b=-16$	$b=-20$	$b=-24$
$b=0$	$b=-9$	$b=-18$	$b=-27$	$b=-36$	$b=-45$
$b=16$	$b=0$	$b=-16$	$b=-32$	$b=-48$	$b=-64$
$b=50$	$b=25$	$b=0$	$b=-25$	$b=-50$	$b=-75$
$b=108$	$b=72$	$b=36$	$b=0$	$b=-36$	$b=-72$
$b=196$	$b=147$	$b=98$	$b=49$	$b=0$	$b=-49$
$b=320$	$b=256$	$b=192$	$b=128$	$b=64$	$b=0$
$b=486$	$b=405$	$b=324$	$b=243$	$b=162$	$b=81$
$b=700$	$b=600$	$b=500$	$b=400$	$b=300$	$b=200$

b iij

4^e Table de la
2^{de} espèce.

Pour les formules $\begin{cases} x^3 - a'x^2 + o''x' = b''' \\ x^3 - a'x^2 + o''x' = -b''' \end{cases}$

3 ^e degré.	$a' = 0$ <i>constante</i> $a^2 = 0$	$a^2 = 1$
$x = 1$	$b = 1$ $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} - 1 \times 1$	$b = 0$
$x = 2$	$b = 8$ $-1 + \sqrt{1 - 4 \times 2}$	$b = 4$ $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} - 2 \times 2$
$x = 3$	$b = 27$ $-1\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4}} - 9 \times 3$	$b = 18$ $-1 + \sqrt{1 - 6 \times 3}$
$x = 4$	$b = 64$ $-2 + \sqrt{4 - 16 \times 4}$	$b = 48$ $-1\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4}} - 12 \times 4$
$x = 5$	$b = 125$ $-2\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4}} - 25 \times 5$	$b = 100$ $-2 + \sqrt{4 - 20 \times 5}$
$x = 6$	$b = 216$ $-3 + \sqrt{9 - 36 \times 6}$	$b = 180$ $-2\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} - 30 \times 6$
$x = 7$	$b = 343$ $-3\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4}} - 49 \times 7$	$b = 294$ $-3 + \sqrt{9 - 42 \times 7}$
$x = 8$	$b = 512$ $-4 + \sqrt{16 - 64 \times 8}$	$b = 448$ $-3\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4}} - 56 \times 8$
$x = 9$	$b = 729$ $-4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{1}{4}} - 81 \times 9$	$b = 648$ $-4 + \sqrt{16 - 72 \times 9}$
$x = 10$	$b = 10.00.$ $-5 + \sqrt{25 - 100 \times 10.}$	$b = 900$ $-4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{1}{4}} - 90 \times 10$
$x = 11$	$b = 1331$ $-5\frac{1}{2} + \sqrt{30\frac{1}{4}} - 121 \times 11$	$b = 1210$ $-5 + \sqrt{25 - 110 \times 11}$

∴ . . . & pour l'Equation pure & simple $x^3 = b$ '''

$a^3=2$	$a^3=3$	etc.
$b=-1$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 1 \times 1$	$b=-2$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 2 \times 1$	etc.
$b=0$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 2 \times 0$	$b=-4$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} + 2 \times 2$	etc.
$b=9$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 3 \times 3$	$b=0$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 2 \times \frac{1}{2} \times 0$	etc.
$b=32$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 8 \times 4$	$b=16$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 4 \times 4$	etc.
$b=75$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 15 \times 5$	$b=50$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 10 \times 5$	etc.
$b=144$ $-2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 24 \times 6$	$b=108$ $-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 18 \times 6$	etc.
$b=245$ $-2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 35 \times 7$	$b=196$ $-2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} - 28 \times 7$	etc.
$b=384$ $-3 \pm \sqrt{\frac{1}{9}} - 48 \times 8$	$b=320$ $-2 \pm \sqrt{\frac{1}{64}} - 40 \times 8$	etc.
$b=567$ $-3 \pm \sqrt{\frac{1}{124}} - 63 \times 9$	$b=486$ $-3 \pm \sqrt{\frac{1}{9}} - 54 \times 9$	etc.
$b=800$ $-4 \pm \sqrt{\frac{1}{16}} - 80 \times 10$	$b=700$ $-3 \pm \sqrt{\frac{1}{124}} - 70 \times 10$	etc.
$b=1089$ $-4 \pm \sqrt{\frac{1}{204}} - 99 \times 11$	$b=68$ $-4 \pm \sqrt{\frac{1}{16}} - 88 \times 11$	etc.

5^e Table de la
1^{re} espèce.

{ Pour les formules { $x^3 = b'''$
1^{re} classe { $x^3 = b''$. . .

3^e. degré.

			$a=0$ $a^2=0$	<i>constants</i> $a^2=1$	$a^3=2$	$a^2=3$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=10$	$b=12$	$b=14$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=30$	$b=33$	$b=36$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=68$	$b=72$	$b=76$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=130$	$b=135$	$b=140$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=222$	$b=228$	$b=234$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=350$	$b=357$	$b=364$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=520$	$b=528$	$b=536$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=738$	$b=747$	$b=756$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=1010$	$b=1020$	$b=1030$

2^{de} classe

. 2^{de} classe $\begin{cases} x^3 + 0x^2 + a''x = b''' \\ x^3 + 0x^2 + a''x = -b''' \end{cases}$

$a^2=4$	$a^2=5$	$a^2=6$	$a^2=7$	$a^2=8$	$a^2=9$	$a^2=10$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=5$	$b=6$	$b=7$	$b=8$	$b=9$	$b=10$	$b=11$
$b=16$	$b=18$	$b=20$	$b=22$	$b=24$	$b=26$	$b=28$
$b=39$	$b=42$	$b=45$	$b=48$	$b=51$	$b=54$	$b=57$
$b=80$	$b=84$	$b=88$	$b=92$	$b=96$	$b=100$	$b=104$
$b=145$	$b=150$	$b=155$	$b=160$	$b=165$	$b=170$	$b=175$
$b=240$	$b=246$	$b=252$	$b=258$	$b=264$	$b=270$	$b=276$
$b=371$	$b=378$	$b=385$	$b=392$	$b=399$	$b=406$	$b=413$
$b=544$	$b=552$	$b=560$	$b=568$	$b=576$	$b=584$	$b=592$
$b=765$	$b=774$	$b=783$	$b=792$	$b=800$	$b=809$	$b=818$
$b=1040$	$b=1050$	$b=1060$	$b=1070$	$b=1080$	$b=1090$	$b=1100$

Analyse.

c

5^e Table de la
2^{de} espèce.

Pour les formules
2^{de} classe.

$$\begin{cases} x^3 + 0x^2 + a''x' = b''' \\ x^3 + 0x^2 + a''x' = -b''' \end{cases}$$

3 ^e . degré.	a=1	a=2
x=0	b=0	b=0
x=1	$b=2$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-1\frac{3}{4}} \times 1$	$b=3$ $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-2\frac{1}{4}} \times 1$
x=2	$b=10$ $-1 \pm \sqrt{-4} \times 2$	$b=12$ $-1 \pm \sqrt{-5} \times 2$
x=3	$b=30$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4}-10} \times 3$	$b=33$ $-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4}-11} \times 3$
x=4	$b=68$ $-2 \pm \sqrt{4-17} \times 4$	$b=72$ $-2 \pm \sqrt{4-18} \times 4$
x=5	$b=139$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}-26} \times 5$	$b=135$ $-2\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}-27} \times 5$
x=6	$b=222$ $-3 \pm \sqrt{9-37} \times 6$	$b=228$ $-3 \pm \sqrt{9-38} \times 6$
x=7	$b=350$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}-50} \times 7$	$b=357$ $-3\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}-51} \times 7$
x=8	$b=520$ $-4 \pm \sqrt{16-65} \times 8$	$b=528$ $-4 \pm \sqrt{16-66} \times 8$
x=9	$b=738$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4}-82} \times 9$	$b=747$ $-4\frac{1}{2} \pm \sqrt{20\frac{1}{4}-83} \times 9$
x=10	$b=1010$ $-5 \pm \sqrt{25-101} \times 10$	$b=1020$ $-5 \pm \sqrt{25-102} \times 10$

1^{re} formule. { Equations rationnelles imaginaires du 3^e degré.
 2^{de} formule.

$a=3$	$a=4$	ϕ .
$b=0$	$b=0$	ϕ .
$b=4$ $-\frac{1}{2} + \sqrt{-3\frac{1}{4}} \times 1$	$b=5$ $-\frac{1}{2} + \sqrt{-4\frac{1}{4}} \times 1$	ϕ .
$b=14$ $-1 + \sqrt{-6} \times 2$	$b=16$ $-1 + \sqrt{-7} \times 2$	ϕ .
$b=16$ $-1\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4}} - 2 \times 3$	$b=39$ $-1\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{3} \times 3$	ϕ .
$b=76$ $-2 + \sqrt{4-19} \times 4$	$b=80$ $-2 + \sqrt{4-20} \times 4$	ϕ .
$b=110$ $-2\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4}} - 28 \times 5$	$b=145$ $-2\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4}} - 29 \times 5$	ϕ .
$b=234$ $-3 + \sqrt{9-39} \times 6$	$b=240$ $-3 + \sqrt{9-40} \times 6$	ϕ .
$b=364$ $-3\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4}} - 52 \times 7$	$b=371$ $-3\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4}} - 53 \times 7$	ϕ .
$b=536$ $-4 + \sqrt{16-67} \times 8$	$b=544$ $-4 + \sqrt{16-68} \times 8$	ϕ .
$b=756$ $-4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{1}{4}} - 84 \times 9$	$b=765$ $-4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{1}{4}} - 85 \times 9$	ϕ .
$b=1030$ $-5 + \sqrt{25-103} \times 10$	$b=1040$ $-5 + \sqrt{25-104} \times 10$	ϕ .

6^e Table de la 1^{re} espèce. { Pour les formules. { $x^3 = b''' \dots$
1^{re} & 2^{de} classe. { 1^{ere} classe. { $x^3 = -b''' \dots$

3 ^e degré.			$a=0$ $a^2=0$	$a=0$ $a^2=1$	constant, $a^2=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=0$	$b=-1$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=6$	$b=4$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=24$	$b=21$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=60$	$b=56$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=120$	$b=115$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=210$	$b=204$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=336$	$b=329$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=504$	$b=496$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=720$	$b=711$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=990$	$b=980$

. 2^{de} classe $\begin{cases} x^3 + 0x^2 - a''x = b''' \\ x^3 + 0x^2 - a''x = -b''' \end{cases}$

$a^2=3$	$a^2=4$	$a^2=5$	$a^2=6$	$a^2=7$	$a^2=8$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-2$	$b=-3$	$b=-4$	$b=-5$	$b=-6$	$b=-7$
$b=2$	$b=-0$	$b=-2$	$b=-4$	$b=-6$	$b=-8$
$b=18$	$b=15$	$b=12$	$b=9$	$b=6$	$b=3$
$b=52$	$b=48$	$b=44$	$b=40$	$b=36$	$b=32$
$b=110$	$b=105$	$b=100$	$b=95$	$b=90$	$b=85$
$b=198$	$b=192$	$b=186$	$b=180$	$b=174$	$b=168$
$b=322$	$b=315$	$b=308$	$b=301$	$b=294$	$b=287$
$b=488$	$b=480$	$b=472$	$b=464$	$b=456$	$b=448$
$b=702$	$b=693$	$b=684$	$b=675$	$b=666$	$b=657$
$b=970$	$b=960$	$b=950$	$b=940$	$b=930$	$b=920$

6^e Table de la 1^{re} espèce. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour les formules.} \\ 1^{\text{re}} \text{ \& } 2^{\text{de}} \text{ classe.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x^3 = b''' \dots\dots \\ x^3 = -b''' \dots\dots \end{array} \right.$

3 ^e degré.			$a=0$ $a^2=0$	$a=0$ $a^2=1$	constant. $a^2=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=0$	$b=-1$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=6$	$b=4$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=24$	$b=21$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=60$	$b=56$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=120$	$b=115$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=210$	$b=204$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=336$	$b=329$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=504$	$b=496$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=720$	$b=711$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=990$	$b=980$

2^{de} classe $\begin{cases} x^3 + 0x^2 - a''x = b''' \\ x^3 + 0x^2 - a''x = -b''' \end{cases}$

$a^2=3$	$a^2=4$	$a^2=5$	$a^2=6$	$a^2=7$	$a^2=8$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-2$	$b=-3$	$b=-4$	$b=-5$	$b=-6$	$b=-7$
$b=2$	$b=-0$	$b=-2$	$b=-4$	$b=-6$	$b=-8$
$b=18$	$b=15$	$b=12$	$b=9$	$b=6$	$b=3$
$b=52$	$b=48$	$b=44$	$b=40$	$b=36$	$b=32$
$b=110$	$b=105$	$b=100$	$b=95$	$b=90$	$b=85$
$b=198$	$b=192$	$b=186$	$b=180$	$b=174$	$b=168$
$b=322$	$b=315$	$b=308$	$b=301$	$b=294$	$b=287$
$b=488$	$=480$	$b=472$	$b=464$	$b=456$	$b=448$
$b=702$	$b=693$	$b=684$	$b=675$	$b=666$	$b=657$
$b=970$	$b=960$	$b=950$	$b=940$	$b=930$	$b=920$

6^e Table de la 2^e espèce. Pour les formules $x^3 + 0x^2 - a''x' = b''' \dots$
 3^e. degré. $a = 0$. constant. \dots

$x = -1$	$x = -1$	$x + 1$	<i>impossible</i>	$x = -2$	$x = -2$	$x + 4$	$a^2 = 12$
							$b = 16$
$x = -1$	$x = -1$	$x + 2$	$a^2 = 3$	$x = -2$	$x = -3$	$x + 5$	$a^2 = 19$
			$b = 2$				$b = 30$
$x = -1$	$x = -2$	$x + 3$	$a^2 = 7$	$x = -2$	$x = -4$	$x + 6$	$a^2 = 28$
			$b = 6$				$b = 48$
$x = -1$	$x = -3$	$x + 4$	$a^2 = 13$	$x = -2$	$x = -5$	$x + 7$	$a^2 = 39$
			$b = 12$				$b = 70$
$x = -1$	$x = -4$	$x + 5$	$a^2 = 21$	$x = -2$	$x = -6$	$x + 8$	$a^2 = 52$
			$b = 20$				$b = 96$
$x = -1$	$x = -5$	$x + 6$	$a^2 = 31$	$x = -2$	$x = -7$	$x + 9$	$a^2 = 67$
			$b = 30$				$b = 126$
$x = -1$	$x = -6$	$x + 7$	$a^2 = 43$	$x = -2$	$x = -8$	$x + 10$	$a^2 = 84$
			$b = 42$				$b = 160$
$x = -1$	$x = -7$	$x + 8$	$a^2 = 57$	$x = -2$	$x = -9$	$x + 11$	$a^2 = 103$
			$b = 56$				$b = 198$
$x = -1$	$x = -8$	$x + 9$	$a^2 = 73$	$x = -2$	$x = -10$	$x + 12$	$a^2 = 124$
			$b = 72$				$b = 240$
$x = -1$	$x = -9$	$x + 10$	$a^2 = 91$	$x = -2$	$x = -11$	$x + 13$	$a^2 = 147$
			$b = 90$				$b = 286$
$x = -1$	$x = -10$	$x + 11$	$a^2 = 111$	$x = -2$	$x = -12$	$x + 14$	$a^2 = 172$
			$b = 110$				$b = 336$
$x = -1$	$x = -11$	$x + 12$	$a^2 = 133$	$x = -2$	$x = -13$	$x + 15$	$a^2 = 199$
			$b = 132$				$b = 390$

... & la formule $x^3 + ax^2 - a''x' = -b'''$
 $3^{\text{e}} \text{ degré.}$ $a = 0 \text{ constant.}$

$x = -3$	$x = -3$	$x + 6$	$a^2 = 27$ $b = 54$	$x = -4$	$x = -4$	$x + 8$	$a^2 = 48$ $b = 128$
$x = -3$	$x = -4$	$x + 7$	$a^2 = 37$ $b = 84$	$x = -4$	$x = -5$	$x + 9$	$a^2 = 65$ $b = 180$
$x = -3$	$x = -5$	$x + 8$	$a^2 = 49$ $b = 120$	$x = -4$	$x = -6$	$x + 10$	$a^2 = 84$ $b = 240$
$x = -3$	$x = -6$	$x + 9$	$a^2 = 63$ $b = 162$	$x = -4$	$x = -7$	$x + 11$	$a^2 = 105$ $b = 308$
$x = -3$	$x = -7$	$x + 10$	$a^2 = 79$ $b = 210$	$x = -4$	$x = -8$	$x + 12$	$a^2 = 128$ $b = 384$
$x = -3$	$x = -8$	$x + 11$	$a^2 = 97$ $b = 264$	$x = -4$	$x = -9$	$x + 13$	$a^2 = 153$ $b = 468$
$x = -3$	$x = -9$	$x + 12$	$a^2 = 117$ $b = 324$	$x = -4$	$x = -10$	$x + 14$	$a^2 = 180$ $b = 560$
$x = -3$	$x = -10$	$x + 13$	$a^2 = 139$ $b = 390$	$x = -4$	$x = -11$	$x + 15$	$a^2 = 209$ $b = 660$
$x = -3$	$x = -11$	$x + 14$	$a^2 = 163$ $b = 462$	$x = -4$	$x = -12$	$x + 16$	$a^2 = 240$ $b = 768$
$x = -3$	$x = -12$	$x + 15$	$a^2 = 189$ $b = 540$	$x = -4$	$x = -13$	$x + 17$	$a^2 = 273$ $b = 884$
$x = -3$	$x = -13$	$x + 16$	$a^2 = 217$ $b = 624$	$x = -4$	$x = -14$	$x + 18$	$a^2 = 308$ $b = 1008$
$x = -3$	$x = -14$	$x + 17$	$a^2 = 247$ $b = 714$	$x = -4$	$x = -15$	$x + 19$	$a^2 = 301$ $b = 1140$

6^e Table de la
2^{de} espèce.

Pour les formules $\begin{cases} x^3 = b''' \\ x^3 = -b''' \end{cases}$
1^{re} classe

3 ^e degré.	$a=0$ $a^2=0$	$b=0$ constant $a^2=1$
$x=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$b=1$ $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-1} \times 1$	$b=0$ $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-0} \times 1$
$x=2$	$b=8$ $-1 + \sqrt{1-4} \times 2$	$b=6$ $-1 + \sqrt{1-3} \times 2$
$x=3$	$b=27$ $-1\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4}-9} \times 3$	$b=24$ $-1\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4}-8} \times 3$
$x=4$	$b=64$ $-2 + \sqrt{4-16} \times 4$	$b=60$ $-2 + \sqrt{4-15} \times 4$
$x=5$	$b=125$ $-2\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4}-25} \times 5$	$b=120$ $-2\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4}-24} \times 5$
$x=6$	$b=216$ $-3 + \sqrt{9-36} \times 6$	$b=210$ $-3 + \sqrt{9-35} \times 6$
$x=7$	$b=343$ $-3\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4}-49} \times 7$	$b=336$ $-3\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4}-48} \times 7$
$x=8$	$b=512$ $-4 + \sqrt{16-64} \times 8$	$b=504$ $-4 + \sqrt{16-63} \times 8$
$x=9$	$b=729$ $-4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{1}{4}-81} \times 9$	$b=720$ $-4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{1}{4}-80} \times 9$
$x=10$	$b=10.00.$ $-5 + \sqrt{25-100} \times 10.$	$b=990$ $-5 + \sqrt{25-99} \times 10$

2^{de} classe

2^{de} classe $\left\{ \begin{array}{l} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - a'' x' = b''' \\ x^3 + \frac{1}{2} x^2 - a'' x' = -b''' \end{array} \right\}$ Pour les Equations imaginaires.

$a^2=2$	$a^2=3$	<i>etc.</i>
$b=0$	$b=0$	<i>etc.</i>
$b=-1$ $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \times 1$	$b=-2$ $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \times 1$	<i>etc.</i>
$b=4$ $-1 + \sqrt{1-2} \times 2$	$b=2$ $-1 + \sqrt{1-1} \times 2$	<i>etc.</i>
$b=21$ $-1\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4} - 7} \times 3$	$b=18$ $-1 + \sqrt{2\frac{1}{4} - 6} \times 3$	<i>etc.</i>
$b=56$ $-2 + \sqrt{4-14} \times 4$	$b=52$ $-2 + \sqrt{4-13} \times 4$	<i>etc.</i>
$b=115$ $-2\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4} - 23} \times 5$	$b=110$ $-2\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4} - 22} \times 5$	<i>etc.</i>
$b=204$ $-3 + \sqrt{9-34} \times 6$	$b=198$ $-3 + \sqrt{9-33} \times 6$	<i>etc.</i>
$b=329$ $-3\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4} - 47} \times 7$	$b=322$ $-3\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4} - 46} \times 7$	<i>etc.</i>
$b=496$ $-4 + \sqrt{16-62} \times 8$	$b=488$ $-4 + \sqrt{16-61} \times 8$	<i>etc.</i>
$b=711$ $-4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{1}{4} - 79} \times 9$	$b=702$ $-4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{1}{4} - 78} \times 9$	<i>etc.</i>
$b=980$ $-5 + \sqrt{25-98} \times 10$	$b=970$ $-5 + \sqrt{25-97} \times 9$	<i>etc.</i>

Analyse.

d

7^e Table de la 1^{re} espèce. Pour les formules $\begin{cases} x^3 + a'x^2 + a''x' = b''' \\ x^3 + a'x^2 + a''x' = -b''' \end{cases}$

3^e classe.

3^e. degré.

			$a^1=0$ $a^2=0$	$a^1=1$ $a^2=0$	constant $a^2=1$	$a^2=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=12$	$b=14$	$b=16$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=36$	$b=39$	$b=42$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=80$	$b=84$	$b=88$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=150$	$b=155$	$b=160$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=252$	$b=258$	$b=264$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=392$	$q=399$	$b=406$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=576$	$b=584$	$b=592$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=810$	$b=819$	$b=828$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=1100$	$b=1110$	$b=1120$

1^{re} formule, deux Racines négatives, la 3^e positive.

2^{de} formule, ou en changeant tous les signes $x^3 - a'x^2 - a''x = +b$."

$a^2=3$	$a^2=4$	$a^2=5$	$a^2=6$	$a^2=7$	$a^2=8$	$a^2=9$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=5$	$b=6$	$b=7$	$b=8$	$b=9$	$b=10$	$b=11$
$b=18$	$b=20$	$b=22$	$b=24$	$b=26$	$b=28$	$b=30$
$b=45$	$b=48$	$b=51$	$b=54$	$b=57$	$b=60$	$b=63$
$b=92$	$b=96$	$b=100$	$b=104$	$b=108$	$b=112$	$b=116$
$b=165$	$b=170$	$b=175$	$b=180$	$b=185$	$b=190$	$b=195$
$b=270$	$b=276$	$b=282$	$b=288$	$b=294$	$b=300$	$b=306$
$b=413$	$b=420$	$b=427$	$b=434$	$b=441$	$b=448$	$b=455$
$b=600$	$b=608$	$b=616$	$b=624$	$b=632$	$b=640$	$b=648$
$b=837$	$b=846$	$b=855$	$b=864$	$b=873$	$b=882$	$b=891$
$b=1130$	$b=1140$	$b=1150$	$b=1160$	$b=1170$	$b=1180$	$b=1190$

dij

7^e Table de la 2^{de} espèce. Equations rationnelles pour la 1^{re}.
3^e classe. formule $x^3 + a'x^2 + a''x' = b'''$ les .
3^e degré 2. racines négatives, la 3^e positive. .

$x=-2$	$x-2$	$\times 1$	diff. 1. impossible dans	diff. 2. cette formule.	diff. 3.
$x=-2$	$x-3$	$\times 1$	$a=4. a'=1$ 2×3 $b=6$	$a=7. a'=4$ 2×6 $b=12$	$a=10. a'=7$ 2×9 $b=18$
$x=-2$	$x-4$	$\times 1$	$a=5. a'=2$ 2×4 $b=8$	$a=9. a'=6$ 2×8 $b=16$	$a=13. a'=10$ 2×12 $b=24$
$x=-2$	$x-5$	$\times 1$	$a=6. a'=3$ 2×5 $b=10$	$a=11. a'=8$ 2×10 $b=20$	$a=16. a'=13$ 2×15 $b=30$
$x=-2$	$x-6$	$\times 1$	$a=7. a'=4$ 2×6 $b=12$	$a=13. a'=10$ 2×12 $b=24$	$a=19. a'=16$ 2×18 $b=36$
$x=-2$	$x-7$	$\times 1$	$a=8. a'=5$ 2×7 $b=14$	$a=15. a'=12$ 2×14 $b=28$	$a=22. a'=19$ 2×21 $b=42$
$x=-2$	$x-8$	$\times 1$	$a=9. a'=6$ 2×8 $b=16$	$a=17. a'=14$ 2×16 $b=32$	$a=25. a'=22$ 2×24 $b=48$
$x=-2$	$x-9$	$\times 1$	$a=10. a'=7$ 2×9 $b=18$	$a=19. a'=16$ 2×18 $b=36$	$a=28. a'=25$ 2×27 $b=54$
$x=-2$	$x-10$	$\times 1$	$a=11. a'=8$ 2×10 $b=20$	$a=21. a'=18$ 2×20 $b=40$	$a=31. a'=28$ 2×30 $b=60$
$x=-2$	$x-11$	$\times 1$	$a=12. a'=9$ 2×11 $b=22$	$a=23. a'=20$ 2×22 $b=44$	$a=34. a'=31$ 2×33 $b=66$
$x=-2$	$x-12$	$\times 1$	$a=13. a'=10$ 2×12 $b=24$	$a=25. a'=22$ 2×24 $b=48$	$a=37. a'=34$ 2×36 $b=72$
$x=-2$	$x-13$	$\times 1$	$a=14. a'=11$ 2×13 $b=26$	$a=27. a'=24$ 2×26 $b=52$	$a=40. a'=37$ 2×39 $b=78$

: . . . Et pour la 8^e formule sou-contraire $x^3 - a'x^2 + a''x = b'''$
 . . . qui a les mêmes Racines ; mais les deux Racines sont posi-
 . . . tives, & la 3^e négative.

diff. 4.	diff. 5.	diff. 6.	diff. 7.	diff. 8.
$a=13. a^2=10$ 2×12 $b=24$	$a=16. a^2=13$ 2×15 $b=30$	$a=19. a^2=16$ 2×18 $b=36$	$a=22. a^2=19$ 2×21 $b=42$	$a=25. a^2=22$ 2×24 $b=48$
$a=17. a^2=14$ 2×16 $b=32$	$a=21. a^2=18$ 2×20 $b=40$	$a=25. a^2=22$ 2×24 $b=48$	$a=29. a^2=26$ 2×28 $b=56$	$a=33. a^2=30$ 2×32 $b=64$
$a=21. a^2=18$ 2×20 $b=40$	$a=26. a^2=23$ 2×25 $b=50$	$a=31. a^2=28$ 2×30 $b=60$	$a=36. a^2=33$ 2×35 $b=70$	$a=41. a^2=38$ 2×40 $b=80$
$a=25. a^2=22$ 2×24 $b=48$	$a=31. a^2=28$ 2×30 $b=60$	$a=37. a^2=34$ 2×36 $b=72$	$a=43. a^2=40$ 2×42 $b=84$	$a=49. a^2=46$ 2×48 $b=96$
$a=29. a^2=26$ 2×28 $b=56$	$a=36. a^2=33$ 2×35 $b=70$	$a=43. a^2=40$ 2×42 $b=84$	$a=50. a^2=47$ 2×49 $b=98$	$a=57. a^2=54$ 2×56 $b=112$
$a=33. a^2=30$ 2×32 $b=64$	$a=41. a^2=38$ 2×40 $b=80$	$a=49. a^2=46$ 2×48 $b=96$	$a=57. a^2=54$ 2×56 $b=112$	$a=65. a^2=62$ 2×64 $b=128$
$a=37. a^2=34$ 2×36 $b=72$	$a=46. a^2=43$ 2×45 $b=90$	$a=55. a^2=52$ 2×54 $b=108$	$a=64. a^2=61$ 2×63 $b=126$	$a=73. a^2=70$ 2×72 $b=144$
$a=41. a^2=38$ 2×40 $b=80$	$a=51. a^2=48$ 2×50 $b=100$	$a=61. a^2=58$ 2×60 $b=120$	$a=71. a^2=68$ 2×70 $b=140$	$a=81. a^2=78$ 2×80 $b=160$
$a=45. a^2=42$ 2×44 $b=88$	$a=56. a^2=53$ 2×55 $b=110$	$a=67. a^2=64$ 2×66 $b=132$	$a=78. a^2=75$ 2×77 $b=154$	$a=89. a^2=86$ 2×88 $b=176$
$a=49. a^2=46$ 2×48 $b=96$	$a=61. a^2=58$ 2×60 $b=120$	$a=73. a^2=70$ 2×72 $b=144$	$a=85. a^2=82$ 2×84 $b=168$	$a=97. a^2=94$ 2×96 $b=192$
$a=53. a^2=50$ 2×52 $b=104$	$a=66. a^2=63$ 2×65 $b=130$	$a=79. a^2=76$ 2×78 $b=156$	$a=92. a^2=89$ 2×91 $b=182$	$a=105. a^2=102$ 2×104 $b=208$

8^e Table. Pour la 2^{de} formule $\begin{cases} x^3 + a'x^2 + a''x' = -b''' \\ \text{qui a trois racines négatives.} \end{cases}$

3^e classe.

3^e. degré.

			Troisième Racine x—1	variable. x—2
x=—1	x—1	x—1	a=3. a²=3 x—1 b=—1	a=4. a²=5 x—2 b=—2
x=—2	x—2	x—1	a=5. a²=8 x—1 b=—4	a=6. a²=12 x—2 b=—8
x=—3	x—3	x—1	a=7. a²=15 x—1 b=—9	a=8. a²=21 x—2 b=—18
x=—4	x—4	x—1	a=9. a²=24 x—1 b=—16	a=10. a²=32 x—2 b=—32
x=—5	x—5	x—1	a=11. a²=35 x—1 b=—25	a=12. a²=45 x—2 b=—50
x=—6	x—6	x—1	a=13. a²=48 x—1 b=—36	a=14. a²=60 b=—72
x=—7	x—7	x—1	a=15. a²=63 x—1 b=—49	a=16. a²=77 b=—98
x=—8	x—8	x—1	a=17. a²=63 x—1 b=—64	a=18. a²=96 b=—128
x=—9	x—9	x—1	a=19. a²=99 x—1 b=—81	a=20. a²=117 b=—162
x=—10	x—10	x—1	a=21. a²=120 x—1 b=—100	a=22. a²=140 b=—200

. ou bien $x^3 - a'x^2 - a''x - b'''$
 changeant tous les signes.

$x-3$	$x-4$	$x-5$	$x-6$
$a=5. a^2=7$ $x-3$ $b=-3$	$a=6. a^2=9$ $x-4$ $b=-4$	$a=7. a^2=11$ $b=-5$	$a=8. a^2=13$ $b=-6$
$a=7. a^2=16$ $b=-12$	$a=8. a^2=20$ $b=-16$	$a=9. a^2=24$ $b=-20$	$a=10. a^2=28$ $b=-24$
$a=9. a^2=27$ $b=-27$	$a=10. a^2=33$ $b=-36$	$a=11. a^2=39$ $b=-45$	$a=12. a^2=45$ $b=-54$
$a=11. a^2=40$ $b=-48$	$a=12. a^2=48$ $b=-64$	$a=13. a^2=56$ $b=-80$	$a=14. a^2=64$ $b=-96$
$a=13. a^2=55$ $b=-75$	$a=14. a^2=65$ $b=-100$	$a=15. a^2=75$ $b=-125$	$a=16. a^2=85$ $b=-150$
$a=15. a^2=72$ $b=-108$	$a=16. a^2=84$ $b=-144$	$a=17. a^2=96$ $b=-180$	$a=18. a^2=108$ $b=-216$
$a=17. a^2=91$ $b=-147$	$a=18. a^2=105$ $b=-196$	$a=19. a^2=119$ $b=-245$	$a=20. a^2=133$ $b=-294$
$a=19. a^2=112$ $b=-192$	$a=20. a^2=128$ $b=-256$	$a=21. a^2=144$ $b=-320$	$a=22. a^2=160$ $b=-384$
$a=21. a^2=135$ $b=-243$	$a=22. a^2=153$ $b=-324$	$a=23. a^2=171$ $b=-405$	$a=24. a^2=189$ $b=-486$
$a=23. a^2=160$ $b=-300$	$a=24. a^2=180$ $b=-400$	$a=25. a^2=200$ $b=-500$	$a=26. a^2=220$ $b=-600$

9^e Table. Pour la 4^e form. $x^3 + a'x^2 - a''x' = b'''$
 & la 3^e formule $x^3 + a'x^2 - a''x' = -b'''$

3^e classe.
 3^e degré.

			$a=0$ $a^2=0$	$a=1$ $a^2=0$	constant. $a^2=1$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=2$	$b=1$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=12$	$b=10$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=36$	$b=33$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=80$	$b=76$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=150$	$b=145$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=252$	$b=246$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=392$	$b=385$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=576$	$b=588$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=810$	$b=801$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=1100$	$b=1090$

. qui commence après les zeros à droite
 qui est à gauche avant les zeros où elle finit.

$a^2=2$	$a^2=3$	$a^2=4$	$a^2=5$	$a^2=6$	$a^2=7$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=0$	$b=-1$	$b=-2$	$b=-3$	$b=-4$	$b=-5$
$b=8$	$b=6$	$b=4$	$b=2$	$b=0$	$b=-2$
$b=30$	$b=27$	$b=24$	$b=21$	$b=18$	$b=15$
$b=72$	$b=68$	$b=64$	$b=60$	$b=56$	$b=52$
$b=140$	$b=135$	$b=130$	$b=125$	$b=120$	$b=115$
$b=240$	$b=234$	$b=228$	$b=222$	$b=216$	$b=210$
$b=378$	$b=371$	$b=364$	$b=357$	$b=350$	$b=343$
$b=580$	$b=572$	$b=564$	$b=556$	$b=548$	$b=540$
$b=792$	$b=783$	$b=774$	$b=765$	$b=756$	$b=747$
$b=1080$	$b=1070$	$b=1060$	$b=1050$	$b=1040$	$b=1030$

Analyse.

e

11^e Table de la 1^{re} espèce. Pour les formules $\begin{cases} x^3 - a'x^2 + a''x' = b''' \\ x^3 - a'x^2 + a''x' = -b''' \end{cases}$

3^e classe.
3^e. degré.

			$a=0$ $a^2=0$	$a=0$ $a^2=1$	$a=1$	$a=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=2$	$b=1$	$b=0$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=10$	$b=6$	$b=2$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=30$	$b=21$	$b=12$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=68$	$b=52$	$b=36$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=130$	$b=105$	$b=80$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=222$	$b=186$	$b=150$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=350$	$b=301$	$b=252$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=520$	$b=456$	$b=392$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=738$	$b=657$	$b=576$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=1010$	$b=910$	$b=810$

..... 7^e formule.
 8^e formule.

$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-1$	$b=-2$	$b=-3$	$b=-4$	$b=-5$	$b=-6$	$b=-7$
$b=-2$	$b=-6$	$b=-10$	$b=-14$	$b=-18$	$b=-22$	$b=-26$
$b=3$	$b=-6$	$b=-15$	$b=-24$	$b=-33$	$b=-42$	$b=-51$
$b=20$	$b=4$	$b=-12$	$b=-28$	$b=-44$	$b=-60$	$b=-76$
$b=55$	$b=30$	$b=5$	$b=-20$	$b=-45$	$b=-70$	$b=-85$
$b=114$	$b=78$	$b=42$	$b=6$	$b=-30$	$b=-66$	$b=-102$
$b=203$	$b=154$	$b=105$	$b=56$	$b=7$	$b=-42$	$b=-91$
$b=328$	$b=264$	$b=200$	$b=136$	$b=72$	$b=8$	$b=-56$
$b=495$	$b=414$	$b=333$	$b=152$	$b=171$	$b=90$	$b=9$
$b=710$	$b=610$	$b=510$	$b=410$	$b=310$	$b=210$	$b=110$

12^e Table Pour les formules $\left\{ \begin{array}{l} 3^{\text{e}} \dots x^3 + a'x^2 - a''x' = b''' \dots \\ \text{contenue dans la } 1^{\text{re}} \text{ colonne seule} \end{array} \right.$

2^de espèce.
3^e classe. 3^e degré.

			$a=1$	$a=2$	$a=3$
$x=1$	$x-1$	$x1$	$a^3=1$ $\times 1$ $b=1$	$a^3=1$ $\times 2$ $b=0$	$a^3=3$ $\times 1$ $b=-1$
$x=1$	$x-2$	$\times 2$	$a^3=4$ 2 $b=4$	$a^3=1$ 3 $b=2$	$a^3=-2$ 4 $b=0$
$x=1$	$x-3$	$\times 3$	$a^3=9$ 3 $b=9$	$a^3=5$ 4 $b=6$	$a^3=1$ 5 $b=3$
$x=1$	$x-4$	$\times 4$	$a^3=16$ 4 $b=16$	$a^3=11$ 5 $b=12$	$a^3=6$ 6 $b=10$
$x=1$	$x-5$	$\times 5$	$a^3=25$ 5 $b=25$	$a^3=19$ 6 $b=20$	$a^3=13$ 7 $b=15$
$x=1$	$x-6$	$\times 6$	$a^3=36$ 6 $b=36$	$a^3=29$ 7 $b=30$	$a^3=22$ 8 $b=24$
$x=1$	$x-7$	$\times 7$	$a^3=49$ 7 $b=49$	$a^3=41$ 8 $b=42$	$a^3=33$ 9 $b=35$
$x=1$	$x-8$	$\times 8$	$a^3=64$ 8 $b=64$	$a^3=55$ 9 $b=56$	$a^3=46$ 10 $b=48$
$x=1$	$x-9$	$\times 9$	$a^3=81$ 9 $b=81$	$a^3=71$ 10 $b=72$	$a^3=61$ 11 $b=63$
$x=1$	$x-10$	$\times 10$	$a^3=100$ 10 $b=100$	$a^3=89$ 11 $b=90$	$a^3=78$ 12 $b=80$
$x=1$	$x-11$	$\times 11$	$a^3=121$ 11 $b=121$	$a^3=109$ 12 $b=110$	$a^3=97$ 13 $b=99$

$7^e \dots \int x^3 - a'x^2 + a''x' = b'''$
 $8^e \dots \int x^3 + a'x^2 - a''x' = -b'''$

contenues dans le reste de la Table.

$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$
$a^2=5$ $\times 2$ $b=-2$	$a^2=7$ $\times 3$ $b=-3$	$a^2=9$ $\times 4$ $b=-4$	$a^2=11$ $\times 5$ $b=-5$	$a^2=13$ $\times 6$ $b=-6$	$a^2=15$ $\times 7$ $b=-7$
$a^2=5$ 1 $b=-2$	$a^2=8$ 2 $b=-4$	$a^2=11$ 3 $b=-6$	$a^2=14$ 4 $b=-8$	$a^2=17$ 5 $b=-10$	$a^2=20$ 6 $b=-12$
$a^2=-3$ 6 $b=0$	$a^2=7$ 1 $b=-3$	$a^2=11$ 2 $b=-6$	$a^2=15$ 3 $b=-9$	$a^2=19$ 4 $b=-12$	$a^2=23$ 5 $b=-15$
$a^2=1$ 7 $b=5$	$a^2=-4$ 8 $b=0$	$a^2=9$ 1 $b=-4$	$a^2=14$ 2 $b=-8$	$a^2=19$ 3 $b=-12$	$a^2=24$ 4 $b=-16$
$a^2=7$ 8 $b=10$	$a^2=1$ 9 $b=5$	$a^2=-5$ 10 $b=0$	$a^2=-11$ 1 $b=-5$	$a^2=17$ 2 $b=-10$	$a^2=-23$ 3 $b=-15$
$a^2=15$ 9 $b=18$	$a^2=8$ 10 $b=12$	$a^2=1$ 11 $b=6$	$a^2=-6$ 12 $b=0$	$a^2=-13$ 1 $b=-6$	$a^2=-20$ 2 $b=-12$
$a^2=25$ 10 $b=28$	$a^2=17$ 11 $b=21$	$a^2=9$ 12 $b=14$	$a^2=1$ 13 $b=7$	$a^2=-7$ 14 $b=0$	$a^2=-15$ 1 $b=-7$
$a^2=37$ 11 $b=40$	$a^2=28$ 12 $b=32$	$a^2=19$ 13 $b=24$	$a^2=10$ 14 $b=16$	$a^2=1$ 15 $b=8$	$a^2=-8$ 16 $b=0$
$a^2=51$ 12 $b=54$	$a^2=41$ 13 $b=45$	$a^2=31$ 14 $b=36$	$a^2=21$ 15 $b=27$	$a^2=11$ 16 $b=18$	$a^2=1$ 17 $b=9$
$a^2=67$ 13 $b=70$	$a^2=56$ 14 $b=60$	$a^2=45$ 15 $b=50$	$a^2=34$ 16 $b=40$	$a^2=23$ 17 $b=30$	$a^2=12$ 18 $b=20$
$a^2=85$ 14 $b=88$	$a^2=73$ 15 $b=77$	$a^2=61$ 16 $b=66$	$a^2=49$ 17 $b=55$	$a^2=37$ 18 $b=44$	$a^2=25$ 19 $b=33$

13^e Table. Pour les formules $\begin{cases} x^3 - a'x^2 - a''x' = b''' \\ x^3 - a'x^2 - a''x' = -b''' \end{cases}$

1^{re} espèce. 3^e classe.
3^e degré.

			$a=0$ $a^2=0$	$a^1=0$ $a^2=1$	$a^1=1$ <i>constants.</i>
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$b=1$	$b=0$	$b=-1$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$b=8$	$b=6$	$b=2$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$b=27$	$b=24$	$b=15$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$b=64$	$b=60$	$b=44$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	$b=125$	$b=120$	$b=95$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	$b=216$	$b=210$	$b=174$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	$b=343$	$b=336$	$b=287$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	$b=512$	$b=504$	$b=440$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	$b=729$	$b=720$	$b=639$
$x=10$	$x^2=100$	$x^3=1000$	$b=1000$	$b=990$	$b=890$

..... 5^c formule.
 6^c formule.

$a'=2$	$a'=3$	$a'=4$	$a'=5$	$a'=6$	$a'=7$
$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$	$b=0$
$b=-2$	$b=-3$	$b=-4$	$b=-5$	$b=-6$	$b=-7$
$b=-2$	$b=-6$	$b=-10$	$b=-14$	$b=-18$	$b=-22$
$b=6$	$b=-3$	$b=-12$	$b=-21$	$b=-30$	$b=-39$
$b=28$	$b=12$	$b=-4$	$b=-20$	$b=-36$	$b=-52$
$b=70$	$b=45$	$b=20$	$b=-5$	$b=-30$	$b=-55$
$b=138$	$b=102$	$b=66$	$b=30$	$b=-6$	$b=-42$
$b=238$	$b=189$	$b=140$	$b=91$	$b=42$	$b=-7$
$b=376$	$b=312$	$b=248$	$b=184$	$b=120$	$b=56$
$b=558$	$b=477$	$b=396$	$b=315$	$b=234$	$b=153$
$b=790$	$b=690$	$b=590$	$b=490$	$b=390$	$b=290$

Analyse.

f

14^e Table.Pour la 5^e formule $x^3 - a'x^2 - a''x = b'''$. . .

2 ^{de} espèce. 3 ^e degré.					
			$a=1$	$a=2$	$a=3$
$x=1$	$x-1$	$\times 3$	$a^2=5$ $b=3$	$a^2=7$ $b=4$	$a^2=9$ $b=5$
$x=2$	$x-1$	$\times 4$	$a^2=10$ $b=8$	$a^2=13$ $b=10$	$a^2=16$ $b=12$
$x=3$	$x-1$	$\times 5$	$a^2=17$ $b=15$	$a^2=21$ $b=18$	$a^2=25$ $b=21$
$x=4$	$x-1$	$\times 6$	$a^2=26$ $b=24$	$a^2=31$ $b=28$	$a^2=36$ $b=32$
$x=5$	$x-1$	$\times 7$	$a^2=37$ $b=35$	$a^2=43$ $b=40$	$a^2=49$ $b=45$
$x=6$	$x-1$	$\times 8$	$a^2=50$ $b=48$	$a^2=57$ $b=54$	$a^2=64$ $b=60$
$x=7$	$x-1$	$\times 9$	$a^2=65$ $b=63$	$a^2=73$ $b=70$	$a^2=81$ $b=77$
$x=8$	$x-1$	$\times 10$	$a^2=81$ $b=90$	$a^2=90$ $b=98$	$a^2=99$ $b=106$
$x=9$	$x-1$	$\times 11$	$a^2=101$ $b=99$	$a^2=111$ $b=108$	$a^2=121$ $b=117$
$x=10$	$x-1$	$\times 12$	$a^2=122$ $b=120$	$a^2=133$ $b=130$	$a^2=144$ $b=140$
$x=11$	$x-1$	$\times 13$	$a^2=145$ $b=143$	$a^2=157$ $b=154$	$a^2=168$ $b=165$

... { quia deux premieres racines négatives, & la 3^e
positive plus grande que leur somme.

$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$
x6 $a^2=11$ $b=6$	x7 $a^2=13$ $b=7$	x8 $a^2=15$ $b=8$	x9 $a^2=17$ $b=9$	x10 $a^2=19$ $b=10$
x7 $a^2=19$ $b=14$	x8 $a^2=22$ $b=16$	x9 $a^2=25$ $b=18$	x10 $a^2=28$ $b=20$	x11 $a^2=31$ $b=22$
x8 $a^2=29$ $b=24$	x9 $a^2=33$ $b=27$	x10 $a^2=37$ $b=30$	x11 $a^2=41$ $b=33$	x12 $a^2=45$ $b=36$
x9 $a^2=41$ $b=36$	x10 $a^2=46$ $b=40$	x11 $a^2=51$ $b=44$	x12 $a^2=56$ $b=48$	x13 $a^2=61$ $b=52$
x10 $a^2=55$ $b=50$	x11 $a^2=61$ $b=55$	x12 $a^2=67$ $b=60$	x13 $a^2=73$ $b=65$	x14 $a^2=79$ $b=70$
x11 $a^2=71$ $b=66$	x12 $a^2=78$ $b=72$	x13 $a^2=85$ $b=78$	x14 $a^2=92$ $b=84$	x15 $a^2=99$ $I=90$
x12 $a^2=89$ $b=84$	x13 $a^2=97$ $b=91$	x14 $a^2=105$ $b=98$	x15 $a^2=113$ $b=105$	x16 $a^2=121$ $b=112$
x13 $a^2=108$ $b=114$	x14 $a^2=117$ $b=122$	x15 $a^2=126$ $b=130$	x16 $a^2=135$ $b=138$	x17 $a^2=144$ $b=146$
x14 $a^2=131$ $b=126$	x15 $a^2=141$ $b=135$	x16 $a^2=151$ $b=144$	x17 $a^2=161$ $b=153$	x18 $a^2=171$ $b=162$
x15 $a^2=155$ $b=150$	x16 $a^2=166$ $b=160$	x17 $a^2=177$ $b=170$	x18 $a^2=188$ $b=180$	x19 $a^2=199$ $b=190$
x16 $a^2=179$ $b=176$	x17 $a^2=191$ $b=187$	x18 $a^2=203$ $b=198$	x19 $a^2=215$ $b=209$	x20 $a^2=227$ $b=220$

fij

14^e Table.

Pour la 5^e formule $x^3 - a'x^2 - a''x = b'''$. .

2 ^{de} espèce. 3 ^e degré.					
			$a=1$	$a=2$	$a=3$
$x=1$	$x-1$	$\times 3$	$\times 3$ $a^2=5$ $b=3$	$\times 4$ $a^2=7$ $b=4$	$\times 5$ $a^2=9$ $b=5$
$x=2$	$x-1$	$\times 4$	$\times 4$ $a^2=10$ $b=8$	$\times 5$ $a^2=13$ $b=10$	$\times 6$ $a^2=16$ $b=12$
$x=3$	$x-1$	$\times 5$	$\times 5$ $a^2=17$ $b=15$	$\times 6$ $a^2=21$ $b=18$	$\times 7$ $a^2=25$ $b=21$
$x=4$	$x-1$	$\times 6$	$\times 6$ $a^2=26$ $b=24$	$\times 7$ $a^2=31$ $b=28$	$\times 8$ $a^2=36$ $b=32$
$x=5$	$x-1$	$\times 7$	$\times 7$ $a^2=37$ $b=35$	$\times 8$ $a^2=43$ $b=40$	$\times 9$ $a^2=49$ $b=45$
$x=6$	$x-1$	$\times 8$	$\times 8$ $a^2=50$ $b=48$	$\times 9$ $a^2=57$ $b=54$	$\times 10$ $a^2=64$ $b=60$
$x=7$	$x-1$	$\times 9$	$\times 9$ $a^2=65$ $b=63$	$\times 10$ $a^2=73$ $b=70$	$\times 11$ $a^2=81$ $b=77$
$x=8$	$x-1$	$\times 10$	$\times 10$ $a^2=81$ $b=90$	$\times 11$ $a^2=90$ $b=98$	$\times 12$ $a^2=99$ $b=106$
$x=9$	$x-1$	$\times 11$	$\times 11$ $a^2=101$ $b=99$	$\times 12$ $a^2=111$ $b=108$	$\times 13$ $a^2=121$ $b=117$
$x=10$	$x-1$	$\times 12$	$\times 12$ $a^2=122$ $b=120$	$\times 13$ $a^2=133$ $b=130$	$\times 14$ $a^2=144$ $b=140$
$x=11$	$x-1$	$\times 13$	$\times 13$ $a^2=145$ $b=143$	$\times 14$ $a^2=157$ $b=154$	$\times 15$ $a^2=168$ $b=165$

... } quia deux premieres racines négatives, & la 3^e
positive plus grande que leur somme.

$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$
x6 $a^2=11$ $b=6$	x7 $a^2=13$ $b=7$	x8 $a^2=15$ $b=8$	x9 $a^2=17$ $b=9$	x10 $a^2=19$ $b=10$
x7 $a^2=19$ $b=14$	x8 $a^2=22$ $b=16$	x9 $a^2=25$ $b=18$	x10 $a^2=28$ $b=20$	x11 $a^2=31$ $b=22$
x8 $a^2=29$ $b=24$	x9 $a^2=33$ $b=27$	x10 $a^2=37$ $b=30$	x11 $a^2=41$ $b=33$	x12 $a^2=45$ $b=36$
x9 $a^2=41$ $b=36$	x10 $a^2=46$ $b=40$	x11 $a^2=51$ $b=44$	x12 $a^2=56$ $b=48$	x13 $a^2=61$ $b=52$
x10 $a^2=55$ $b=50$	x11 $a^2=61$ $b=55$	x12 $a^2=67$ $b=60$	x13 $a^2=73$ $b=65$	x14 $a^2=79$ $b=70$
x11 $a^2=71$ $b=66$	x12 $a^2=78$ $b=72$	x13 $a^2=85$ $b=78$	x14 $a^2=92$ $b=84$	x15 $a^2=99$ $l=90$
x12 $a^2=89$ $b=84$	x13 $a^2=97$ $b=91$	x14 $a^2=105$ $b=98$	x15 $a^2=113$ $b=105$	x16 $a^2=121$ $b=112$
x13 $a^2=108$ $b=114$	x14 $a^2=117$ $b=122$	x15 $a^2=126$ $b=130$	x16 $a^2=135$ $b=138$	x17 $a^2=144$ $b=146$
x14 $a^2=131$ $b=126$	x15 $a^2=141$ $b=135$	x16 $a^2=151$ $b=144$	x17 $a^2=161$ $b=153$	x18 $a^2=171$ $b=162$
x15 $a^2=155$ $b=150$	x16 $a^2=166$ $b=160$	x17 $a^2=177$ $b=170$	x18 $a^2=188$ $b=180$	x19 $a^2=199$ $b=190$
x16 $a^2=179$ $b=176$	x17 $a^2=191$ $b=187$	x18 $a^2=203$ $b=198$	x19 $a^2=215$ $b=209$	x20 $a^2=227$ $b=220$

fij

15^e Table. Pour la 6^e formule $x^3 - a'x^2 - a^2x' - b''' = 0$. .

2 ^{de} espèce. 3 ^e degré.					
			$a=1$	$a=2$	$a=3$
$x=-2$	$x-1$	$x+2$	$a^2=4$ $b=4$ x2	$a^2=5$ $b=6$ x3	$a^2=6$ $b=8$ x4
$x=-3$	$x-2$	$x+2$	$a^2=8$ $b=12$ 2	$a^2=9$ $b=18$ 3	$a^2=10$ $b=24$ 4
$x=-4$	$x-3$	$x+2$	$a^2=14$ $b=24$ 2	$a^2=15$ $b=36$ 3	$a^2=16$ $b=48$ 4
$x=-5$	$x-4$	$x+2$	$a^2=22$ $b=40$ 2	$a^2=23$ $b=60$ 3	$a^2=24$ $b=80$ 4
$x=-6$	$x-5$	$x2$	$a^2=32$ $b=60$ 2	$a^2=33$ $b=90$ 3	$a^2=34$ $b=120$ 4
$x=-7$	$x-6$	$x2$	$a^2=44$ $b=84$ 2	$a^2=45$ $b=120$ 3	$a^2=46$ $b=168$ 4
$x=-8$	$x-7$	$x2$	$a^2=58$ $b=112$ 2	$a^2=59$ $b=168$ 3	$a^2=60$ $b=224$ 4
$x=-9$	$x-8$	$x2$	$a^2=74$ $b=144$ 2	$a^2=75$ $b=216$ 3	$a^2=67$ $b=288$ 4
$x=-10$	$x-9$	$x2$	$a^2=92$ $b=180$ 2	$a^2=93$ $b=270$ 3	$a^2=94$ $b=360$ 4
$x=-11$	$x-10$	$x2$	$a^2=112$ $b=220$ 2	$a^2=114$ $b=330$ 3	$a^2=114$ $b=440$ 4
$x=-12$	$x-11$	$x2$	$a^2=134$ $b=264$ 2	$a^2=135$ $b=396$ 3	$a^2=136$ $b=528$ 4

..... { deux Racines négatives , & la 3^e positive toujours
constante.

$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$
$a^2=7$ $\times 5$ $b=10$	$a^2=8$ $\times 6$ $b=12$	$a^2=9$ $\times 7$ $b=14$	$a^2=10$ $\times 8$ $b=16$	$a^2=11$ 9 $b=18$	$a^2=12$ 10 $b=20$
$a^2=11$ 5 $b=30$	$a^2=12$ 6 $b=36$	$a^2=13$ 7 $b=42$	$a^2=14$ 8 $b=48$	$a^2=15$ 9 $b=54$	$a^2=16$ 10 $b=60$
$a^2=17$ 5 $b=60$	$a^2=18$ 6 $b=72$	$a^2=19$ 7 $b=84$	$a^2=20$ 8 $b=96$	$a^2=21$ 9 $b=108$	$a^2=22$ 10 $b=120$
$a^2=25$ 5 $b=100$	$a^2=26$ 6 $b=120$	$a^2=27$ 7 $b=140$	$a^2=28$ 8 $b=160$	$a^2=29$ 9 $b=180$	$a^2=30$ 10 $b=200$
$a^2=35$ 5 $b=150$	$a^2=36$ 6 $b=180$	$a^2=37$ 7 $b=210$	$a^2=38$ 8 $b=240$	$a^2=39$ 9 $b=270$	$a^2=40$ 10 $b=300$
$a^2=47$ 5 $b=210$	$a^2=48$ 6 $b=252$	$a^2=49$ 7 $b=294$	$a^2=50$ 8 $b=336$	$a^2=51$ 9 $b=378$	$a^2=52$ 10 $b=420$
$a^2=61$ 5 $b=280$	$a^2=62$ 6 $b=336$	$a^2=63$ 7 $b=392$	$a^2=64$ 8 $b=438$	$a^2=65$ 9 $b=494$	$a^2=66$ 10 $b=550$
$a^2=77$ 5 $b=360$	$a^2=78$ 6 $b=432$	$a^2=79$ 7 $b=504$	$a^2=80$ 8 $b=576$	$a^2=81$ 9 $b=648$	$a^2=82$ 10 $b=720$
$a^2=95$ 5 $b=450$	$a^2=96$ 6 $b=540$	$a^2=97$ 7 $b=630$	$a^2=98$ 8 $b=720$	$a^2=99$ 9 $b=810$	$a^2=100$ 10 $b=900$
$a^2=115$ 5 $b=550$	$a^2=116$ 6 $b=660$	$a^2=117$ 7 $b=770$	$a^2=118$ 8 $b=880$	$a^2=119$ 9 $b=990$	$a^2=120$ 10 $b=1100$
$a^2=137$ 5 $b=660$	$a^2=138$ 6 $b=792$	$a^2=139$ 7 $b=924$	$a^2=140$ 8 $b=1056$	$a^2=141$ 9 $b=44$	$a^2=142$ 10 $b=1320$

16^e Table.Pour les formules . . . $x^5 = b^2$. . .1^{re} espèce.1^{re} & 2^{de} classe.5^e degré.

				$a^{IV}=0$	$a^{IV}=1$	$a^{IV}=2$
$x=0$	$x^2=0$	$x^3=0$	$x^4=0$	$x^5=0$ $b^2=0$	$b^2=0$	$b^2=0$
$x=1$	$x^2=1$	$x^3=1$	$x^4=1$	$x^5=1$ $b^2=1$	$b^2=2$	$b^2=3$
$x=2$	$x^2=4$	$x^3=8$	$x^4=16$	$x^5=32$ $b^2=32$	$b^2=34$	$b^2=36$
$x=3$	$x^2=9$	$x^3=27$	$x^4=81$	$x^5=243$ $b^2=243$	$b^2=246$	$b^2=249$
$x=4$	$x^2=16$	$x^3=64$	$x^4=256$	$x^5 \& b^2$ 1024	$b^2=1028$	$b^2=1032$
$x=5$	$x^2=25$	$x^3=125$	625	$x^5 \& b^2$ 3125	$b^2=3130$	$b^2=3135$
$x=6$	$x^2=36$	$x^3=216$	1296	$x^5 \& b^2$ 7776	$b^2=7782$	$b^2=7788$
$x=7$	$x^2=49$	$x^3=343$	2401	$x^5 \& b^2$ 16807	$b^2=16814$	$b^2=16821$
$x=8$	$x^2=64$	$x^3=512$	4096	$x^5 \& b^2$ 32768	$b^2=32776$	$b^2=32784$
$x=9$	$x^2=81$	$x^3=729$	6561	$x^5 \& b^2$ 59049	$b^2=59058$	$b^2=59067$
$x=10$	$x^2=100$	100. 0	100. 00	$x^5 \& b^2$ 1000000	$b^2=$ 100. 01. 0.	$b^2=$ 100. 020

$$\dots \dots \dots \text{Et } x' + a^{iv} x' = b'$$

$a^{iv}=3$	$a^{iv}=4$	$a^{iv}=5$	$a^{iv}=6$	$a^{iv}=7$
$b'=0$	$b'=0$	$b'=0$	$b'=0$	$b'=0$
$b'=4$	$b'=5$	$b'=6$	$b'=7$	$b'=8$
$b'=38$	$b'=40$	$b'=42$	$b'=44$	$b'=46$
$b'=252$	$b'=255$	$b'=258$	$b'=261$	$b'=264$
$b'=1036$	$b'=1040$	$b'=1044$	$b'=1048$	$b'=1052$
$b'=3140$	$b'=3145$	$b'=3150$	$b'=3155$	$b'=3160$
$b'=7794$	$b'=7800$	$b'=7806$	$b'=7812$	$b'=7818$
$b'=16828$	$b'=16835$	$b'=16842$	$b'=16849$	$b'=16856$
$b'=32792$	$b'=32800$	$b'=32808$	$b'=32816$	$b'=32824$
$b'=59076$	$b'=59085$	$b'=59094$	$b'=59103$	$b'=59112$
$b'=100.030$	$b'=100.040$	$b'=100.050$	$b'=100.060$	$b'=100.070$

17^e Table Pour les formules $x^s = b^v$. . . & . . .

1^{re} espece.
5^e. degré.

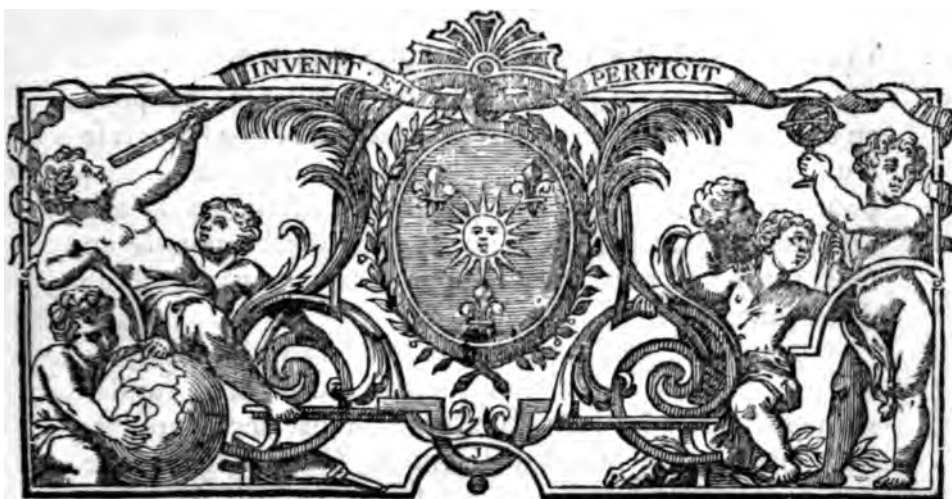
				$a^{iv}=0$	$a^{iv}=1$	$a^{iv}=2$
$x=0$	$x^s=0$	$x^i=0$	$x^t=0$	$x^s=0$ $b^v=0$	$b^v=0$	$b^v=0$
$x=1$	$x^s=1$	$x^i=1$	$x^t=1$	$x^s=1$ $b^v=1$	$b^v=0$	$b^v=-1$
$x=2$	$x^s=4$	$x^i=8$	$x^t=16$	$x^s=32$ $b^v=32$	$b^v=30$	$b^v=28$
$x=3$	$x^s=9$	$x^i=27$	$x^t=81$	$x^s=243$ $b^v=243$	$b^v=240$	$b^v=237$
$x=4$	$=16$	64	256	$x^s \text{ \& } b^v$ $=1024$	$b^v=1020$	$b^v=1016$
$x=5$	$x^s=25$	125	625	$x^s \text{ \& } b^v$ $=3125$	$b^v=3120$	$b^v=3115$
$x=6$	36	216	1296	$x^s \text{ \& } b^v$ $=7776$	$b^v=7770$	$b^v=7764$
$x=7$	49	343	2401	$x^s \text{ \& } b^v$ $=16807$	$b^v=16800$	$b^v=16793$
$x=8$	64	512	4096	$x^s \text{ \& } b^v$ $=32768$	$b^v=32760$	$b^v=32752$
$x=9$	81	729	6561	$x^s \text{ \& } b^v$ 59049	$b^v=59040$	$b^v=59031$
$x=10$	100	100.0	100.00	$x^s \text{ \& } b^v$ $100.00.0.$	$b^v=99.99.0$	$b^v=99.98.0$

. . . .

$$\dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x' - a^{IV} x' = b.^V \\ x' - a^{IV} x' = -b.^V \end{array} \right.$$

$a^{IV}=3$	$a^{IV}=4$	$a^{IV}=5$	$a^{IV}=6$	$a^{IV}=7$
$b^V=0$	$b^V=0$	$b^V=0$	$b^V=0$	$b^V=0$
$b^V=-2$	$b^V=-3$	$b^V=-4$	$b^V=-5$	$b^V=-6$
$b^V=26$	$b^V=24$	$b^V=22$	$b^V=20$	$b^V=18$
$b^V=234$	$b^V=231$	$b^V=228$	$b^V=225$	$b^V=222$
$b^V=1012$	$b^V=1008$	$b^V=1004$	$b^V=1000$	$b^V=996$
$b^V=3110$	$b^V=3105$	$b^V=3100$	$b^V=3095$	$b^V=3090$
$b^V=7758$	$b^V=7752$	$b^V=7746$	$b^V=7740$	$b^V=7734$
$b^V=16786$	$b^V=16779$	$b^V=16772$	$b^V=16765$	$b^V=16758$
$b^V=32744$	$b^V=32736$	$b^V=32728$	$b^V=32720$	$b^V=32712$
$b^V=59022$	$b^V=59013$	$b^V=59004$	$b^V=58995$	$b^V=58986$
$b^V=99.970$	$b^V=99.960$	$b^V=99.950$	$b^V=89.940$	$b^V=99.930$

Analyse.



ANALYSE GENERALE,

o u

LES REGLES GENERALES DE L'ANALYSE.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE SUR L'ANALYSE,

Où l'on explique sa nature , son objet , & comment elle procède.



ANALYSE est tiré du mot Grec *Analysis*, qui signifie résolution, division, dissection, comparaison ; il a passé dans la langue françoise avec toutes ces diverses significations qu'on employe dans leur sens naturel & souvent même dans un sens figuré. On dit faire l'Analyse d'un discours, lorsqu'on

divise ou sépare ses parties pour les comparer , ou pour en examiner les défauts ou les perfections ; faire l'Analyse d'une plante, c'est séparer ses parties par l'art de la Chimie pour en développer les principes ; faire l'Analyse d'un métal, c'est rechercher les élémens dont il est composé en séparant ses parties sensibles par le feu ou par quelque dissolvant , &c.

L'Analyse des Géomètres , qui est l'art de découvrir les vérités Géométriques , & qui est la source & le fondement de toutes les Mathématiques , renferme toutes les différentes significations de son nom. C'est la science de comparer les grandeurs, elle en fait la division , la dissection & la résolution , comme on le verra dans la suite.

Son objet principal est la résolution des Problèmes de tous les genres & de tous les degrez à l'infini. Un Problème étant proposé l'Analyse en exprime les grandeurs par des lettres, les conditions par des signes , & les rapports par des égalitez.

Il y trois cas en général dans tous les Problèmes possibles. Le premier cas est lorsqu'il y a autant de rapports connus qu'il y a de grandeurs inconnues , suivant les conditions proposées , alors chaque inconnue a une égalité , & le Problème est déterminé.

Le second cas est lorsqu'il y a moins de rapports connus qu'il y a de grandeurs inconnues , alors comme chaque inconnue ne peut pas avoir son égalité , il y a quelque égalité qui a deux inconnues , & le Problème est indéterminé.

Le troisième cas est lorsque suivant les conditions proposées dans le Problème , on connoît plus de rapports qu'il n'y a d'inconnues ; alors on peut former plus d'égalitez qu'il n'y a d'inconnues , & le Problème est plus que déterminé.

Voilà les trois genres des Problèmes que l'Analyse considère , elle les réduit à des expressions simples & faciles pour ménager la capacité de l'esprit humain, elle dépouille
les

les grandeurs de tout ce qu'elles ont de particulier & de sensible, & les nomme chacune par une lettre de l'Alphabet, sçavoir les grandeurs connues par les premières lettres & les inconnues par les dernières lettres de l'Alphabet. Une expression si simple ne partage point inutilement l'attention de l'esprit & lui laisse toute son étendue pour comparer ces grandeurs & leur appliquer les différentes opérations du calcul que les conditions du Problème exigent.

Comment l'Analyse procède à la résolution des Problèmes.

1^o. Elle les prépare. 2^o. Elle les résoud.

1^o. Un problème étant proposé, l'Analyse donne des noms aux grandeurs, elle exprime leurs rapports par des égalitez, elle prépare ces égalitez pour avoir la valeur des grandeurs inconnues qu'elles contiennent; c'est-à-dire, elle prend soin de chasser ou de faire évanouir successivement chacune des grandeurs inconnues dans chacune de ces égalitez, pour avoir une inconnue seule dans le premier membre; & faisant passer dans le second membre les autres grandeurs, Si toutes les grandeurs du second membre sont des lettres connues, elles donnent la valeur de l'inconnue qui est dans le premier membre.

Premier cas. Si l'on trouve par ce moien les valeurs de toutes les inconnues, alors le Problème est résolu, ce qui arrive dans tous les Problèmes déterminez & du premier degré ou l'inconnue est linéaire. Car les égalitez donnent les valeurs des inconnues par ordre, on trouve d'abord la valeur d'une inconnue qui est seule dans une égalité, on substitue cette valeur trouvée dans une autre égalité où est la même inconnue avec une autre, ce qui donne moien de trouver la valeur de cette seconde inconnue, substituant ensuite la valeur de ces deux inconnues dans une égalité où il y a trois inconnues, sçavoir les deux dont

Analyse.

h

on a déjà trouvé la valeur avec une troisième ; on trouvera de même la valeur de cette troisième inconnue en lettres connues ou en nombres ; & continuant de la sorte , on trouvera la valeur de toutes les inconnues , ce qui donnera la résolution parfaite du Problème ; car il n'y a qu'à substituer des nombres à la place des lettres connues qui sont les valeurs trouvées des grandeurs inconnues , & s'il y a des fractions , on les fera évanouir par la multiplication , & on réduira la résolution à sa plus simple expression ce qui est nécessaire dans tous les cas & même dans toutes les opérations qui se font pour préparer une Equation.

C'est ainsi que la préparation seule donne la résolution des Problèmes déterminés du premier degré où il n'y a qu'une inconnue principale à laquelle toutes les autres se rapportent & qui est du premier degré : mais dans les autres cas la seule préparation ne suffit pas pour avoir la résolution , il y a d'autres règles à observer.

Second cas. Il y a toujours plusieurs inconnues dans un Problème proposé , car s'il n'y en avait qu'une seule , le Problème seroit résolu : mais il y a une inconnue principale à laquelle les autres se rapportent , dont on ne peut pas toujours trouver la valeur par la préparation parce qu'on n'a pu la dégager ou la faire évanouir , ce qui arrive lorsqu'elle est multipliée par elle-même. Et c'est l'origine des Equations de tous les degrés à l'infini. Par exemple , après la préparation si on trouve une égalité $x^2 = ax$, dans laquelle l'inconnue se trouve au second degré dans le premier terme , & au premier degré dans le second terme , je divise tout par x , j'ai $x = a$, & le Problème est résolu.

2°. Si je trouve $x^2 = b$, je tire la racine quarrée des deux membres , & j'ai $x = \sqrt{b}$. c'est une équation pure & simple du second degré. De même si j'ai $x^3 = b$, qui est une équation pure & simple du troisième degré , je tire

la racine cubique de chaque membre & j'ai $x = \sqrt[3]{b}$. Il en est de même des équations pures & simples de tous les degrez à l'infini.

3°. S'il résulte de la préparation une équation quelconque dont le premier membre soit la puissance parfaite d'un binôme, comme $x^2 - 2ax + aa = b$, qui est une équation du second degré, dont le premier membre contient la puissance parfaite du binôme $x + a$. De même $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = b^3 + c^3$, dont le premier membre est la troisième puissance parfaite du binôme $x + a$. Il en est de même des autres puissances à l'infini d'un binôme quelconque. Je nomme ces égalitez qui résultent de la préparation du Problème des équations & il y en a de tous les degrez à l'infini, comme des puissances; l'exposant de la haute puissance de l'inconnuë marque le degré de l'équation. Or la préparation seule ne peut pas donner la valeur de cette inconnuë, il faut que l'Analyse fournisse d'autres regles pour les résoudre & pour les cas suivans.

4°. Quelquefois la préparation se réduit à plusieurs égalitez où se trouve la même inconnuë élevée à des degrez différens, & en ajoutant ensemble ces égalitez, on peut former une équation dont le premier membre est encore une puissance parfaite d'un binôme.

Par exemple, si le Problème proposé se réduit à ces deux équations du second degré $x^2 - 3ax = b$, & $aa + ax = c$. j'ajoute ces deux équations j'ai $x^2 - 2ax + aa = bc$, dont le premier membre est une 2^{de}. puissance parfaite du binôme $x + a$.

De même si le Problème proposé se réduit à ces deux équations du troisième degré, $x^3 + 3a^2x = b^3$, & $3ax^2 + a^3 = c^3$. j'ajoute ces deux équations & j'ai $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = b^3 + c^3$, dont le premier membre est la troisième puissance parfaite du binôme $x + a$.

b ij

Souvent le Problème se réduit à deux équations qui ont des fractions comme $x^2 - y^2 = \frac{1}{3} p$. & $x^3 + 3xy^2 = \frac{1}{3} q$.

Pour ôter les fractions. 1^o. J'éleve la première égalité à la troisième puissance, parce que le dénominateur 3 de la fraction du dernier terme est l'exposant de la troisième puissance. Ce qui donne $x^6 - 3x^2y^2 + 3x^2y^4 - y^6 = \frac{1}{27} p^3$.

2^o. J'éleve la seconde égalité à la seconde puissance, parce qu'il faut la multiplier par le dénominateur 2 de la fraction du dernier terme qui est l'exposant de la seconde puissance; ce qui donne $x^6 + 6x^2y^2 + 9x^2y^4 = \frac{1}{4} qq$.

Ensuite je retranche le premier membre de la première égalité élevée au cube du premier membre de la seconde élevée au quarré, & le second membre de la première du second membre de la seconde.

$$2^{\text{de}}. \quad x^6 + 6x^2y^2 + 9x^2y^4 = \frac{1}{4} qq.$$

$$1^{\text{re}}. \quad x^6 - 3x^2y^2 + 3x^2y^4 - y^6 = \frac{1}{27} p^3.$$

Ce qui se fait en changeant tous les signes dans les termes de la première, & les ajoutant à ceux de la seconde, ce qui donne.

$$2^{\text{de}}. \quad x^6 + 6x^2y^2 + 9x^2y^4 = \frac{1}{4} qq.$$

$$1^{\text{re}}. \quad x^6 + 3x^2y^2 - 3x^2y^4 + y^6 = -\frac{1}{27} p^3.$$

$$\text{Addition} \quad + 9x^2y^2 + 6x^2y^4 + y^6 = \frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3.$$

Cette somme est une Equation dont le premier membre est la seconde puissance parfaite de $3x^2y + y^3$.

3^o. Je tire la racine quarrée de chaque membre de cette

dernière Equation, j'ai $3xy^2 + y^3 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{17}p^3}$ à laquelle j'ajoute l'Equation $x^3 + 3xy^2 = \frac{1}{2}q$.

La somme donne l'Equation $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{17}p^3}$ dont le premier membre est le cube parfait du binôme $x + y$, donc tirant la racine cubique de chaque membre, je trouve l'Equation simple qui en est la racine $x + y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{17}p^3}}$ & le Problème est résolu.

5°. Quelquefois la préparation réduit un Problème à une égalité dont le premier membre ne contient pas une puissance parfaite d'un binôme, mais il y manque quelques termes qu'on peut ajouter, ou soustraire de part & d'autre pour avoir cette puissance parfaite dans le premier membre, par exemple. Si le Problème se réduit à cette seule égalité $x^2 - 2ax = bc$; il est évident qu'il faut ajouter de part & d'autre $+aa$, ce qui donne $x^2 - 2ax + aa = aa + bc$, alors le premier membre est de la seconde puissance parfaite du binôme $x - a$. Et tirant la racine quarrée de chaque membre, j'ai $x - a = \sqrt{aa + bc}$ qui donne par transposition $x = a + \sqrt{aa + bc}$.

De même si j'ai $x^3 - 3bx^2 + 3bx^2 = c^3$, si je mets $-b^3$ dans les deux membres, j'aurai dans le premier membre la troisième puissance parfaite de $x - b$. Ainsi $x^3 - 3bx^2 + 3b^2x - b^3 = c^3 - b^3$, donc tirant la racine cubique de chaque membre, j'aurai la racine ou l'Equation simple $x - b = \sqrt[3]{c^3 - b^3}$, & par transposition $x = b + \sqrt[3]{c^3 - b^3}$. Souvent on trouve deux égalitez qui jointes ensemble donnent une Equation où

le second terme est détruit, &c.

Voilà l'origine des égalitez qu'on nomme les Equations; c'est ainsi qu'elles naissent de la préparation des Problèmes déterminez, dans lesquels il n'y a qu'une seule inconnue principale qu'on n'a pu faire évanouir.

Troisième cas. Lorsqu'on n'a pu former d'abord autant d'égalitez que d'inconnues, le Problème se réduit à une ou à plusieurs égalitez, qui renferment deux inconnues ou trois inconnues qu'on ne peut faire évanouir, parce qu'on ne peut en trouver la valeur; en ce cas le Problème est indéterminé, il a une infinité de solutions, & l'Analyse fournit d'autres regles pour ce second genre de Problèmes.

Quatrième cas. Lorsqu'il y a par les conditions du Problème plus de rapports connus qu'il n'y a de grandeurs inconnues, on peut former plus d'égalitez qu'il n'y a d'inconnues, puisque chaque rapport donne une égalité, d'où il suit que le Problème proposé est plus que déterminé, dans ce cas il y a des regles pour éviter les résolutions qui sont impossibles, parce qu'elles renferment une absurdité, ces Problèmes ont un nombre limité de solutions.

Ainsi l'Analyse a pour objet la résolution des Problèmes qui se réduisent à trois genres, qui sont, 1°. les Problèmes déterminez, qui n'ont qu'une seule inconnue, ils ont un nombre fini de résolutions, ils en ont précisément autant que l'exposant de la haute puissance de l'inconnue contient d'unités.

Ces Problèmes contiennent les Equations, il y en a de tous les degrez à l'infini, & leur résolution consiste à trouver les racines de ces équations.

2°. Les Problèmes indéterminez sont ceux qui ont plusieurs inconnues, ils ont une infinité de solutions à l'infini, ils se réduisent à des égalitez, qui prennent leur nom de la multitude de leurs inconnues, les doubles

égalité sont celles où il reste deux inconnues, les triples égalitez celles où il reste trois inconnues, &c.

L'élégance de ces Problèmes consiste à éviter les fractions, & à donner des solutions à l'infini toujours en nombres entiers, la simple égalité n'est point un Problème indéterminé, c'est un Problème déterminé du premier degré ou un Problème simple.

3°. Les Problèmes plus que déterminez sont ceux dans lesquels on connoît plus de rapports que d'inconnues, le nombre de leurs solutions est toujours fini & limité.

Voilà l'objet général de l'Analyse, elle donne des Règles pour préparer ces Problèmes & pour les résoudre, elle y applique avec art les Règles du calcul, & cet art sont les Méthodes générales qu'elle prescrit pour tous ces trois genres de Problèmes, ainsi l'Analyse suppose les Règles du calcul, il faut se les rendre très-familières dans la pratique, & sur-tout toutes les opérations qui concernent les fractions; sans ce secours c'est perdre le tems que de vouloir s'appliquer à l'Analyse.

LIVRE PREMIER.

SECTION PREMIÈRE.

De l'Analyse en général, & de la Résolution des Problèmes déterminez du premier degré.

L'Analyse qui est le fondement & la source de toutes les découvertes qu'on peut faire dans les Mathématiques, tire son nom d'un mot grec qui signifie résolution, elle a pour objet la résolution de tous les Problèmes ou questions qu'on peut former sur les grandeurs comparées ensemble: cette résolution se réduit toujours

*

à découvrir une ou plusieurs grandeurs inconnues, par le moyen des grandeurs connues & des rapports qu'elles ont avec la grandeur ou les grandeurs inconnues, exprimez par les conditions du Problème, ce qui se fait en augmentant ou diminuant ces grandeurs suivant les règles du calcul pour parvenir à l'égalité qui donne enfin la valeur désirée de l'inconnue.

Il y a entre les Problèmes plusieurs degrez, plusieurs genres, & plusieurs espèces.

Il y a plusieurs degrez dans les Problèmes comme dans les puissances, les Problèmes du premier degre sont ceux où l'inconnue n'est point multipliée par elle-même. c'est un Problème simple ou linéaire.

Les Problèmes du second degre sont ceux où l'inconnue est multipliée une fois par elle-même, & où par conséquent elle se trouve élevée au second degre.

De même si l'inconnue est élevée au troisième degre, le Problème est du troisième degre, & ainsi de tous les degrez supérieurs, il en est de même des Problèmes composés qui ont plusieurs inconnues, la haute puissance où l'inconnue est élevée est le degre du Problème.

Il y a deux genres de Problèmes, le premier genre contient les Problèmes simples, ce sont les Problèmes où il n'y a qu'une seule inconnue, ou bien ceux où l'inconnue n'a qu'une seule valeur, ce qui ne se trouve que dans les Problèmes du premier degre. Les Problèmes composés sont le 2^d. genre, ils sont de deux sortes.

1^o. Ce sont ceux qui renferment plusieurs inconnues.

2^o. Ce sont ceux qui, quoiqu'ils n'aient qu'une seule inconnue, cependant elle se trouve élevée à la seconde ou à la troisième puissance, ce qui fait que cette inconnue a plusieurs valeurs différentes, & précisément autant que l'exposant de la haute puissance contient d'unités. Ainsi cet exposant marque le nombre des racines de l'Equation.

Il y a trois espèces de Problèmes en général.

La première espèce contient les Problèmes indéterminez, ce sont ceux qui ont plusieurs inconnuës, & qui se réduisent à plusieurs égalitez, & par conséquent ils ont une infinité de solutions; il y en a de tous les degrez à l'infini.

La seconde espèce contient les Problèmes déterminez, ce sont ceux qui se réduisent à une seule égalité qui ne contient qu'une seule inconnuë, laquelle peut être du premier degré, du second, du troisième, &c. à l'infini, ces Problèmes n'ont qu'une seule résolution dans le premier degré, & dans les degrez supérieurs le nombre des résolutions est déterminé, il est toujours égal à l'exposant de la puissance à laquelle l'inconnuë se trouve élevée, puisque la résolution consiste à trouver les racines ou les différentes valeurs de l'inconnuë.

La troisième espèce contient les Problèmes plus que déterminez, ce sont les Problèmes dont les conditions donnent plus d'égalitez qu'il n'y a d'inconnuës; de sorte qu'on peut choisir entre les solutions possibles celles qui sont les plus commodes, mais il faut éviter les solutions fausses qui renferment une contradiction.

Le but & la fin de toutes les regles de l'Analyse consiste à trouver la valeur de l'inconnuë dans un Problème simple, ce qui se nomme faire évanouir l'inconnuë, car en substituant la valeur trouvée à la place de l'inconnuë, elle disparoit & s'évanouit.

Dans les Problèmes composez. 1°. S'il y a plusieurs inconnuës, il s'agit de trouver leurs valeurs, & même toutes leurs valeurs possibles à l'infini, si le Problème est indéterminé, car en ce cas il a une infinité de solutions.

2°. S'il n'y a qu'une seule inconnuë élevée à differens degrez, comme il se trouve dans les Equations, il s'agit de trouver autant de valeurs de l'inconnuë que l'exposant de la haute puissance contient d'unitéz.

Analyse.

i

à découvrir une ou plusieurs grandeurs inconnues ; par le moyen des grandeurs connues & des rapports qu'elles ont avec la grandeur ou les grandeurs inconnues, exprimez par les conditions du Problème, ce qui se fait en augmentant ou diminuant ces grandeurs suivant les règles du calcul pour parvenir à l'égalité qui donne enfin la valeur désirée de l'inconnue.

Il y a entre les Problèmes plusieurs degrez, plusieurs genres, & plusieurs espèces.

Il y a plusieurs degrez dans les Problèmes comme dans les puissances, les Problèmes du premier degrez sont ceux où l'inconnue n'est point multipliée par elle-même, c'est un Problème simple ou linéaire.

Les Problèmes du second degrez sont ceux où l'inconnue est multipliée une fois par elle-même, & où par conséquent elle se trouve élevée au second degrez.

De même si l'inconnue est élevée au troisième degrez, le Problème est du troisième degrez, & ainsi de tous les degrez supérieurs, il en est de même des Problèmes composés qui ont plusieurs inconnues, la haute puissance où l'inconnue est élevée est le degrez du Problème.

Il y a deux genres de Problèmes, le premier genre contient les Problèmes simples, ce sont les Problèmes où il n'y a qu'une seule inconnue, ou bien ceux où l'inconnue n'a qu'une seule valeur, ce qui ne se trouve que dans les Problèmes du premier degrez. Les Problèmes composés font le 2^d. genre, ils sont de deux sortes.

1^o. Ce sont ceux qui renferment plusieurs inconnues.

2^o. Ce sont ceux qui, quoiqu'ils n'aient qu'une seule inconnue, cependant elle se trouve élevée à la seconde ou à la troisième puissance, ce qui fait que cette inconnue a plusieurs valeurs différentes, & précisément autant que l'exposant de la haute puissance contient d'unités. Ainsi cet exposant marque le nombre des racines de l'Equation.

Il y a trois espèces de Problèmes en général.

La première espèce contient les Problèmes indéterminez, ce sont ceux qui ont plusieurs inconnuës, & qui se réduisent à plusieurs égalitez, & par conséquent ils ont une infinité de solutions; il y en a de tous les degrez à l'infini.

La seconde espèce contient les Problèmes déterminez, ce sont ceux qui se réduisent à une seule égalité qui ne contient qu'une seule inconnuë, laquelle peut être du premier degré, du second, du troisième, &c. à l'infini, ces Problèmes n'ont qu'une seule résolution dans le premier degré, & dans les degrez supérieurs le nombre des résolutions est déterminé, il est toujours égal à l'exposant de la puissance à laquelle l'inconnuë se trouve élevée, puisque la résolution consiste à trouver les racines ou les différentes valeurs de l'inconnuë.

La troisième espèce contient les Problèmes plus que déterminez, ce sont les Problèmes dont les conditions donnent plus d'égalitez qu'il n'y a d'inconnuës; de sorte qu'on peut choisir entre les solutions possibles celles qui sont les plus commodes, mais il faut éviter les solutions fausses qui renferment une contradiction.

Le but & la fin de toutes les regles de l'Analyse consiste à trouver la valeur de l'inconnuë dans un Problème simple, ce qui se nomme faire évanouir l'inconnuë, car en substituant la valeur trouvée à la place de l'inconnuë, elle disparoit & s'évanouit.

Dans les Problèmes composez. 1°. S'il y a plusieurs inconnuës, il s'agit de trouver leurs valeurs, & même toutes leurs valeurs possibles à l'infini, si le Problème est indéterminé, car en ce cas il a une infinité de solutions.

2°. S'il n'y a qu'une seule inconnuë élevée à differens degrez, comme il se trouve dans les Equations, il s'agit de trouver autant de valeurs de l'inconnuë que l'exposant de la haute puissance contient d'unitez.

Analyse.

i

Pour résoudre un Problème d'Analyse, il faut, 1^o. exprimer par les lettres de l'Alphabet toutes les grandeurs du Problème. 2^o. Former des égalitez suivant les conditions proposées. 3^o. Résoudre ces égalitez en trouvant la valeur de l'inconnue, s'il n'y en a qu'une, ou des inconnues s'il y en a plusieurs.

Dans tout Problème d'Analyse, on exprime les grandeurs par les lettres de l'Alphabet; sçavoir, les grandeurs connues par les premières lettres a, b, c, d , &c. & les grandeurs inconnues par les dernières lettres.

Les conditions du problème sont les rapports donnez entre les grandeurs connues & les grandeurs inconnues, ou entre les seules grandeurs connues, leur expression se fait par les mêmes lettres des grandeurs qu'ils représentent.

Les égalitez se font ainsi, pour égaler a avec b , je les joints ensemble par le signe d'égalité $=$, ainsi $a = b$, ce sont deux expressions égales de la même grandeur si a vaut 2, j'ai par cette égalité $2 = 2$. égaler deux grandeurs, c'est les joindre ensemble par le signe d'égalité $=$.

Toute égalité a deux membres séparés par le signe $=$, je nomme le premier membre celui qui est à gauche du signe $=$ c'est a , je nomme le second membre celui qui est à droite, c'est b .

Le premier membre & le second peuvent avoir plusieurs termes, dans $x^2 - a = b$, le premier membre contient deux termes liés ensemble par le signe $-$; sçavoir, une inconnue x élevée à la seconde puissance, & la grandeur a . Il peut y avoir dans ces deux membres des termes complexes: c'est-à-dire exprimez, par deux ou plusieurs lettres & des termes incomplexes, comme dans $xx + ax - bc = d$. Le second membre contient la seule lettre d qui est un terme in complexe; mais le premier membre contient trois termes complexes exprimez chacun par deux lettres.

Je nomme en général une égalité les deux expressions d'une même grandeur jointes ensemble par le signe $=$ qui est le signe de l'égalité, soit que les deux membres soient connus comme $a = b$, ou inconnus comme $x = y$, soit qu'il y ait une ou plusieurs inconnues dans le premier membre comme $x + ay = b$, ou $x + z - y = b$. De quelque manière que les inconnues soient exprimées, ou par addition $x + y$, ou par soustraction $x - y$, par multiplication xy , ou par division $\frac{x}{y}$; soit enfin que les inconnues soient élevées à différentes puissances $x^2 + y^2 = a$, ou soit que les inconnues soient une racine d'une puissance quelconque p , comme $\sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y} - 3z^2 = b$.

Mais je nomme une *Equation*, une égalité dans laquelle il n'y a qu'une seule inconnue ou linéaire comme $x = a$, ou élevée à la seconde puissance comme $x^2 = b$, & $x^2 + ax = b$, ou élevée à la troisième puissance dans le premier terme, & à toutes les puissances inférieures dans les autres termes moïens comme $x^3 + ax^2 - bx = c$. Enfin une Equation est une égalité dont la haute puissance de l'inconnue est élevée à un degré quelconque, tandis que la même inconnue unique est élevée dans les autres termes moïens à des puissances inférieures, ainsi l'égalité est le genre, & l'Equation est l'espèce; il y a des égalitez qui ne sont point des Equations, telles sont les égalitez doubles qui sont celles qui ont deux inconnues, les égalitez triples qui ont trois inconnues, les égalitez quadruples qui ont quatre inconnues, &c.

Mais toute Equation est une égalité simple, & il y en a d'une infinité de degrez, puisqu'on peut élever une inconnue à tous les degrez ou puissances à l'infini.

Si une Equation contient le zéro seul dans le second membre, cela se nomme une *Equation* égalée à zéro, comme $x^2 + ax - b = 0$, ou $x^2 + 3x - 18$

i ij

$= 0$, qui est une *Equation du second degré*, puisque l'inconnuë x est élevée à la seconde puissance, & la même inconnuë x est linéaire, ou au premier degré dans le second terme ax que je nomme le *terme moyen*; de même je nomme tous les termes où l'inconnuë x se trouve dans différens degrez multipliée par des nombres ou par des lettres connues, les termes moïens de l'Equation.

Les extrêmes sont le premier terme de l'Equation & le dernier terme.

Le premier terme d'une Equation contient la plus haute puissance de l'inconnuë, il est par conséquent entièrement inconnu.

Les termes moïens sont aussi entièrement inconnus, parce qu'ils sont exprimez par différens degrez de la lettre inconnuë multipliée par un nombre ou par une lettre connuë.

Le dernier terme est entièrement connu, il contient un nombre ou une lettre connuë ou plusieurs.

Je le nomme l'homogène de comparaison après Viette, car c'est à ce terme qu'il faut comparer tous les autres (quoiqu'ils soient tous homogènes) pour avoir la résolution de l'Equation, puisque ce dernier terme contient le produit de toutes les racines de l'Equation.

Des Problèmes simples ou des égalitez simples qui n'ont qu'une inconnuë, & des Equations simples ou du premier degré, leur formation & leur résolution.

Les Problèmes simples sont ceux qui se réduisent à une seule inconnuë.

Les égalitez simples sont celles qui n'ont qu'une seule inconnuë, dont on cherche la valeur.

Les Equations pures & simples ne sont que des égalitez simples, ainsi elles se résolvent de la même manière par des simples opérations du calcul que nous ex-

pliquerons ici en détail dans les différens cas possibles en faveur des commençans, parce que ces mêmes opérations sont les préparations nécessaires pour résoudre les Equations composées ou des degrez supérieurs.

PROBLÈME I.

Résolu par transposition & substitution.

Trouver un nombre inconnu x , qui étant augmenté d'une grandeur connue a , soit égal à b nombre connu.

1°. Par les conditions du Problème, j'ai $x + a = b$. Voilà une Equation pure & simple qui me donne un rapport, 2°. par transposition je fais passer la grandeur $+ a$ du premier membre dans le second en lui donnant un signe contraire $- a$, j'ai $x = b - a$. 3°. Puisque a & b sont des nombres connus par hypothèse, en substituant leurs valeurs dans cette Equation, par exemple, soit $a = 6$ & $b = 10$, ce qui donne $x = 10 - 6$. 4°. Abrégeant par soustraction les termes du second membre, j'ai $10 - 6 = 4$, donc $x = 4$, ce qu'il falloit trouver.

PROBLÈME II.

Résolu par transposition & substitution.

Trouver un nombre x qui étant ajouté à 37, égale 71.

1°. Par les conditions du Problème, j'ai $x + 37 = 71$, voilà l'Equation formée qui me donne le rapport désiré, 2°. Par transposition je fais passer $+ 37$ dans le second membre, en l'effaçant dans le premier membre, & l'écrivant dans le second membre avec le signe contraire $- 37$, ce qui donne $x = 71 - 37$, or $71 - 37 = 34$; d'où je conclus que $x = 34$, c'est la valeur désirée.

ANALYSE GÉNÉRALE, PROBLÈME III.

Par division & par transposition.

Trouver un nombre inconnu x qui étant multiplié par une grandeur inconnue a , soit égal au nombre donné b .

1°. J'ai par les conditions du Problème $a \times x$, ou $a x = b$. 2°. Soit $a = 6, b = 42$, substituant dans $a x = b$, les valeurs de a & de b , j'ai $6 \times x = 42$. 2°. Transposant & divisant tout par 6, j'ai $x = \frac{42}{6}$; or divisant 42 par 6, le quotient est 7, ce qui donne $x = 7$, ce qu'il falloit trouver.

PROBLÈME IV.

Résolu par multiplication.

Trouver un nombre inconnu x qui étant divisé par un nombre connu a , soit égal à un nombre connu b .

1°. Par les conditions du Problème, $\frac{x}{a} = b$.

2°. Je multiplie tout par a , ce qui donne $x = a b$, & le Problème est résolu, car puisque a & b sont des nombres connus, soit $a = 6, b = 7$, j'ai par substitution dans la dernière Equation $x = 6 \times 7 = 42$, donc $x = 42$, donc aussi la substitution donne dans la première Equation $\frac{x}{a} = 7$, ou $\frac{42}{6} = 7$, or puisque divisant 42 par 6, le quotient est 7, donc $42 = 6 \times 7$, donc $x = 42$, ce qu'il falloit trouver.

PROBLÈME V.

Par division.

Trouver un nombre quarré inconnu xx , qui soit égal à la racine x multipliée par un nombre connu a .

1°. Par les conditions du Problème j'ai cette Equation

$x^2 = ax$. 2°. Divisant tout par x , j'ai $x = a$, puisque a est un nombre connu, soit $a = 6$, j'ai $x = 6$, & $x = 36$, ce qu'il falloit trouver.

PROBLEME VI.

Par l'extraction de la racine.

Trouver un nombre quarré inconnu xx qui soit égal à un produit du nombre connu a multiplié par un autre nombre connu b .

1°. Par les conditions du Problème, j'ai $x^2 = ab$. Cette première Equation me donne le rapport connu, 2°. Je tire la racine quarrée de chaque membre, ce qui donne $x = \sqrt{ab}$. 3°. Puisque a & b sont des nombres connus, soit $a = 7$, $b = 5$, je substitue leurs valeurs après avoir multiplié $7 \times 5 = 35$, ce qui donne $x^2 = 35$, & tirant la racine quarrée, j'ai $x = \sqrt{35}$.

REGLE GENERALE

Pour résoudre les égalitez qui n'ont qu'une seule inconnue linéaire & les Equations du premier degré.

Leur résolution consiste à faire évanouir l'inconnue, en la mettant seule dans le premier membre, & les autres grandeurs toutes connues dans le second membre, ce qui donne la valeur de l'inconnue.

Pour y parvenir, il faut, 1°. par transposition faire passer les grandeurs connues dans le second membre; & si l'inconnue affecte quelque grandeur connue, il faut la dégager comme dans les exemples précédens, par l'addition, ou par soustraction, ou par multiplication, ou par division, ou par extraction de la racine selon la manière dont l'inconnue qu'on veut dégager est affectée par des grandeurs connues.

PROBLÈME VII.

Trois grandeurs étant connues, a, b, c , trouver une quatrième grandeur x , qui ait même rapport à la troisième c , que la seconde b à la première a .

1°. Le rapport de la seconde grandeur connue b à la première a , est connu, puisqu'il suffit pour avoir ce rapport d'en faire une fraction, dont la première a soit l'antécédent, & la seconde b le conséquent, comme $\frac{a}{b}$ c'est proprement diviser la première par la seconde, & comme ces deux grandeurs sont connues, leur quotient $\frac{a}{b}$ est connu aussi.

2°. Le rapport de l'inconnue x à la troisième grandeur c est le quotient ou la fraction $\frac{c}{x}$ qui est connue en partie, puisqu'on sçait par les conditions du Problème que $\frac{c}{x} = \frac{a}{b}$; mais comme c est inconnue & x est inconnue, ce rapport $\frac{c}{x}$ est en partie connu, & en partie inconnu.

3°. Par les conditions du Problème, j'ai cette équation $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ qui renferme toutes les grandeurs connues & l'inconnue avec leurs rapports, dans laquelle il faut ôter les fractions par la multiplication comme il suit.

4°. Je multiplie les deux membres par b , ce qui se fait en l'effaçant simplement dans le premier membre, & multipliant par b le seul numérateur du second membre, ce qui donne $a = \frac{cb}{x}$, voilà la première fraction détruite.

5°. Pour ôter la seconde fraction , je multiplie dans cette dernière équation les deux membres par x , ce qui donne $ax = bc$, voilà une équation préparée & sans fraction.

6°. Pour la résoudre , je divise tout par a , ce qui donne $x = \frac{bc}{a}$, & le Problème est résolu , puisque dans cette équation le second membre ne contient que des grandeurs connues sans aucune inconnue.

Résolution en nombres. si on substitue en la place des lettres connues leurs valeurs en nombres , on aura un quotient. Exemple. Soit $a = 5$, $b = 3$, $c = 15$, la substitution donne $\frac{bc}{a} = \frac{3 \times 15}{5} = \frac{45}{5} = 9$, donc $x = 9$, ou $x = 9$.

Remarques importantes & fondamentales.

1°. L'équation $x = \frac{bc}{a}$ est une formule ou une règle abrégée qui prescrit ce qu'il faut faire pour trouver une quatrième grandeur proportionnelle à trois grandeurs données ; c'est le fondement de la règle de trois ou de proportion.

2°. L'équation préparée $ax = bc$, démontre que le produit des termes extrêmes est égal au produit des termes moyens , c'est un Théorème fondamental de la proportion géométrique.

3. On peut trouver de même une infinité de Théorèmes & de Problèmes sur la proportion & sur la progression géométrique & sur les autres proportions,

PROBLÈME VIII.

Trouver la somme d'une progression géométrique continuë & décroissante à l'infini 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. &c. 0. dont le premier terme est 8, & le dernier est zéro.

Soit en général la somme inconnue $= x$. soit le premier terme $= a = 8$, le second terme $= b = 4$.

1°. La somme cherchée $= x$.

Le premier terme $a = 8$ est seulement antécédent.

Le dernier terme zéro n'est seulement que conséquent, mais tous les termes moïens compris entre ces deux extrêmes sont antécédens & conséquens tout ensemble.

Donc la somme de tous les antécédens est $x - 0$, ou simplement x ; mais la somme des conséquens est $x - 0 - a$, ou simplement $x - a$.

2°. Puisque tous les termes sont en proportion géométrique, donc tous leurs rapports sont égaux, ce qui donne cette analogie $x : x - a :: a : b$, c'est-à-dire la somme x de tous les antécédens est à la somme x de tous les termes moins le premier a , comme le premier a est au second b .

Ce qu'on peut aussi exprimer par cette égalité

$$\frac{x}{x-a} = \frac{a}{b}.$$

3°. Puisque par le Problème précédent le produit des extrêmes est égal au produit des termes moïens, cette multiplication donne $x \times b$. & $a \times x - aa$. d'où je tire l'égalité $b x = a x - aa$.

4°. Par transposition je fais passer $-aa$ du second membre dans le premier, & $b x$ du premier membre dans le second en changeant leurs signes, & j'ai $aa = a x - b x$, ou bien par arrangement pour avoir l'inconnue positive dans le premier membre, j'écris $a x - b x = aa$.

5°. Pour dégager l'inconnue, je divise les deux membres par $a - b$ qui affecte l'inconnue, ce qui se fait en mettant x seul dans le premier membre, & divisant le second membre par a , ce qui donne $x = \frac{a^2}{a-b}$.

Voilà la valeur de la somme cherchée x .

Car Substituant en la place des lettres connues leurs valeurs en nombres, j'ai $\frac{8^2}{8-4} = \frac{8 \times 8}{8-4} = \frac{64}{4} = 16$.

Donc la somme désirée $x = 16$. ce qu'il falloit trouver.

PROBLEME IX.

Trouver un quatrième nombre qui soit en proportion Arithmétique avec trois nombres donnez.

Ou bien, trois nombres étant donnez a, b, c . trouver un quatrième x dont l'excès sur le troisième c , soit égal à l'excès du second b sur le premier a .

1°. Par les conditions du Problème, j'ai cette égalité $x - c = b - a$, donc transposant $-c$ dans le second membre avec un signe contraire $+c$, j'ai $x = b - a + c$, & le problème est résolu.

2°. Substituant en la place des lettres connues leurs valeurs, soit $a = 3$. $b = 5$. $c = 13$, j'ai $x = 5 - 3 + 13 = 15$, donc $x = 15$, c'est le quatrième nombre désiré en proportion Arithmétique.

Remarque importante.

Si je change par transposition l'égalité $x - c = b - a$ en la suivante $x + a = b + c$, dans laquelle les termes extrêmes sont dans le premier membre & les moïens dans le second membre, j'aurai la démonstration de ce Théorème important, que la somme des extrêmes dans la proportion Arithmétique, est toujours

k ij

132 ANALYSE GÉNÉRALE,
égale à la somme des termes moïens.

On pourra découvrir & démontrer de la même manière tous les Théorèmes & les Problèmes de la proportion, & de la progression Arithmétique.

R È G L E

Pour les Egalitez simples qui ont deux inconnues avec plusieurs solutions.

P R O B L È M E X.

Soient deux nombres connus a & b , trouver un troisième nombre inconnu x , avec cette condition, qu'en multipliant par ce troisième nombre restant, chaque somme de deux de ces nombres pris à discrétion, on ait trois produits qui soient en progression Arithmétique.

1°. Suivant les conditions du Problème, j'ai $a + b \times x$, c'est le premier produit que j'écris à part en A.

A . . $a + b \times x$, ou . . $a x + b x$. premier produit.

B . . $a + x \times b$, ou . . $a b + b x$. second produit.

C . . $b + x \times a$, ou . . $a b + a x$. troisième produit.

2°. J'ai $a + x$, & je multiplie leur somme par b , j'ai le second produit $a b + b x$ que j'écris aussi à part vers B.

3°. J'ai $b + x$, je multiplie leur somme par a , j'ai le troisième produit $a b + a x$ que j'écris encore à part vers C.

4°. Par les conditions du Problème ces trois produits doivent être en proportion Arithmétique, c'est-à-dire, que l'excès du premier sur le second, doit être égal à l'excès du second sur le troisième, ou ce qui revient au même la différence du premier au second, doit être égal à la différence du second au troisième.

5°. Pour accomplir cette condition, je compare ensemble ces produits deux à deux, dont je forme une équation, ce qui donne $ax + bx - ab = ab + bx - ab - ax$, dans laquelle le second produit est dans les deux membres avec des signes contraires & par transposition, mais le troisième produit a le signe —, parce qu'il est dans le second membre.

6°. Je prépare cette équation en faisant passer par transposition dans le premier membre toutes les grandeurs où l'inconnue se rencontre, & je fais passer les autres grandeurs connues du premier membre dans le second, en leur donnant des signes contraires, ce qui donne $ax + bx - bx - bx + ax = ab - ab + ab$.

J'abrége cette expression en effaçant les grandeurs qui se trouvent avec des signes contraires dans le même nombre, & ajoutant ensemble celles qui ont le même signe, ce qui donne l'équation abrégée, $2ax - bx = ab$.

7°. Je divise les deux membres de cette dernière équation par $2a - b$ qui affecte l'inconnue x que je veux dégager, ce qui donne $x = \frac{ab}{2a - b}$ & le problème est résolu, mais il ne l'est pas pleinement, car on peut encore combiner ensemble ces trois produits, & les arranger ensemble de deux manières qui donneront encore deux autres valeurs de x .

8°. La première manière en prenant en A le premier produit avec les signes +, & le troisième produit vers C avec les signes — pour en faire le premier membre d'une équation, & pour le second membre de cette équation suivante le troisième produit C avec les signes +, avec le second produit B avec les signes — comme il suit.

A.	C.	C.	B
$ax + bx - ab - ax$	$= ab + ax - ab - bx$		

k iij

qui donne par transposition $ax + bx - ax - ax + bx = ab + ab - ab$. & abrégant cette expression; J'ai $2bx - ax = ab$, divisant cette égalité par $2b - a$ qui affecte l'inconnue x pour la dégager, j'ai $x = \frac{ab}{2b - a}$ qui est une seconde valeur de x .

9°. La seconde manière de combiner ces produits consiste à former une équation, dont le premier membre contienne le second produit B avec les signes $+$ avec le premier produit A & les signes $-$ dont le second membre contienne le premier produit A avec les signes $+$, & le troisième produit C avec les signes $-$ comme il suit

B.	A.	A.	C.
$ab + bx + ax - ab$	$= ax + bx - ab - ax$		

Je fais passer par transposition tous les termes où est l'inconnue x , du second membre dans le premier; & les autres termes où l'inconnue ne se trouve pas du premier membre dans le second en changeant leurs signes, ce qui donne $bx - ax - bx - ax - bx + ax = -ab - ab$.

J'abrège cette expression par l'addition des grandeurs semblables qui ont le même signe, & par la soustraction de celles qui ont des signes différens, ce qui donne $-ax - bx = -2ab$, comme toutes ces grandeurs sont négatives je les rends positives par transposition, ainsi $2ab = ax + bx$.

Pour dégager l'inconnue x qui est affectée; c'est-à-dire, multipliée par $a + b$, je divise les deux membres par $a + b$ ce qui se fait en divisant le premier membre par cette grandeur, & mettant x seul dans le second membre ainsi $\frac{2ab}{a + b} = x$ & par arrangement $x = \frac{2ab}{a + b}$ c'est la troisième valeur de x .

D'où il suit que dans ce problème il y a trois solu-

tions, puisqu'il y a trois valeurs de x qui satisfont, & qui satisfont seules aux conditions proposées, car on ne peut pas former d'autres équations pour avoir d'autres valeurs de x dont il y a trois valeurs de x , & par conséquent pas davantage.

Résolution en nombre.

Soit $a = 5$. $3 = b$. substituant ces valeurs à la place de ces lettres dans la première valeur $x = \frac{ab}{2a-b}$, j'ai

$$x = \frac{5 \times 3}{10-3} = \frac{15}{7} = 2 \frac{1}{7}.$$

Dans la seconde valeur $x = \frac{ab}{2b-a}$, j'ai $x = \frac{5 \times 3}{6-5} = \frac{15}{1} = 15$.

Et dans la troisième valeur $x = \frac{ab}{a+b}$, j'ai $x = \frac{5 \times 3}{5+3} = \frac{15}{8} = \frac{19}{4} = 3 \frac{3}{4}$.

Or ces trois nombres trouvent $2 \frac{1}{7}$, 15 , $3 \frac{3}{4}$. satisfont tous également aux conditions proposées dans le Problème, & ils satisfont seuls, parce qu'il est impossible d'en trouver d'autres qui puissent satisfaire à ces mêmes conditions.

Démonstration.

1°. Je dis que le nombre entier 15 satisfait aux conditions proposées, car prenant successivement deux de ces trois nombres $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{5}$, $\frac{x}{15}$, comme on voudra, en multipliant la somme des deux par le troisième, j'aurai trois produits qui seront en progression Arithmétique.

Car $3 + 5 = 8$, or $8 \times 15 = 120$. premier produit.

De même $3 + 15 = 18$, or $18 \times 5 = 90$. second prod.

Pareillement $5 + 15 = 20$, or $20 \times 3 = 60$. 3^{me}. prod.

Or ces trois produits 120, 90, 60, sont en proportion Arithmétique, puisque l'excès du premier sur le second est 30, & l'excès du second sur le troisième est encore 30. puisque $120 - 90 = 30$, & $90 - 60 = 30$, or $30 = 30$, ce qu'il falloit trouver.

2°. Le nombre $2\frac{1}{7}$ satisfait aussi, car en prenant successivement deux à deux les trois nombres 5, 3, & $2\frac{1}{7}$ comme on voudra & multipliant la somme de deux de ces nombres par le troisième restant, on aura les trois produits $\frac{180}{7}$, $\frac{150}{7}$, $\frac{120}{7}$, qui sont encore en progression Arithmétique, puisque l'excès ou la différence est toujours de 30.

3°. Le nombre $3\frac{1}{4}$ satisfait encore, car prenant deux à deux les trois nombres 5, 3, & $3\frac{1}{4}$, comme on voudra, & multipliant leur somme par le troisième restant, on aura les trois produits $\frac{135}{4}$, $\frac{120}{4}$, $\frac{105}{4}$, qui sont encore en proportion Arithmétique, puisque leur excès ou leur différence est toujours 15.

Remarque. La résolution la plus élégante est celle des nombres entiers 3. 5. 15. celle des fractions est moins parfaite. Mais on peut avoir une infinité d'autres nombres entiers que ces trois premiers, qui donneront une infinité de solutions ou valeurs de x , car si je suppose $x = 64$, & $6 = 140$, substituant ces nombres à la place des lettres dans les trois égalitez ci-dessus j'aurai trois autres valeurs de x ; sçavoir, 60, 105, 420: mais pour avoir la suite infinie de tous les nombres qui peuvent donner différentes valeurs de x à l'infini, c'est une nouvelle condition ajoutée à ce Problème qui en change la nature & le rend indéterminé, au lieu que les conditions précédentes le rendoient déterminé; dans ce cas il faut se servir des regles particulières aux Problèmes

indéterminez

indéterminez qui seront expliquées dans la suite.

PROBLEME XI.

Trouver deux grandeurs inconnues dont on connoît la somme & la différence.

1°. Je nomme ces deux grandeurs, sçavoir la plus grande x & la petite y .

Soit leur somme $= a$, & leur différence $= b$.

Donc j'ai deux rapports connus par les conditions du problème, le premier rapport connu est, que leur somme $= a$, ce qui donne la première équation $x + y = a$.

Le second rapport connu, est que leur différence $= b$, ce qui donne la seconde équation $x - y = b$.

Le problème est déterminé, puisque j'ai autant d'équations que d'inconnues.

Le Résolution consiste à trouver la valeur de chacune de ces deux inconnues x & y , ce qui se fait en dégagant d'abord x , en sorte qu'elle demeure seule dans le premier membre d'une équation, & que le second membre ne contienne que des valeurs inconnues, qui seront la valeur de x .

De même, il faut dans une autre équation mettre y seule dans le premier membre, & que le second membre ne contienne que des valeurs connues qui seront la valeur de y comme il suit.

2°. Dans la première équation $x + y = a$, j'ai par transposition $x = a - y$, voilà la première équation préparée.

De même dans la seconde équation $x - y = b$, j'ai par transposition $x = b + y$, voilà la seconde équation préparée.

3°. Je compare les seconds membres de ces deux

Analyse.

équations, dont je fais cette troisième équation $a - y = b + y$, qui donne par transposition $a - b = 2y$, & par arrangement j'ai $2y = a - b$, où l'inconnue est dans le premier membre.

4°. Je divise ces deux membres par 2, ce qui donne $y = \frac{a-b}{2}$, c'est la valeur de y .

5°. Je substitue cette valeur de y en sa place dans l'une ou l'autre des deux premières équations préparées pour trouver la valeur de l'inconnue x .

Or dans la substitution, je conserve les signes de la valeur de y , lorsque je mets sa valeur en la place de $+y$, c'est $+\frac{a-b}{2}$: mais au contraire, lorsque je substitue cette valeur en la place de la grandeur négative $-y$, je change les signes de sa valeur & décris $-\frac{a-b}{2}$, cette remarque est générale pour toutes les substitutions.

6°. Si je substitue la valeur de $y = \frac{a-b}{2}$ dans la seconde équation préparée $x = b + y$, j'aurai $x = b + \frac{a-b}{2}$, & pour abréger cette expression ou la rendre plus simple, j'ôte de l'entier b , la fraction $-\frac{b}{2}$, le reste donne $+\frac{b}{2}$, ce qui me donne l'expression plus simple $x = \frac{a+b}{2}$, & le problème est résolu.

Cette résolution générale en lettres donne toutes les résolutions possibles en nombres; il suffit de substituer des nombres à la place des lettres connues. Exemple. Soit $a = 8$, $b = 2$, la substitution de ces nombres dans la formule $x = \frac{a+b}{2}$ donne $x = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$, donc $x = 5$.

La même substitution dans la valeur en lettres de y ,

$y = \frac{a-b}{2}$ donne $y = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$, donc $y = 3$.

Donc les deux nombres cherchez sont $x = 5$, & $y = 3$, dont la somme $= a = 8$, & la différence $= b = 2$, ce qu'il falloit trouver.

7°. Pareillement si je substitue la valeur de $y = \frac{a-b}{2}$ dans la première équation proposée $x = a - y$.

Comme y est négatif, je change les signes de sa valeur $+\frac{a-b}{2}$ ce qui donne $-\frac{a+b}{2}$, & substituant, j'ai $x = a - \frac{a+b}{2}$, je réduis par soustraction ce second membre à sa plus simple expression en retranchant la fraction $-\frac{a}{2}$ de l'entier a , le reste est $+\frac{a}{2}$ ainsi j'ai le second membre réduit à cette expression plus simple $+\frac{a+b}{2}$ c'est la valeur de x cherchée par l'autre manière.

PROBLEME XII.

Deux nombres a & b étant donnez, trouver un troisième nombre inconnu x qui soit en proportion harmonique avec les deux nombres donnez.

La proportion harmonique est celle qui se trouve entre trois nombres comme 3, 4, 6, qui ont cette propriété; Sçavoir, que l'excès du moien 4 sur le plus petit 3, est à 2, l'excès du plus grand 6 sur le moien 4, comme le plus petit nombre 3 est au plus grand 6, car $3 : 6 :: 4 - 3 : 6 - 4$; c'est-à-dire $3 : 6 :: 1 : 2$. Cette proportion harmonique renferme la proportion géométrique, puisqu'on y considère l'équimultiplicité 6 qui est double de trois, & la différence 2, qui est double de la différence 1. elle renferme aussi la proportion Arithmétique, puisqu'on y considère l'égalité dans l'ex-

cès & dans la différence, car $4 - 3 = 1$, l'excès ou la différence est égale au tiers du plus petit nombre 3 : de même $6 - 4 = 2$, est l'excès ou la différence égale au tiers du plus grand nombre 6.

Comme cette proportion se trouve dans les accords de la Musique, & qu'elle détermine le rapport de l'unisson à l'octave par le rapport de 3 à 6, le rapport de la quinte à l'octave par 4 à 6, & le rapport de la quarte par 3 à 4, on nomme cette proportion harmonique.

Or les nombres donnez sont a & b , le nombre inconnu x que l'on cherche renferme trois cas, car on peut chercher le plus petit des trois nombres, ou le plus grand, ou le moïen.

Premier cas. Pour trouver le plus petit nombre x , des trois, soit le moïen $= a$, & le plus grand $= b$, c'est x, a, b .

Donc par les conditions du problème, j'ai $x : b :: a - x : b - a$. ensuite multipliant les extrêmes & les moïens, j'ai l'équation $bx - ax = ab - bx$.

Par transposition je fais passer l'inconnuë du second membre dans le premier, & j'ai $bx - ax + bx = ab$, & abrégeant, j'ai $2bx - ax = ab$.

Pour dégager l'inconnuë x dans le premier membre, où elle se trouve multipliée par $2b - a$, je divise les deux membres par ce binôme, ce qui donne $x = \frac{ab}{2b - a}$ & le problème est résolu en lettres.

Résolution en nombres. Je substitue les nombres connus en la place des lettres. Exemple. Soit $a = 4$, $b = 6$, dans $x = \frac{ab}{2b - a}$ la substitution donne $x = \frac{4 \times 6}{2 \times 6 - 4} = \frac{24}{12 - 4} = \frac{24}{8} = 3$. donc 3 est le plus petit nombre cherché.

Second cas. Pour trouver le nombre moïen x de la proportion harmonique, soit a le plus petit, & b le plus

grand, j'ai ces trois nombres, dans cet ordre a, x, b .

Donc par les conditions du problème j'ai $a : b :: x : a : b :: x$, en multipliant les extrêmes & les moïens, j'ai $ab - ax = bx - ab$, ensuite par transposition $-ax - bx = -ab - ab$, en changeant tous les signes, j'ai $ax + bx = 2ab$.

Ensuite pour dégager l'inconnuë x & la laisser seule dans le premier membre, je divise tout par $a + b$ qui affecte ou multiplie l'inconnuë, ce qui donne $x = \frac{2ab}{a+b}$ & le problème est résolu en lettres.

Résolution en nombres. Soit $a = 3$. $b = 6$, substituant ces valeurs dans $x = \frac{2ab}{a+b}$ j'ai $\frac{2 \times 3 \times 6}{3+6} = \frac{36}{9} = 4$. donc $x = 4$, c'est le nombre moïen cherché en proportion harmonique.

Troisième cas. Pour trouver le plus grand nombre x des trois qui sont en proportion harmonique dans cet ordre a, b, x . par les conditions du Problème, j'ai $a : x :: b : a : x :: b$. ensuite multipliant les extrêmes & les moïens, j'ai $ax - ab = bx - ax$, & par transposition & addition $2ax - bx = ab$.

Pour dégager l'inconnuë & la laisser seule dans le premier membre, je divise tout par $2a - b$, ce qui donne $x = \frac{ab}{2a-b}$ & le Problème est résolu en lettres.

Résolution en nombres. Il faut dans ce troisième cas que $2a$ soit plus grand que b , autrement on ne pourroit le soustraire. Soit $a = 3$. $b = 4$.

Substituant ces valeurs en la place des lettres dans $x = \frac{ab}{2a-b}$ j'ai $x = \frac{3 \times 4}{2 \times 3 - 4} = \frac{12}{6-4} = \frac{12}{2} = 6$. donc $x = 6$ est le plus grand des trois nombres de la proportion harmonique désiré.

PROBLÈME XIII.

Un Pere fait son Testament avec plusieurs conditions.

1°. Il laisse mil écus à l'aîné de ses enfans avec la onzième partie du reste, il laisse au second deux mil écus & la onzième partie du reste, il laisse au troisième trois mil écus & la onzième partie de ce qui reste, & ainsi de suite jusqu'au dernier qui a le reste de ses freres.

2°. Il se trouve après le partage qu'ils ont tous également; on demande quel étoit le bien du Pere, le nombre de ses enfans, & la part de chacun?

D'abord je nomme le legs de mil écus de l'aîné $= a$, soit b la onzième partie de ce qui reste, & soit x le bien du Pere.

Suivant les conditions du problème, la part de l'aîné est $a + \frac{x-a}{b}$, ou bien convertissant l'entier a en une fraction de même dénomination, sans changer sa valeur $\frac{ab}{b}$ j'ai pour la part de l'aîné $\frac{ab+x-a}{b}$ j'ôte cette part du bien total du pere $= x$, le reste est $x - \frac{ab+x-a}{b}$ ensuite convertissant l'entier x en une fraction sans changer sa valeur pour en soustraire la fraction, j'ai $\frac{bx}{b}$ qui donne par soustraction $\frac{bx-ab-x+a}{b}$ c'est le premier reste.

Or sur ce premier reste le second fils prend deux mil écus $= 2a$, donc le second reste est $\frac{bx-ab-x+a}{b} - 2a$ mais pour ôter cet entier $2a$ de la fraction qui le précède, je le convertis en une fraction d'égale valeur qui ait le même dénominateur $\frac{2ab}{b}$ ce qui donne $\frac{bx-ab-2ab-x+a}{b}$ & par addition $\frac{bx-3ab-x+a}{b}$ pour le second reste, &

la onzième partie est $\frac{bx - 3ab - x + a}{bb}$.

Donc la part du second fils est $2a + \frac{bx - 3ab - x + a}{bb}$ mais en réduisant l'entier $2a$ en fraction qui ait le même dénominateur bb , c'est $\frac{2abb}{bb}$ qui est de même valeur que $2a$, & qui donne $\frac{2abb}{bb} + \frac{bx - 3ab - x + a}{bb}$, ou simplement $\frac{2abb + bx - 3ab - x + a}{bb}$.

Présentement par la seconde condition du problème, la part de l'aîné est égale à la part du second, donc $\frac{2abb + bx - 3ab - x + a}{bb} = \frac{abb + x - a}{b}$ pour réduire au même dénominateur ces deux fractions, je multiplie les deux termes de la seconde par b , ce qui donne $\frac{2abb + bx - 3ab - x + a}{bb} = \frac{abb + bx - ab}{bb}$, ensuite j'efface le dénominateur commun, ce qui donne l'équation sans fractions $2abb + bx - 3ab - x + a = abb + bx - ab$, qu'il faut résoudre.

D'abord je la prépare par transposition, en faisant passer dans le premier membre toutes les grandeurs inconnues, & dans le second membre les grandeurs connues en changeant leurs signes, ce qui donne $bx - bx - x = abb - 2abb - ab + 3ab - a$, ensuite ôtant par soustraction les moindres grandeurs semblables des plus grandes, j'ai $-x = -abb + 2ab - a$, changeant tous les signes pour rendre l'inconnue positive, j'ai $x = abb - 2ab + a$, & le problème est résolu en lettres.

Résolution en nombres. Puisque par les conditions du problème $a =$ mil écus ou 1000, $b = 11$, donc $bb = 121$ & $abb = 1000 \times 121 = 121000$, & $2ab = 2 \times 11000 = 22000$, substituant ces nombres en la place des lettres, dans la valeur de $x = abb - 2ab + a$.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{J'ai } abb & = & 12 \ 10 \ 00 \\
 - 2ab & = & 2 \ 20 \ 00 \\
 \hline
 + abb - 2ab & = & 9 \ 90 \ 00 \\
 + a & = & 10 \ 00 \\
 \hline
 \text{donc } x & = & 10 \ 00 \ 00
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 + abb & = & 12. \ 10. \ 00. \\
 + a & = & 10. \ 00. \\
 \hline
 + abb + a & = & 12. \ 20. \ 00. \\
 - 2ab & = & - 2. \ 20. \ 00. \\
 \hline
 \text{donc } x & = & 10. \ 00. \ 00.
 \end{array}$$

bien du Pere.
 ôtez
 $- a = 10. \ 00.$ legs de l'aîné.
 reste $9. \ 90. \ 00.$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{fa } \frac{1}{11} & = & 0. \ 90. \ 00. = \frac{ab+x-a}{b} \\
 = & \frac{11.00.00. + 10.00.00. - 10.00.}{11.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{ou } + 10. \ 00. \ 00. & = & x \\
 + 1. \ 10. \ 00. & = & ab \\
 \hline
 = + 11. \ 10. \ 00. & = & ab + x \\
 - a & = & 10. \ 00.
 \end{array}$$

$$= + \frac{11.00.00. - ab + x - a}{11} = 90. \ 00.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Or le legs de l'aîné} \quad . \quad . \quad 10. \ 00. \\
 \text{plus la } \frac{1}{11} \text{ partie du reste} \quad 0. \ 90. \ 00. \\
 \hline
 \text{Total de la part de l'aîné} \quad 1. \ 00. \ 00. \\
 \text{dix mil écus.}
 \end{array} \right.$$

On

Ou bien je dis simplement le bien total du pere est $x = 100.00.0$, = cent mil écus, dont j'ôte la part de l'aîné égale à dix mil écus ; sçavoir mil écus pour son legs, & neuf mil écus pour la onzième partie du reste. puisque de cent mil écus, ôtant mil écus, le reste est quatre-vingt-dix-neuf mil écus, dont la onzième partie est neuf mil écus, donc la part de l'aîné est dix mil écus, & il reste quatre-vingt-dix mil écus pour les autres enfans.

Sur quoi le second fils prend deux mil écus pour son legs, il reste quatre-vingt-huit mil écus, dont la onzième partie est huit mil écus, donc la part du cadet est de dix mil écus, & par conséquent égale à la part de son aîné.

Or ôtant dix mil écus de quatre-vingt-dix mil écus, il reste quatre-vingt mil écus pour les autres enfans.

Sur quoi le troisième enfant prend son legs de trois mil écus, il reste soixante & dix-sept mil écus, dont il prend encore la onzième partie qui font sept mil écus, ce troisième fils a dix mil écus, & reste pour les autres enfans soixante & dix mil écus.

Continuant ainsi la division du reste, en prenant d'abord un legs de mil écus plus fort pour chacun des enfans suivans & la onzième partie du reste ; je trouve enfin, 1°. que le bien du pere est de cent mil écus, 2°. qu'il y a dix enfans, 3°. qu'ils ont chacun dix mil écus & voilà toutes les conditions du Problème proposé, ce qu'il falloit trouver.

Calcul.

Le bien total du pere	100.	00.	00.
j'ôte le legs de l'aîné . . .	10.	00.	
<hr/>			
premier reste . . .	90.	90.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$. . .	90.	00.	
<hr/>			

Analyse.

m

2 ^d . reste	. . .	9.	00.	00.
j'ôte le legs du 2 ^d . fils	. . .		20.	00.
3 ^e . reste	. . .	8.	80.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$. . .		80.	00.
4 ^e . reste	. . .	8	00.	00.
j'ôte le legs du 3 ^e . fils	. . .		30.	00.
5 ^e . reste	. . .	7.	70.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$ partie	. . .		70.	00.
6 ^e . reste	. . .	7.	00.	00.
dont j'ôte le legs du 4 ^e . fils	.		40.	00.
7 ^e . reste	. . .	6.	60.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$ partie	. . .		60.	00.
8 ^e . reste	. . .	6.	00.	00.
dont j'ôte le legs du 5 ^e . fils	.		50.	00.
9 ^e . reste	. . .	5.	50.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$ partie	. . .		00.	00.
10 ^e . reste	. . .	5.	00.	00.
dont j'ôte le legs du 6 ^e . fils	.		60.	00.
11 ^e . reste	. . .	4.	40.	00
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$. . .		40.	00.
12 ^e . reste	. . .	4.	00.	00.
j'ôte le legs du 7 ^e . fis	. . .		70.	00.
13 ^e . reste	. . .	3.	30.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$. . .		30.	00.
14 ^e . reste	. . .	3.	00.	00.
dont j'ôte le legs du 8 ^e . fils	.		80.	00.

15 ^e . reste	. . .	2.	20.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$. . .		20.	00.
16 ^e . reste	. . .	2.	00.	00.
dont j'ôte le legs du 10 ^e . fils.			90.	00.
17 ^e . reste	. . .	1.	10.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$. . .		10.	00.
18 ^e . reste	. . .	1.	10.	00.
dont j'ôte le legs du 10 ^e . fils.		1.	10.	00.
19 ^e . reste	. . .	0.	00.	00.
dont j'ôte la $\frac{1}{11}$ est	. . .		0.	

D'où il suit que le dixième des enfans a précisément dix mil écus, par conséquent sa part est égale à celle de l'aîné, & tous les enfans ont également, cependant il n'a qu'un legs, & il ne peut avoir la onzième partie du reste, puisqu'il ne reste rien.

Remarque première. On peut résoudre de la même manière une infinité de Problèmes. Or le nombre des personnes qui partagent également est toujours égal au dénominateur moins un de la fraction qui exprime le premier reste, ici ce dénominateur est $b = 11$, or $11 - 1 = 10$, c'est le nombre des enfans, c'est aussi la racine quarrée du bien total du pere $= x = 100$ mil écus, en prenant mil écus pour l'unité.

Remarque seconde. Le legs des enfans croît toujours de l'unité depuis l'aîné jusqu'au dixième, c'est la progression des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. ce qui fait que le dixième n'a seulement que son legs de dix mil écus, & n'a point le $\frac{1}{11}$ du restant, puisqu'il reste zero ou rien, cependant sa part est égale à celle des autres enfans qui ont un legs particulier joint à la onzième partie du restant dans le bien du pere.

Des égalitez simples qui ont trois inconnuës.

PROBLÈME XIII.

Trouver trois grandeurs x, y, z , en nombres avec ces conditions.

1°. Que le premier nombre x avec la moitié des deux autres $= 25$.

2°. Que le second nombre y avec le tiers des deux autres x & $y = 26$.

3°. Que le troisième nombre z , avec la moitié des deux autres x & $y = 29$.

Par les conditions du Problème, j'ai les trois égalitez ou équations suivantes.

$$\text{Première égalité. } x + \frac{y+z}{2} = 25.$$

$$\text{Seconde . . . } y + \frac{x+y}{3} = 26.$$

$$\text{Troisième égalité } z + \frac{x+y}{2} = 29.$$

D'abord pour ôter les fractions de chacune de ces équations, je multiplie les deux termes par le dénominateur de la fraction, ce qui me donne les trois égalitez suivantes réduites sans fractions.

$$2x + y + z = 50. \text{ première égalité réduite.}$$

$$3y + x + z = 78. \text{ seconde égalité réduite.}$$

$$2z + x + y = 29. \text{ troisième égalité réduite.}$$

Ensuite je choisis l'une de ces égalitez ou équations qui puisse me donner par transposition une valeur de l'une des inconnuës, par exemple, je trouve que la première me donne par transposition $y = 50 - 2x - z$, c'est la première valeur de y , que je nomme la première

égalité ou équation dérivée, que j'écris à part pour y avoir recours.

Par règle générale, je substitué cette valeur de y dans les deux autres égalitez réduites pour avoir autant d'égalitez dérivées comme il suit.

La substitution de cette valeur dans la seconde égalité réduite donne $50 - 6x - 3z + x + z = 78$, seconde égalité dérivée.

La même substitution dans la troisième égalité réduite donne $2z + x + 50 - 2x - z = 58$, c'est la troisième égalité dérivée.

Ensuite je prépare ces trois égalitez dérivées, ainsi la seconde égalité dérivée donne par soustraction $150 - 5x - 2z = 78$, laquelle par transposition donne $150 - 78 = 5x + 2z$, & par soustraction $27 = 5x + 2z$, & par arrangement mettant les inconnuës dans le premier membre, j'ai $5x + 2z = 27$, c'est la seconde égalité dérivée préparée.

Je prépare de même la troisième égalité dérivée, $2z + x + 50 - 2x - z = 58$, par soustraction j'ai d'abord $z - x + 50 = 58$, & par transposition & soustraction $z - x = 58 - 50 = 8$, ou $z - x = 8$, & enfin par transposition pour dégager z & la laisser seule dans le premier membre, j'ai $z = 8 + x$, c'est une valeur de la troisième inconnuë z , mais encore inconnuë en partie.

Présentement je substitué cette valeur de z dans la seconde égalité dérivée & préparée $5x + 2z = 72$, la substitution donne $5x + 16 + 2x = 72$, par transposition j'ai $5x + 2x = 72 - 16$, & par addition j'ai $7x = 56$, pour dégager l'inconnuë, je divise tout par 7 multiplicateur de l'inconnuë, j'ai $x = \frac{56}{7}$ or $\frac{56}{7} = 8$, donc $x = 8$, c'est la valeur trouvée de la première inconnuë, entièrement connuë.

Je substitué cette valeur entièrement connuë de x dans

l'égalité $z = x + 8$, qui est une valeur de z en partie inconnue, ce qui donne $z = 8 + 8$, ou $z = 16$, c'est la valeur de la troisième inconnue, qui est entièrement connue.

Enfin pour avoir la valeur de y seconde inconnue, je substitue ces valeurs trouvées de x & de z , 8 & 16 dans la première équation dérivée $y = 50 - 2x - z$, ce qui donne $y = 50 - 16 - 16$, ou $y = 50 - 32$, or $50 - 32 = 18$, donc $y = 18$, c'est la valeur entièrement connue de y ; par conséquent les trois grandeurs x, y, z , sont entièrement connues, $x = 8, y = 18, z = 16$, donc le Problème est entièrement résolu en lettres.

Or substituant ces valeurs dans les trois premières égalitez, 1°. $x + \frac{y+z}{2} = 25$, donne $8 + \frac{18+16}{2} = 25$ ou $8 + 9 + 8 = 25$, 2°. $y + \frac{x+z}{3} = 26$, donne $18 + \frac{8+16}{3} = 26$, ou $18 + \frac{24}{3}$ ou $18 + 8 = 26$, 3°. $z + \frac{x+y}{2} = 29$, donne $16 + \frac{8+18}{2} = 29$, ou $16 + \frac{26}{2} = 16 + 13 = 29$; voilà une résolution entière & parfaite qui peut servir de modèle pour tous les Problèmes semblables.

P R O B L E M E X I V .

Pour trois grandeurs inconnues.

Trouver trois grandeurs inconnues x, y, z , avec ces conditions.

1°. Qu'ajoutant une grandeur connue a à la première inconnue x , la somme soit égale à la somme des deux autres inconnues y & z .

2°. Qu'ajoutant la même grandeur connue a à la seconde inconnue y , la somme soit égale au produit des deux autres inconnues x, y, z , multipliée par une autre grandeur connue b .

3°. Qu'ajoutant la même grandeur connue a à la troisième inconnue z , elle soit égale au produit des deux autres inconnues x & y , multipliées par une troisième grandeur connue c .

Le Problème est déterminé, puisqu'il n'y a que trois inconnues x, y, z , & que je puis former par les conditions du Problème les trois équations ou égalitez suivantes.

Equations formées suivant les conditions du Problème.

$$1^{\text{re}}. \quad . \quad . \quad x + a = y + z.$$

$$2^{\text{de}}. \quad . \quad . \quad y + a = bx + bz.$$

$$3^{\text{e}}. \quad . \quad . \quad z + a = cx + cy.$$

Après avoir formé ainsi ces trois égalitez ou équations suivant les conditions proposées, il s'agit de trouver la valeur de chacune des trois inconnues, x, y, z , comme il suit.

D'abord dans la première égalité $x + a = y + z$, j'ai par transposition $x = y + z - a$, c'est une première valeur de x .

Dans la seconde égalité $y + a = bx + bz$, j'ai par transposition $y = bx + bz - a$, c'est une première valeur de y .

Dans la troisième égalité $z + a = cx + cy$, j'ai par transposition $z = cx + cy - a$, c'est une première valeur de z .

Ces trois valeurs ne sont pas entièrement connues, puisqu'elles sont mêlées de grandeurs connues & d'inconnues dans le second membre, pour avoir promptement une valeur de chacune de ces inconnues, dans une égalité dont le second membre ne contienne que des gran-

deux entièrement connues, je compare ensemble ces trois égalitez comme il suit.

1°. Je cherche la valeur de la première inconnue x . Or dans la première égalité $x + a = y + z$, j'ai par transposition $x = y + z - a$, c'est une première valeur de x , que j'écris à part en A, puisqu'elle n'est pas entièrement connue, & je mettrai au dessous toutes les autres valeurs de x que je trouverai.

Valeurs de x mises à part.

A $x = y + z - a$. première valeur de x

B $x = \frac{y+a}{b} - z$. seconde valeur de x .

C $x = \frac{z}{c} - y + \frac{a}{c}$. troisième valeur de x .

2°. Dans la seconde égalité $y + a = bx + bz$, en renversant l'ordre des membres, & mettant par arrangement le premier en la place du second, & le second en la place du premier, j'ai $bx + bz = y + a$, & par transposition laissant seule l'inconnue x , j'ai $bx = y + a - bz$, pour dégager x je divise tout par b qui la multiplie, ce qui donne $x = \frac{y+a}{b} - z$, c'est une seconde valeur de x que j'écris à part en B.

3°. dans la troisième égalité $z + a = cx + cy$, j'ai par arrangement $cx + cy = z + a$, & par transposition $cx = z + a - cy$, pour dégager x qui est affectée ou multiplié par c , je divise tout par c , ce qui donne $x = \frac{z}{c} - y + \frac{a}{c}$, c'est la troisième valeur

de x que j'écris à part vers C.

4°. Pour comparer ensemble ces trois différentes valeurs de x , que je nomme les premières égalitez, il faut en former des égalitez ou équations, que je nomme les secondes égalitez, dans l'ordre & la manière qui suit.

D'abord je prends en A le second membre de la première

miere valeur de x dont je fais le premier membre d'une nouvelle ou seconde égalité, & pour second membre je prends en B le second de la seconde valeur de x . ce qui me donne la première des secondes égalitez $y + z = a = \frac{y+a}{b} = z$, j'ai par transposition $2z = \frac{y}{b} + y = \frac{a}{b} + a$, dont le second membre ne contient que des grandeurs toutes connues.

Je réduis ce second membre à sa plus simple expression, de cette sorte de l'entier a je fais une fraction sans changer sa valeur en le multipliant par le dénominateur b de la fraction $\frac{a}{b}$, & lui donnant le même dénominateur b , ce qui donne la plus simple expression $\frac{ab+a}{b}$ pour le second membre.

Pour réduire le premier membre à sa plus simple expression, je multiplie l'entier y par b dénominateur de la fraction $\frac{y}{b}$ & lui donnant le même dénominateur b pour avoir la plus simple expression $+ \frac{by-y}{b}$.

Par ce moïen j'ai l'équation ou l'égalité réduite à sa plus simple expression $2z + \frac{by-y}{b} = \frac{ab+a}{b}$, c'est la première des secondes égalitez abrégées.

5°. Je compare de même la première valeur de x avec la troisième, c'est-à-dire, j'en forme une égalité en prenant leurs seconds membres en A & en C, ce qui donne $y + z = a = \frac{z}{c} = y \frac{a}{c}$, qui donne par transposition $2y + z = \frac{z}{c} = \frac{a}{c} + a$.

Puisqu'il y a encore des entiers & des fractions exprimées par les mêmes lettres y & a , je les réduis à leur plus simple expression de cette sorte.

Analyse.

Dans le premier membre, de l'entier y je fais une fraction sans changer sa valeur en le multipliant au numérateur par le dénominateur c de la fraction $\frac{z}{c}$ & lui donnant ce même dénominateur c , ce qui donne la plus simple expression $\frac{cz-z}{c}$.

Dans le second membre, je réduis de même l'entier a & la fraction $\frac{a}{c}$ à leur simple expression $\frac{ac+a}{c}$ ce qui donne l'équation réduite à sa plus simple expression $2y + \frac{cz-z}{c} = \frac{ac+a}{c}$, c'est la seconde des secondes égalitez ou équations abrégées.

Les secondes égalitez ou équations abrégées sont.

D . . $2z + \frac{by-y}{b} = \frac{ab+a}{b}$. La première des secondes.

E . . $2y + \frac{cz-z}{c} = \frac{ac+a}{c}$. La seconde des secondes.

6°. Il faut dégager l'inconnue y dans ces égalitez, qui sont en D & E.

Or la première en D donne par transposition $\frac{by-y}{b} = \frac{ab+a}{b} - 2z$, pour faciliter l'opération je convertis l'entier du second membre $-2z$ en fraction sans changer sa valeur, ce qui se fait en le multipliant au numérateur par le dénominateur b de la fraction, qui sera aussi son dénominateur commun, ainsi $\frac{ab+a-2bz}{b}$, ce qui donne $\frac{by-y}{b} = \frac{ab+a-2bz}{b}$ ensuite effaçant dans les deux membres le dénominateur commun b , j'ai $by-y = ab+a-2bz$, ou $by-1 = -2bz + ab+a$.

Pour dégager l'inconnue y , je divise tout par $b-1$ qui

affecte ou multiplie cette inconnue , ce qui donne
 $y = \frac{-2bx + ab + a}{b-1}$ C'est la première valeur de y trouvée, que j'écris à part en N ci-dessous sous le titre des Equations mises à part ; & je mets en tête en M la première valeur de x trouvée d'abord , en partie inconnue.

Equations mises à part.

M . . . $x = y + z - a$. La première des valeur de x :

N . . . $y = \frac{-2bx + ab + a}{b-1}$ La 1^{re}. valeur de y .

O

Pour avoir une seconde valeur de y , j'opère de même sur la seconde ou dernière des secondes égalitez E,
 $2y + \frac{cx-z}{c} = \frac{ac+a}{c}$ dans laquelle je trouve par transposition $2y = \frac{ac+a-cx-z}{c}$

Pour ôter les fractions du second membre , je multiplie tout par le dénominateur c , ce qui donne

$$2cy = ac + a - cx - z.$$

Présentement pour dégager l'inconnue y qui est affectée ou multipliée par $2c$, je divise tout par ce multiplicateur $2c$, ce qui donne $y = \frac{-cx - z + ac + a}{2c}$ c'est la seconde valeur de y .

7°. Puisque j'ai deux valeurs de y , sçavoir:

$$y = \frac{-2bx + ab + a}{b-1}$$

$$y = \frac{-cx - z + ac + a}{2c}$$

Pour les comparer je forme une égalité ou équation des seconds membres de ces deux valeurs différentes, & j'ai

$$\frac{-2bx + ab + a}{b-1} = \frac{-cx - z + ac + a}{2c}$$

n ij

Il n'y a plus que la seule inconnue z dans cette égalité, je renverse l'ordre des deux membres par arrangement

$$\& \text{ j'ai } \frac{-cz - z + ac + a}{2c} = \frac{-bz + ab + a}{b-1}.$$

Pour ôter les fractions, je multiplie chaque numérateur par le dénominateur de l'autre fraction, & j'efface ensuite chaque dénominateur.

Ainsi effaçant le dénominateur $2c$ du premier membre, & multipliant son numérateur par $b-1$ qui est le dénominateur du second membre, j'ai d'un côté pour le premier membre.

$$\left\{ \begin{array}{l} -bcz + bz + abc + ab \\ + 1cz - 1z - 1ac - 1a \end{array} \right.$$

De l'autre côté j'efface le dénominateur $b-1$ du second membre, & je multiplie son numérateur par $2c$ qui est le dénominateur du premier membre, ce qui donne pour le second membre

$$-4bcz + 2abc + 2ac.$$

De ces deux produits je forme l'égalité suivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} -bcz + bz + abc + ab \\ + 1cz - 1z - 1ac - 1a \end{array} \right\} =$$

$$= -4bcz + 2abc + 2ac.$$

Ensuite par transposition, je fais passer dans le premier membre toutes les grandeurs où se trouve l'inconnue z , qui est la seule qui se trouve dans cette égalité, & je fais passer dans le second membre toutes les grandeurs qui sont entièrement connues, & qui sont dans le premier membre en leur donnant des signes contraires, & j'écris dans une colonne verticale les unes sous les autres les grandeurs qui affectent z , & les mêmes gran-

deurs ou les semblables qui sont exprimées par les mêmes lettres comme il suit.

$$\begin{aligned}
 + 4bcz &= + 2abc + 2ac \\
 - bcz &- abc - 1ac - 1ab + 1a \\
 + bz & \\
 + 1cz & \\
 - 1z &.
 \end{aligned}$$

Dans cette égalité j'efface de chaque membre les grandeurs semblables qui se détruisent par des signes contraires, & j'ajoute dans une somme les grandeurs semblables qui ont le même signe, ce qui donne

$$\begin{aligned}
 + 3bcz &= + abc - 1ab + 3ac + 1a. \\
 + bz & \\
 - 1z &
 \end{aligned}$$

Pour dégager l'inconnue bz dans cette dernière égalité, je divise les deux membres par les grandeurs qui affectent ou multiplient l'inconnue z , ce qui me donne $z = \frac{abc - 1ab + 3ac + a}{3bc + b + c - 1}$ c'est la valeur toute connue de z trouvée; puisque dans cette égalité le second membre ne contient que des grandeurs connues.

8°. Pour trouver par le moyen de cette valeur de z , la valeur de la seconde inconnue y je substitue cette valeur de z dans l'équation mise à part ci-devant en N, c'est, $y = \frac{-2bz + ab + a}{b-1}$ la substitution donne

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{-2b}{b-1} \times \frac{abc + 3ac - 1ab + a}{3bc + b + c - 1} + \frac{ab + a}{b-1} \\
 \text{ou } y &= \frac{-2b \times \frac{ab + 3ac - 1ab + a}{3bc + b + c - 1} + ab + a}{b-1}
 \end{aligned}$$

Voilà trois fractions dans cette valeur de y , dont il faut
n ij

trouver la somme réduite, il faut donc les réduire d'abord au même dénominateur, en multipliant en croix comme il suit.

En premier lieu, je multiplie tout par le dénominateur commun $b-1$ de la première & de la troisième fraction, en l'effaçant simplement dans ces deux fractions; en second lieu, je multiplie par le numérateur $2b$ de la 1^{re}. fraction le numérateur de la seconde fraction qui est la valeur de z , c'est-à-dire, $-+abc -+ 3ac - 1ab -+ a$

$$\times \text{---} 2b$$

Le premier produit est $\text{---} 2ab^2c \text{---} 6abc -+ 2ab^2 \text{---} 2ab$.

En troisième lieu, je multiplie le dénominateur de la seconde fraction par le numérateur de la troisième fraction, c'est-à-dire,

$$\begin{array}{r} -+ 3bc -+ b -+ c \text{---} 1 \\ \times -+ ab -+ a. \\ \hline -+ 3ab^2c -+ ab -+ abc \text{---} 1ab \\ \text{---} + 3abc -+ ab -+ ac \text{---} 1a. \end{array}$$

Le second produit est $-+ 3ab^2c -+ ab^2 -+ 4abc -+ ac \text{---} 1a$.

Je fais une somme de ces deux produits, abrégant l'expression par l'addition & la soustraction des grandeurs semblables.

Premier produit .. $\text{---} 2ab^2c + 2ab^2 + 6abc - 2ab$

Second produit .. $+ 3ab^2c + ab^2 + 4abc * + ac - 1a$

Somme abrégée .. $+ ab^2c + 3ab^2 - 2abc - 2ab + ac - 1a$

C'est la valeur des produits de la seconde fraction ou valeur de z multipliée par les numérateurs des deux autres fractions.

En quatrième lieu, je divise cette somme par $b - 1$ dénominateur commun de la première & de la troisième fraction qui a été effacée d'abord, cette division se fait comme il suit.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Diviseur} \\ +b-1 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende} \\ +ab^2c - 2abc + 3ab^2 - 2ab + ac - 1a. \end{array} \right.$
<p><i>Quotiens . .</i></p> <p>$+abc..$</p> <p>$-1ac..$</p> <p>$+3ab..$</p> <p>$+a...$</p> <p style="text-align: center;">o</p>	<p><i>Produits, restes & nouveaux Dividendes.</i></p> <p>$+ab^2c - 1abc.$ 1^{er}. produit à ôter.</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 2px 0;"/> <p style="text-align: center;">o</p> <p>$-1abc : +3ab^2$ 1^{er}. reste, & 2^d. Dividende.</p> <p>$..... - 1abc + 1ac.$ 2^d. produit à ôter.</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 2px 0;"/> <p style="text-align: center;">o</p> <p>$-1ac : +3ab^2 - 2ab$ 2^d. reste & 3^{me}. produit.</p> <p>$..... + 3ab^2 - 3ab.$ 3^{me} produit.</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 2px 0;"/> <p style="text-align: center;">3^{me} reste, $-1ac . . . o$ $+ab :$</p> <p>$+ac - 1a.$</p> <p>J'abrege ce reste, retranchant les grandeurs semblables qui ont des signes contraires, $+1ac - ac = 0.$ ce qui donne l'expression simple du 3^{me}. reste,</p> <p>$..... +ab - 1a.$</p> <p>4^{me}. produit à ôter $+ab - 1a.$</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 2px 0;"/> <p style="text-align: center;">o</p> <p>4^{me} & dernier reste. o . . . o</p>

Donc le quotient est $+abc - ac + 3ab + a$, c'est

le numerator d'une fraction à qui je donne le dénominateur de la seconde fraction ci-dessus valeur de z qui est $3bc + b + c - 1$, & cette dernière fraction qui suit est la valeur des trois fractions précédentes & la véritable valeur de y toute connue

$$y = \frac{+abc + 3ab - ac + a}{3bc + b + c - 1}$$

Maintenant pour avoir la valeur toute connue de la première inconnue x , je fais une somme des valeurs toutes connues de z & de y que je viens de trouver; mais comme elles sont des fractions qui ont le même dénominateur commun; il suffit d'ajouter ensemble les numérateurs pour avoir leur somme

$$z = \frac{abc - ab + 3ac + a}{3bc + b + c - 1.}$$

$$y = \frac{abc + 3ab - ac + a}{3bc + b + c - 1.}$$

$$\text{or } abc - ab + 3ac + a.$$

$$\& abc + 3ab - ac + a.$$

$$\text{Somme} = 2abc + 2ab + 2ac + 2a.$$

Je substitue cette somme dans la première valeur de x mise à part ci-dessus en M qui est $x = y + z - a$ en la place des deux inconnues y, z , ce qui donne

$$x = \frac{2abc + 2ab + 2ac + 2a}{3bc + b + c - 1} - a.$$

Or pour ajouter dans une somme l'entier $-a$, avec la fraction, je change cet entier en une fraction de même valeur en la multipliant par le dénominateur de la fraction.

+

$$+ 3bc + b + c = 1$$

$$x = a$$

$$\begin{array}{r} \text{Produit} \quad - 3abc - ab - ac + a. \\ \quad \quad \quad 2abc + 2ab + 2ac + 2a. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{J'ajoute à ce produit le} \\ \text{numérateur de la} \\ \text{fraction.} \end{array}$$

La somme $- 1abc + ab + ac + 3a$ sera le numérateur de la fraction suivante qui sera la véritable valeur de x puisque le second membre de l'égalité ne contient que des grandeurs connues, avec le dénominateur commun des valeurs de y & z , comme il suit.

$$x = \frac{-abc + ab + ac + 3a}{3bc + b + c - 1}$$

Ainsi le Problème est entièrement résolu en lettres, puisque j'ai trouvé les valeurs des trois inconnues.

$$1^{\text{re}}. \text{ inconnue } x = \frac{-abc + ab + ac + 3a}{3bc + b + c - 1}$$

$$2^{\text{de}}. \text{ inconnue } y = \frac{abc + 3ab - ac + a}{3bc + b + c - 1}$$

$$3^{\text{me}}. \text{ inconnue } z = \frac{abc - ab + 3ac + a}{3bc + b + c - 1}$$

Résolution en nombres.

Soit $a = 10$, $b = 2$, $c = 3$.

Donc $ab = 20$, $abc = 60$. $3bc = 18$. $bc = 6$. & $ac = 30$. en substituant ces nombres en la place des lettres, j'ai pour la valeur de la première inconnue x .

$$x = \frac{-60 + 20 + 30 + 30}{18 + 2 + 3 - 1} = \frac{20 - 60}{23 - 1} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$

$$\text{Donc } x = \frac{10}{11}.$$

Analyse.

Pour la seconde inconnue y , j'ai par la substitution

$$y = \frac{60 + 60 - 10 + 10}{18 + 2 + 3 - 1} = \frac{120 - 10}{23 - 1} = \frac{110}{22} = \frac{50}{11} \\ = 44 + 6.$$

Donc $y = 4 + \frac{6}{11}$.

Pour la troisième inconnue z , j'ai par substitution,

$$z = \frac{60 - 10 + 90 + 10}{18 + 2 + 3 - 1} = \frac{160 - 10}{23 - 1} = \frac{150}{22} = \frac{75}{11} \\ = 66 + 4 = 6 + \frac{4}{11}, \text{ donc } z = 6 + \frac{4}{11}.$$

Enfin donc $x = \frac{10}{11}$, $y = 4 + \frac{6}{11}$, & $z = 6 + \frac{4}{11}$.

Remarque. On peut résoudre de la même manière tous les Problèmes où il y a trois inconnues: mais si l'on veut trouver ces résolutions en nombres entiers, ce qui est plus élégant, c'est une nouvelle condition qui change la nature du Problème, car alors il devient indéterminé, puisqu'on ne peut former dans ce cas autant d'équations qu'il contient d'inconnues. (Nous verrons dans le livre suivant les règles pour résoudre ces sortes de Problèmes indéterminés), au lieu que dans le cas présent on peut former autant d'équations par les conditions proposées qu'il y a d'inconnues, ce qui fait que le Problème proposé est déterminé.

PROBLÈME XV.

Pour trois grandeurs.

On demande trois grandeurs inconnues x, y, z , avec ces conditions.

1°. Que la première $x + a = y + z$.

2°. Que la seconde $y + a = x + bz$.

3°. Que la troisième $z + a = cx + cy$.

On suppose que les lettres a, b, c , expriment des grandeurs connues, c'est encore l'exemple précédent

dont les opérations qui sont dans le détail ci-devant, sont abrégées ici.

Donc par transposition j'ai
les trois premières égalitez. *Egalitez mises à part.*

$$x = y + z - a$$

$$x = \frac{y}{b} - z - \frac{a}{b}$$

$$x = \frac{z}{c} - y + \frac{a}{c}$$

$$x = y + z - a$$

$$y = \frac{-2bz + ab + a}{b-1}$$

Je compare la première de ces valeurs de x avec les deux autres, ce qui donne les trois égalitez suivantes que je nomme les secondes égalitez.

$$2z + \frac{by - y}{b} = \frac{ab + a}{b}$$

$$2y + \frac{cx - x}{c} = \frac{ac + a}{c}, \text{ je dégage } y \text{ dans ces deux égalitez, \& j'ai } y = \frac{-2bz + ab + a}{b-1}.$$

$$\text{Et } y = \frac{-cz + x + ac + a}{2c}$$

Je compare ces deux valeurs de y , dont je forme l'égalité $\frac{-2bz + ab + a}{b-1} = \frac{-cz + x + ac + a}{2c}$, dans laquelle dégageant x , j'ai $x = \frac{abc + 3ac - ab + a}{3bc + b + c - 1}$.

Je substitué cette valeur de x dans la valeur de y mise à part $y = \frac{-bx + ab + a}{b-1}$, j'abrége ensuite la valeur trouvée par la substitution, & je trouve $y = \frac{abc + 3ab - ac + a}{3bc + b + c - 1}$.

Ensuite je substitué les valeurs toutes connues que je viens de trouver de x & de y dans l'équation mise à part $x = y + z - a$, je trouve par la substitution une grandeur très-composée, & après l'avoir abrégée, je trouve enfin $x = \frac{-abc + ab + ac + 3a}{3bc + a + c - 1}$.

Le Problème est résolu, & les valeurs des trois inconnues sont

$$x = \frac{-abc + ab + ac + 3a}{3bc + a + c - 1}$$

$$y = \frac{abc + 3ab - ac + a}{3bc + a + c - 1}$$

$$z = \frac{abc - ab + 3ac + a}{3bc + a + c - 1}$$

Pour résoudre en nombres ce Problème, si je suppose $a = 10$, $b = 2$, $c = 3$, j'aurai $x = \frac{10}{11}$, $y = 4 \frac{6}{11}$ & $z = 6 \frac{4}{11}$.

PROBLÈME XVI.

Pour quatre inconnues.

Trouver quatre grandeurs inconnues v , x , y , z , avec ces conditions.

1°. Que la somme composée des trois premières inconnues soit égale à la somme de la quatrième ajoutée à une première grandeur connue a .

2°. Que la somme composée de la première grandeur, de la seconde & de la quatrième, soit égale à la somme composée de la troisième y & d'une seconde grandeur connue b .

3°. Que la somme composée de la première, de la troisième & de la quatrième, soit égale à la somme composée de la seconde x , & d'une troisième grandeur connue c .

4°. Que la somme composée des trois dernières inconnues soit égale à la somme composée de v , & d'une quatrième grandeur connue d .

1°. Par les conditions du Problème j'ai les quatre premières égalitez suivantes.

Premières égalitez

$$1^{\circ}. v + x + y = z + a.$$

$$2^{\circ}. v + x + z = y + b.$$

$$3^{\circ}. v + y + z = x + c.$$

$$4^{\circ}. x + y + z = u + d.$$

Les premières égalitez mises à part.

$$A . . . v = z - x - y + a.$$

$$B . . . 2z = 2y - a + b.$$

$$C . . . 2z = 2x - b + c.$$

2^o. Je prends la valeur de l'une ou l'autre de ces inconnuës dans l'une des premières égalitez ; dans cet exemple je prends la valeur de v dans la première égalité $v + x + y = z + a$, j'ai par transposition $v = z - x - y + a$, c'est une valeur de x que j'écris à part vers A.

3^o. Je substitué cette valeur de v dans les trois autres égalitez, dans la seconde $v + x + z = y + b$, j'ai par substitution $x + z + z - x - y + a = y + b$, & par addition & soustraction $2z - y + a = y + b$, & par transposition $2z - 2y + a = b$, & encore par transposition $2z = 2y - a + b$; c'est la première des secondes égalitez, que j'écris à part vers B ci-dessus, & l'écris encore ci-dessous vers D.

Secondes égalitez abrégées.

$$D . . . 2z = 2y - a$$

$$E . . . 2y = 2x - a + c$$

$$F . . . 2x + 2y = a + d.$$

Dans la troisième des premières égalitez $v + y + z = x + c$, j'ai par substitution $y + z + z = x + y + a = x + c$, & par addition, soustraction & transposition, j'ai $2z = 2x + a = c$, ou $2z = 2x - a + c$, c'est la seconde des secondes égalitez abrégées que j'écris vers E.

Dans la quatrième des premières égalitez $x + y + z = v + d$, je substitué la première valeur de v , la substitution donne $x + y + z = d + z = x + y + a$, par transposition, addition & soustraction, j'ai $2x + 2y = a + d$, c'est la troisième des secondes égalitez abrégées que j'écris vers F.

4°. Je prends la valeur de l'une des inconnues dans l'une des trois égalitez abrégées ; ici je prends la première en D. $2z = 2y - a + b$, c'est une valeur de z que j'écris à part ci-dessus vers B.

5°. Je substitué cette valeur de z dans les autres des secondes égalitez abrégées où elle se trouve, comme ici dans la seconde vers E. . . $2z = 2x - a + c$, la substitution donne $2y - a + b = 2x - a + c$, dans laquelle j'efface $-a + a$ qui se détruisent par des signes contraires, & j'ai $2y + b = 2x = c$. c'est la première des troisièmes égalitez abrégées que j'écris ci-dessous vers G, & j'écris au-dessous vers H, la troisième des secondes égalitez qui est en F, où l'inconnue z ne se trouve point, ce qui donne pour les troisièmes égalitez abrégées les deux suivantes.

Troisièmes égalitez abrégées.

$$G . . . 2y + b = 2x = c.$$

$$H . . . 2x + 2y = a + d.$$

6°. Je prends la valeur d'une inconnue de l'une de ces troisièmes égalitez abrégées, ici je prends la première vers G. $2y + b = 2x = c$, j'ai par transposition $2y = 2x - b + c$, c'est une valeur de $2y$ que

j'écris vers C entre les premières égalitez mises à part.

7°. Je substitue cette valeur de $2y$ dans la dernière des secondes égalitez abrégées vers F. $2x + 2y = a + d$. La substitution donne $2x + 2x - b + c = a + d$, j'ai par transposition & addition $4x = b - c + a + d$, dont le second membre ne contient que des grandeurs connues.

Pour dégager l'inconnue x dans le premier membre, je divise tout par 4, ce qui donne $x = \frac{b - c + a + d}{4}$ c'est la valeur de x trouvée en nombres connus.

8°. Ensuite je reprends les égalitez mises à part vers A, B, C, dans lesquelles je substitue cette valeur de x , pour la faire évanouir & trouver par son moyen la valeur des autres inconnues, comme il suit.

Je prends l'égalité mise à part vers C. $2y = 2x - b + c$ qui n'a que deux inconnues x & y , la substitution chasse $2x$ & donne $2y = \frac{a + b - c + d}{2} - b + c$.

pour réduire le second membre à une expression plus simple, je réduis les entiers $-b + c$ à une fraction de même valeur qui ait le dénominateur commun 2, c'est $\frac{-2b + 2c}{2}$ qu'il faut soustraire de la fraction précédente, le reste est $\frac{a - b + c + d}{2}$ ce qui donne $2y = \frac{a - b + c + d}{2}$, ensuite je divise tout par 2 pour dégager l'inconnue, & j'ai $y = \frac{a - b + c + d}{4}$, c'est la valeur de y trouvée.

Je substitue cette valeur de y dans l'égalité mise à part en B, c'est $2z = 2y - a + b$, la substitution donne $2z = \frac{a - b + c + d}{2} - a + b$; j'abrège ce second membre en ôtant par soustraction la partie de la fraction $\frac{+a - b}{2}$ des entiers exprimez par les mêmes lettres $-a + b$, le reste $\frac{-a + b}{2}$, donne $2z = \frac{-a + b + c + d}{2}$.

pour dégager l'inconnuë, je divise tout par 2, en multipliant seulement le dénominateur $2 \times 2 = 4$, ce qui donne $z = \frac{-a+b+c+d}{4}$, c'est la valeur de z toute connue.

Enfin je substitue les valeurs entièrement connues que je viens de trouver des trois inconnues x, y, z dans la première des égalitez mises à part vers A, qui est $v = z - x - y + a$, la substitution donne

$$v = \frac{-a+b+c+d}{4} - \frac{b-c+a+d}{4} - \frac{a-b+c+d}{4} + a.$$

Pour abréger ce second membre, je réduis l'entier $+a$ dans une fraction de même valeur en le multipliant par le dénominateur 4, qui sera aussi son dénominateur ainsi $\frac{4a}{4}$. ainsi le second membre est

$$\frac{-a+b+c+d}{4} - \frac{b-c+a+d}{4} - \frac{a-b+c+d}{4} + \frac{4a}{4}.$$

Pour le réduire à la plus simple expression, j'efface partout le dénominateur 4 qui est commun à toutes ces fractions; je fais ensuite une somme des numérateurs positifs ou procédez du signe $+$; & une seconde somme des numérateurs négatifs ou procédez du signe $-$

$$+ + 4a$$

$$+ - a + b + c + d$$

$$\bullet \text{ Somme } + 3a + b + c + d$$

$$- + a + b - c + d$$

$$- + a - b + c + d$$

$$\text{Somme } + 2a \quad 0 \quad 0 + 2d. \text{ des numérateurs négatifs.}$$

$$\text{De la somme des positifs } + 3a + b + c + d.$$

$$\text{J'ôte la somme des négatifs } - + 2a \quad 0 \quad 0 + 2d.$$

Reste

$$\text{Reste } +1a +b +c -d.$$

Ce reste est la valeur de l'inconnuë v réduite à la plus simple expression, en lui donnant le dénominateur commun 4. c'est $v = \frac{a+b+c-d}{4}$

Le Problème est entièrement résolu, puisqu'on a trouvé les valeurs des quatre inconnuës v, x, y, z , qui sont les quatre égalitez suivantes.

$$v = \frac{a+b+c-d}{4}$$

$$x = \frac{a-b-c+d}{4}$$

$$y = \frac{a-b+c+d}{4}$$

$$z = \frac{-a+b+c+d}{4}$$

$$\text{Soit } a = 4. b = 8. c = 16. d = 24.$$

On aura par substitution

$$v = 13.$$

$$x = 13 - 16 = -3.$$

$$y = 13 - 8 = 5$$

$$z = 13 - 4 = 9$$

Il est facile de résoudre ce Problème en nombres, en déterminant les valeurs des quatre lettres connuës a, b, c, d , & substituant leurs valeurs dans les quatre égalitez trouvées pour les valeurs des inconnuës.

A V I S.

Comme cet exemple est assez composé, les commençans y trouveront le détail des opérations qui les accoutumeront peu à peu à mettre en pratique les regles du

Analyse.

p

calcul dans les occasions , & comme on peut résoudre les Problèmes par des voyes différentes , nous résoudrons encore celui-ci par deux autres Méthodes afin d'exciter la sagacité , & nous réduirons en forme de règle chacune de ces Méthodes après l'opération , & les règles quoique réduites en peu de mots seront plus aisées à concevoir , si l'on possède le détail de l'opération qui la précède.

RÈGLE. PREMIÈRE METHODE.

Cette Règle exprime ce qui est contenu en détail dans la résolution du 16^e. Problème.

1^o. J'écris autant d'égalitez qu'il y a de rapports connus dans le Problème entre les grandeurs connues & les inconnues , & je les nomme les premières égalitez.

2^o. J'écris à part vers A une de ces premières égalitez qui donne par transposition la valeur d'une des inconnues , ensuite je substitue cette valeur de l'une des inconnues dans les autres premières égalitez où se trouve la même inconnue , alors cette inconnue ne s'y trouve plus. J'écris à part vers D , ces nouvelles égalitez abrégées , avec lesquelles j'écris les égalitez où cette même inconnue n'étoit pas , s'il s'en trouve quelques-unes.

3^o. Entre ces secondes égalitez abrégées vers D, j'en prends une qui me donne la valeur d'une inconnue qu'elle contient , mais différente de la première inconnue qui a été évanouie dans l'opération précédente. Je substitue cette valeur dans les secondes égalitez abrégées où elle se trouve , ce qui donne des troisièmes égalitez abrégées , où cette seconde inconnue ne se trouve plus.

J'écris à part vers G ces troisièmes égalitez abrégées , je les nomme abrégées (car par la substitution il se trouve souvent des expressions composées qu'il faut abréger pour la réduire aux moindres termes ou à la plus simple ex-

pression,) & s'il y a quelque égalité où cette inconnue ne soit point je l'écris au-dessous.

4°. Après avoir dégagé de suite par cette Méthode toutes les inconnues excepté la première, dont j'ai d'abord trouvé une valeur par une égalité, dont le second membre contient encore d'autres inconnues, je reprends dans un ordre contraire toutes les égalitez mises à part, & j'en chasse les inconnues en substituant à leur place leurs valeurs trouvées par les opérations précédentes, & j'ai soin dans chaque substitution d'abrégier l'expression pour la rendre plus simple; par ce moyen je trouve d'abord une égalité dont le second membre est composé seulement de grandeurs connues, c'est une valeur exacte de l'inconnue qui est seule dans le premier membre, la substitution me donne de même successivement la valeur de toutes les autres inconnues, ce qui donne la résolution du Problème.

SECONDE METHODE.

Pour résoudre le même Problème 16°. qui contient quatre grandeurs inconnues.

1°. Je forme les quatre premières égalitez pour les quatre grandeurs inconnues v, x, y, z , suivant les conditions du Problème.

Premières égalitez.

$$v + x + y = z + a$$

$$v + x + z = y + b$$

$$v + y + z = x + c$$

$$x + y + z = v + d.$$

Egalitez mises à part.

$$A \dots v = z - x - y + a$$

$$B \dots 2z = 2y - b - a$$

$$C \dots 2x = 2y + b - c$$

2°. Je prends toutes les valeurs d'une même inconnue choisie à volonté, comme ici v , dans toutes les premières égalitez où elle se trouve, & j'en écris une à part ci-dessus vers A. Or dans cet exemple toutes les valeurs de v se trouvent par la seule transposition, comme il suit.

Les différentes valeurs de v .

$$v = z + a - x - y$$

$$v = y + b - x - z$$

$$v = x + c - y - z$$

$$v = d - y - z.$$

3°. Pour comparer ensemble ces différentes valeurs de v qui sont égales, je les prends deux à deux que je joins par le signe d'égalité, ce qui donne les trois égalitez suivantes.

$$x + a - x - y = y + b - x - z$$

$$y + b - x - z = x + c - y - z$$

$$x + c - y - z = d - y - z$$

Je les réduis à leur plus simple expression par transposition & par addition pour avoir les secondes égalitez abrégées qui suivent.

Secondes égalitez abrégées.

$$2x - 2y = b - a$$

$$2z - 2x = c - a$$

$$2x + 2y = a + d$$

Comme ces trois égalitez abrégées contiennent toutes les autres inconnuës , excepté la première qui est v , elles suffisent pour résoudre le Problème , & toutes les autres égalitez qu'on pourroit former sur les autres valeurs de v sont inutiles.

4°. Dans ces secondes égalitez abrégées , je prends toutes les valeurs d'une même inconnuë comme de z , dans les égalitez où elle se rencontre , j'ai donc ces deux égalitez.

$$2z = 2y + b - a$$

$$2z = 2x + c - a$$

J'écris une de ces dernières égalitez à part vers B.

Je compare ensemble ces deux valeurs de z ; c'est-à-dire je forme de leurs seconds termes une égalité abrégée $2x - 2y = b - c$, c'est la première des troisièmes égalitez abrégées , à laquelle j'ajoute celles des secondes égalitez où z ne se trouve point.

Troisièmes égalitez abrégées.

$$2x - 2y = b - c$$

$$2x + 2y = a + d$$

5°. Je dégage l'inconnuë x dans ces deux dernières égalitez , ce qui me donne pour $2x$ deux valeurs différentes.

$$2x = 2y + b - c. \text{ Et } 2x = a + d - 2y.$$

J'écris à part une de ces égalitez vers C, ensuite je forme une égalité de ces deux valeurs de $2x$, je les abrège en les réduisant à leur plus simple expression, & j'ai $4y = a - b + c + d$, où il n'y a qu'une seule inconnue dans le premier membre, je dégage l'inconnue en divisant tout par 4, ce qui donne $y = \frac{a - b + c + d}{4}$ c'est la valeur de y toute connue.

6°. Je substitue cette valeur de y dans les égalitez mises à part vers A, B, C, pour avoir les valeurs des trois autres inconnues x, z, v , comme il suit.

Dans l'égalité mise à part vers C. $2x = 2y + b - c$, puisque y est multipliée par 2, je multiplie sa valeur par 2, c'est $\frac{a - b + c + d}{2}$ ce qui donne $2x = \frac{a - b + c + d}{2} + b - c$, il faut réduire ce second membre à sa plus simple expression en ôtant par addition ou par soustraction des entiers $+b - c$ la fraction semblable $\frac{-b + c}{2}$, le reste est $\frac{+b - c}{2}$ donc $2x = \frac{a + b - c + d}{2}$ & divisant tout par 2 pour dégager l'inconnue x , j'ai $x = \frac{a + b - c + d}{4}$

De même substituant la valeur de $2y$ dans l'égalité mise à part vers B., $2z = 2y + b - a$, j'ai $2z = \frac{a - b + c + d}{2} + b - a$, je réduis ce second membre à sa plus simple expression comme ci-dessus, puisque les lettres a & b se trouvent dans les entiers & dans la fraction, ce qui donne $2z = \frac{-a + b + c + d}{2}$.

Je dégage l'inconnue z en multipliant le dénominateur $2 \times 2 = 4$, ce qui est une véritable division qui donne $z = \frac{-a + b + c + d}{4}$.

Pareillement en substituant la valeur trouvée des trois inconnues z, x, y dans la première des égalitez mises

à part vers A. . $v = z - x - y + a$, la substitution donne $v = \frac{-1 + b + c + d}{4} - \frac{a + b - c + d}{4} - \frac{a - b + c + d}{4} + a$.

Pour réduire ce second membre à sa plus simple expression de l'entier $+ a$, je fais une fraction de même valeur qui a le dénominateur commun 4, c'est $+\frac{4a}{4}$ de la sorte ce second membre ne contient que des fractions qui ont toutes le même dénominateur commun, j'efface & j'opère sur les seuls numérateurs dont je cherche la somme.

Numérateurs des fractions positives.

$$\begin{array}{r} + 4a \\ + a + b + c + d \\ \hline \text{Somme } + 3a + b + c + d \\ \hline \end{array}$$

Numérateurs des fractions négatives.

$$\begin{array}{r} + a + b - c + d \\ + a - b + c + d \\ \hline + 2a \quad 0 \quad 0 + 2d \\ \hline \end{array}$$

De la première somme $+ 3a + b + c + d$
 J'ôte la seconde somme $+ 2a \quad 0 \quad 0 + 2d$

$$\text{Reste } + a + b + c - d$$

Ce reste est le numérateur, son dénominateur est 4 dénominateur commun, ce qui donne la valeur de v ,
 $v = \frac{a + b + c - d}{4}$ & le Problème est entièrement résolu.

Les valeurs des quatre grandeurs inconnues sont.

$$\begin{aligned} v &= \frac{a + b + c - d}{4} \\ x &= \frac{a + b - c + d}{4} \\ y &= \frac{a - b + c + d}{4} \\ z &= \frac{-a + b + c + d}{4} \end{aligned}$$

En nombres.

Soit $a = 4$. $b = 8$. $c = 16$. $d = 24$.

La substitution donnera

$$\begin{aligned} v &= 13. \\ x &= 13 - 16 = -3 \\ y &= 13 - 8 = 5 \\ z &= 13 - 4 = 9 \end{aligned}$$

Règle abrégée pour la seconde Méthode.

1°. Je prends toutes les valeurs d'une même inconnue dans toutes celles des premières égalitez où elle se trouve, & j'en écris une à part vers A.

2°. Je compare toutes ces valeurs deux à deux, en formant de chacune un membre d'une nouvelle égalité, j'ai par ce moyen les secondes égalitez où cette inconnue ne se trouve plus, & j'y ajoute les égalitez où elle n'étoit point s'il y en a.

3°. J'opère sur les secondes égalitez comme j'ai fait sur les premières pour en chasser une seconde inconnue, & je continue de la sorte jusqu'à ce que je trouve une égalité où il n'y ait qu'une seule inconnue.

4°. Je prends la valeur de cette seule inconnue, & je
la

la substituë dans celles des Equations mises à part où elle se trouve avec une seule autre inconnuë que je fais évanouir par ce moyen. Je continuë de même jusqu'à ce que j'aye les valeurs de toutes les inconnuës.

Enfin pour réduire cette règle en peu de mots ; il suffit de trouver la valeur d'une inconnuë , la substituer où cette inconnuë se trouve seule avec une seconde inconnuë ; on aura par ce moyen la valeur de la seconde inconnuë.

De même substituant les valeurs de la première & de la seconde inconnuë dans une égalité où elles se trouvent avec une troisième, on aura la valeur de la troisième inconnuë ; continuant ainsi on trouvera les valeurs de toutes les inconnuës.

TROISIÈME METHODE

Pour résoudre le même Probleme 16°. où il y a quatre grandeurs inconnuës.

Quelque fois on trouve facilement par la transposition ou par une autre préparation simple la valeur toute connue de chacune des inconnuës, ensuite soit en ajoutant seulement ensemble, ou deux, ou plusieurs valeurs d'une même inconnuë prises dans les premières égalitez, soit en ôtant par soustraction une valeur d'une autre, ou plusieurs valeurs de la même répétée autant de fois dans l'un des membres, qu'il y a de valeurs différentes dans l'autre membre.

1°. Dans cet exemple, j'ai par les conditions du Problème les quatre premières égalitez suivantes,

Premières égalitez formées par les conditions du Problème.

$$v + x + y = z + a$$

$$v + x + z = y + b$$

$$v + y + z = x + c$$

$$x + y + z = v + d$$

De ces premières égalitez , je tire par transposition toutes les valeurs de la première inconnue dont je forme une colonne pour en avoir une somme . je fais la même chose pour chacune des quatre inconnues , ce qui me donne quatre sommes , comme il suit.

Valeurs de v.

$$v = z - x - y + a$$

$$v = y - x - z + b$$

$$v = x - y - z + c$$

$$v = x + y + z - d$$

Somme abrégée.

$$4v = a + b + c - d$$

Valeur de x divisant tout par 4.

$$\text{J'ai } v = \frac{a + b + c - d}{4}$$

Valeurs de y.

$$y = z - v - x + a$$

$$y = v + x + z - b$$

$$y = x - v - z + c$$

$$y = v - x - z + d$$

Somme abrégée.

$$4y = a - b + c + d$$

Donc divisant tout par 4, j'ai

$$y = \frac{a - b + c + d}{4}$$

C'est la valeur de y.

Valeurs de x.

$$x = z - v - y + a$$

$$x = y - v - z + b$$

$$x = y + v + z - c$$

$$x = -y + v - z + d$$

Somme abrégée.

$$4x = a + b - c + d$$

Valeurs de x.

Divisant tout par 4.

$$J'ai x = \frac{a + b - c + d}{4}$$

Valeurs de z.

$$z = v + x + y - a$$

$$z = y - v - x + b$$

$$z = x - v - y + c$$

$$z = v - x - y + d$$

Somme abrégée.

$$4z = -a + b + c + d$$

Donc divisant tout par 4, j'ai

$$z = \frac{-a + b + c + d}{4}$$

C'est la valeur de z.

Les quatre valeurs de chacune des inconnues contiennent les autres inconnues qui se détruisent par des signes contraires, c'est pourquoi elles ne paroissent point dans la somme qui se trouve composée des seules grandeurs connues dans son second terme, ce qui donne la véritable valeur de l'inconnue, ainsi ces quatre sommes donnent la valeur des quatre inconnues & une parfaite solution du Problème; il est facile d'avoir la même solution en nombres, il suffit de substituer en la place de ces lettres connues leurs valeurs.

Remarque première.

On trouve toujours en lettres connues la valeur de chacune des inconnues, en joignant dans une somme toutes ses valeurs trouvées par simple transposition; on l'a trouvée par ce moyen dans cet exemple, parce

qu'entre les quatre valeurs de chacune des inconnuës, par exemple dans les valeurs de x , les trois autres inconnuës s'y trouvent autant de fois avec le signe $+$ & autant de fois avec le signe $-$, ce qui fait que les trois autres inconnuës se détruisent par des signes contraires, & disparaissent dans le second membre de la somme qui ne contient que des grandeurs connues.

Dans tout autre cas où cela ne se peut faire, il faut prendre d'un côté une valeur répétée deux fois, & d'un autre côté deux autres valeurs, pour les comparer ensemble en formant une égalité dans laquelle toutes les inconnuës, excepté une seule puissent se détruire par des signes contraires, ce qui donnera la valeur de cette inconnuë restante; ensuite opérant de même & substituant cette valeur en la place de son inconnuë, on trouvera la valeur d'une seconde inconnuë, & continuant par substitution, on trouvera les valeurs de toutes les inconnuës proposées, & par conséquent la résolution du Problème.

Remarque seconde.

Si en comparant plusieurs valeurs d'une même inconnuë, on met une de ses valeurs dans les deux membres d'une égalité, on la mettra dans le second membre avec des signes contraires à ceux qu'elle a dans le premier membre pour conserver l'égalité.

Remarque troisième.

Lorsqu'on n'a pu former par les conditions du Problème autant de premières égalitez qu'il y a d'inconnuës, alors le Problème est indéterminé, & c'est une marque qu'il a plusieurs résolutions, il peut même en avoir une infinité; c'est ce que nous expliquerons en son lieu.

Au contraire lorsqu'on a formé suivant les conditions

du Problème plus d'égalitez qu'il n'y a d'inconnues , alors il y a de l'art à choisir entre les valeurs celles qui étant substituées ne tombent pas dans l'impossible. Ce sont des Problèmes plus que déterminez dont nous traiterons ci-après.

Remarque quatrième.

Pour abréger la résolution des Problèmes , on se sert de quelques-uns des rapports connus entre les grandeurs pour diminuer le nombre des inconnues , ce qui diminue le nombre des égalitez.

On se sert aussi des propriétés des signes & des figures de la géométrie.

SECTION DEUXIÈME.

Des Problèmes déterminez de tous les degrez,

*Ou des Equations composées de tous les
• degrez à l'infini.*

DAns cette section j'explique l'origine & les principes des Equations. 1°. Comment les Problèmes déterminez qui se réduisent à une seule inconnue donnent des équations composées de tous les degrez à l'infini.

2°. Je donne la manière la plus simple & la plus naturelle de former les équations pour connoître mieux la nature de leurs racines , & les trouver avec plus de facilité.

3°. J'explique dans le détail les équations , & toutes leurs parties.

4°. Je donne les moyens de préparer les équations, ou

de les réduire à la forme la plus simple & la plus commode pour les résoudre.

5°. J'explique en quoi consiste en général la résolution des Equations.

1°. DE L'ORIGINE DES EQUATIONS,

Où comment les Problèmes déterminez produisent les Equations de tous les degrez à l'infini.

Définition. Les Problèmes déterminez sont ceux qui se réduisent à une seule égalité dans laquelle il n'y a qu'une seule inconnüe.

Si cette inconnüe est au premier degré comme $x = a$, alors cette équation est du premier degré, & elle est résolue, puisque a est une grandeur connue, donc x qui lui est égal est connue aussi.

Mais si en pratiquant les règles expliquées dans la section précédente pour résoudre un Problème, il se réduit à deux ou trois égalitez, où il n'y a à la vérité qu'une seule inconnüe, mais élevée à différens degrez, par exemple; je suppose que pour résoudre un Problème proposé dont les conditions donnent autant de rapports que de grandeurs inconnües, ce qui le rend déterminé, j'ai formé les premières égalitez sur lesquelles j'ai formé les premières opérations nécessaires pour faire évanouir toutes les inconnües hors la première x , & que j'ai trouvé enfin le Problème réduit aux deux égalitez suivantes A & B, dans lesquelles l'inconnüe x est seule, mais élevée à différens degrez.

La première A . . . $x^2 - y^2 = \frac{1}{3} p$.

La seconde B . . . $x + 3xy^2 = \frac{1}{2} q$,

1°. Pour réduire ces deux égalitez à une équation seule, j'ôte d'abord les fractions en élevant la première

ANALYSE GENERALE,

à la troisieme puissance, dont l'exposant 3
 au dénominateur 3 de la fraction du second mem-
 bre qui donne l'équation C . . . $x^6 - 3x^4y^2$
 $- y^6 = \frac{1}{27}p^3$.
 J'ôte ensuite la fraction de l'équation B, en l'é-
 levant à la seconde puissance, dont l'exposant 2 est égal
 au dénominateur 2 de la fraction du second membre $\frac{1}{2}q$,
 ce qui donne l'équation D . . . $x^6 + 6x^4y^2 + 9x^2y^4$

J'ôte l'équation D de l'équation C, ce qui se fait
 en changeant d'abord les signes de tous les termes de
 l'équation C, & les ajoutant aux termes correspondans
 de l'équation D, ce qui donne l'Equation E.

$$E \dots 9x^4y^2 + 6x^2y^4 + y^6 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3.$$

4°. Je tire la racine quarrée de chaque membre de
 l'équation, c'est $3xy + y = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$.

5°. J'ajoute à cette racine la seconde équation ci-
 dessus B . . . $x^3 + 3xy^2 = \frac{1}{2}q$. La somme est

$$F. x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

dont le premier membre est la troisieme puissance par-
 faite de $x+y$, & par conséquent l'équation résultante
 F est du troisieme degré.

6°. Je tire la racine cubique de chacun des deux mem-
 bres de l'équation F, ce qui donne l'équation simple.

$$G. x+y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}qq} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}, \text{ qui est}$$

la premiere racine de l'équation du troisieme degré F,
 qui résulte des deux équations A & B qui ont été
 trouvées par la préparation expliquée dans la section
 précédente sur les conditions du Problème proposé,
 & le Problème est résolu : car comme on le verra
 dans la suite, cette premiere racine servira à diviser l'é-
 quation

quation , & le quotient qui en viendra sera une équation du second degré dont on trouvera de même les deux racines, comme il sera expliqué dans la suite.

2°. Formation simple & naturelle des Equations.

Lorsqu'un Problème se réduit enfin à une équation où l'inconnue est élevée à différens degrez , pour la résoudre il en faut trouver les racines , mais les opérations qu'on a faites pour en venir là , ne font point découvrir ces racines & n'en donnent aucune idée , on ne voit aucune liaison entre les opérations & la formation de cette équation , qui en résulte comme par hazard , & que l'on trouve d'ailleurs la même par des routes très-différentes ; or pour trouver les racines de l'équation qui en sont les élémens, il faut avoir une idée claire de la manière la plus simple & la plus naturelle dont elle se forme , c'est par la multiplication de ces racines comme il suit.

Pour former une équation du second degré , je prends une équation simple du premier degré $x - a = 0$, dont le premier membre est un binôme qui contient l'inconnue x & sa valeur positive $-a$, & le second membre contient le zéro seul , je multiplie cette équation simple par elle-même , le produit $x^2 - 2ax + aa = 0$, est une équation du second degré , dont le premier membre est la seconde puissance parfaite du binôme $x - a$, puisque le premier terme x^2 est le quarré de x , que le dernier terme aa est le quarré de a , & que le terme moien $2ax$ contient deux fois le produit de a par x .

Analyse.

Premier Exemple.

$$\begin{array}{rcl}
 x & - & a = 0 \\
 \times x & - & a = 0, \\
 \hline
 x^2 & - & ax \\
 & - & ax + aa = 0 \\
 \hline
 x^2 & - & 2ax + aa = 0. \\
 \hline
 \end{array}$$

Je peux de même former une équation par deux racines positives ou négatives, mais dans ce cas j'ai une équation du second degré, dont le second membre est une seconde puissance imparfaite.

Second Exemple.

$$\begin{array}{rcl}
 x & - & a = 0 \\
 \times x & - & b = 0 \\
 \hline
 x^2 & - & ax \\
 & - & bx + ab = 0. \\
 \hline
 \end{array}$$

Si a surpasse b , le produit ab du dernier terme est moindre que le carré aa , carré de la plus grande valeur a de l'une des racines, mais ce produit ab est plus grand que le carré bb , carré de b , la plus petite valeur des deux racines.

De même je peux par trois racines semblables, ou par la même multipliée deux fois, ou par la multiplication de trois racines différentes former une équation du troisième degré.

Troisième Exemple.

$$\begin{array}{rcl}
 x & - & a = 0 \\
 \hline
 x x & - & a = 0 \\
 \hline
 x^2 & - & ax \\
 & - & ax + aa = 0 \\
 \hline
 x^2 & - & 2ax + aa = 0 \\
 \hline
 x x & - & a = 0 \\
 \hline
 x^3 & - & 2ax^2 + aax \\
 & - & ax^2 + 2aax - a^3 = 0. \\
 \hline
 x^3 & - & 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0.
 \end{array}$$

Equation du troisième degré, qui contient une troisième puissance parfaite de $x - a = 0$.

Quatrième Exemple.

$$\begin{array}{rcl}
 x & - & a = 0. \\
 \hline
 x x & - & b = 0. \\
 \hline
 x^2 & - & ax \\
 & - & bx + ab = 0 \\
 \hline
 x x & - & c \\
 \hline
 x^3 & - & ax^2 + abx \\
 & - & bx^2 + acx \\
 & - & cx^2 + bcx - abc = 0.
 \end{array}$$

r ij

Equation du troisième degré, qui contient une troisième puissance imparfaite de chacune des trois racines.

Dans le troisième exemple, la multiplication réitérée deux fois de la même racine $x - a = 0$, donne au produit une équation du troisième degré dont le premier membre est la troisième puissance parfaite de cette racine $x - a = 0$. Le dernier terme a^3 le découvre du premier coup d'œil, puisqu'il est le cube de a .

Mais dans le quatrième exemple le dernier terme abc n'est point un cube parfait, mais seulement un produit de trois dimensions, ou de trois grandeurs différentes; ainsi le premier membre de cette équation est une troisième puissance imparfaite, qui est moindre que le cube de chacune des deux plus grandes racines, mais qui surpasse le cube de la plus petite de ces trois racines; ce qui est évident dans le cinquième exemple où les valeurs des racines sont exprimées par des nombres. Soit $a = 4$. $b = 3$. $c = 2$. ce qui donne les trois équations simples $x - 4 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 2 = 0$.

Cinquième Exemple.

$$\begin{array}{r}
 x - 4 = 0 \\
 \times x - 3 = 0 \\
 \hline
 x^2 - 4x \\
 \quad - 3x + 12 = 0 \\
 \hline
 x^2 - 7x + 12 = 0 \\
 \times x - 2 = 0 \\
 \hline
 x^3 - 7x^2 + 12x \\
 \quad - 2x + 14x - 24 = 0 \\
 \hline
 x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.
 \end{array}$$

Dans les équations en lettres, le dernier terme qui est le produit abc des trois racines les découvre par son expression ; mais cette expression n'est qu'une formule ou une règle abrégée, qui marque en général ce qui est contenu dans les équations numériques. Ainsi cela m'apprend que dans le produit 24. contenu dans le dernier terme de l'équation du troisième degré, du cinquième exemple, $24 = abc$; or dans 24 je n'apperçois aucune des valeurs 4, 3, 2 de ces racines. Ce produit 24 n'est pas un cube, mais un troisième puissance imparfaite ; or 24 est moindre que 64 cube de 4, & 24 est encore moindre que 27 cube de 3, mais 24 surpasse 8 cube de 2.

De même dans les équations du second degré contenues dans le quatrième & le cinquième exemple, le dernier terme ab est le produit de a multiplié par b , dont les racines paroissent dans l'expression en lettres ; mais dans le nombre 12 qui est le dernier terme, je ne vois point 4 multiplié par 3. Mais 12. n'est pas un carré, c'est une seconde puissance imparfaite moindre que 16. carré de la valeur 4 de la plus grande racine, mais plus grande que 9 carré de 3 valeur de la plus petite des deux racines.

DES EQUATIONS EN GENERAL.

De leurs degrez, de leurs espèces & de leur formation.

Définition. Je nomme une équation, toute égalité dont le second membre contenant zéro seul, le premier membre contient une puissance ou parfaite ou imparfaite d'une égalité du premier degré dont le second membre contient zéro seul, & dont le premier membre contient un binôme quelconque $x \pm a$, composé d'une inconnue simple & de sa valeur exprimée en nombres ou en lettres connus, comme $x \pm a = 0$, $x \pm 4 = 0$.

Cette définition convient aux équations de tous les degrés à l'infini ; cela est évident pour les équations du second & du troisième degré dans les exemples précédens ; il suffit d'en former dans les autres degrés supérieurs pour en être convaincu. La même définition convient aussi aux équations simples du premier degré comme $x - 2 = 0$, $x - a = 0$; car quoi qu'on ne puisse pas former la première par la multiplication de $x - 1 = 0$, ni en multipliant $x - 1 = 0$ par $x - 2 = 0$. On peut cependant la former par la multiplication du binôme. $\sqrt{x} - \sqrt{2}$, car $\sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{de même } \sqrt{x} - \sqrt{a} = 0 & \times & \sqrt{x} + \sqrt{2} = 0 \\
 \times \sqrt{x} + \sqrt{a} = 0 & & \hline
 x - \sqrt{x} \sqrt{a} & & x - \sqrt{x} \sqrt{2} \\
 + \sqrt{x} \sqrt{a} - a = 0. & & + \sqrt{x} \sqrt{2} - 2 = 0 \\
 \hline
 \text{produit. } x - 2 = 0. & &
 \end{array}$$

produit. $x - a = 0$.

Autrement. Une équation composée d'un degré quelconque est le produit qui résulte de la multiplication d'une équation simple du premier degré multipliée, ou par elle-même ou par une autre équation du même degré.

Il suit de là 1°. que l'équation simple du premier degré est la racine ou l'élément de toute équation d'un degré plus élevé. Or il faut deux conditions essentielles dans une équation du premier degré pour être la racine ou l'élément des autres équations. 1° Il faut que son premier membre contienne l'inconnue x avec sa valeur exprimée par un nombre ou par une lettre connue. 2°. Il faut que le second membre contienne le zéro seul, sans cela on ne pourroit former l'équation ; car l'inconnue ne pourroit représenter les valeurs de chacune des racines, ce qui est essentiel.

Il suit de là 2°. qu'une équation formée par la multiplication réitérée d'une équation seule du premier degré, comme de $x \pm a = 0$, contient toujours une puissance parfaite du même binôme $x \pm a$.

Au contraire, lorsque l'équation est formée par la multiplication de deux équations différentes ou de trois, &c. alors l'équation qui en résulte contient une puissance imparfaite qui est toujours plus grande que la puissance parfaite de la valeur de la plus petite des racines, mais qui est moindre que la même puissance parfaite de chacune des valeurs des autres racines.

Des différens degrez des équations à l'infini.

On distingue les équations comme les puissances par différens degrez à l'infini; il y en a du premier degré, du second degré, du troisième, du quatrième degré, &c. à l'infini. L'exposant de l'inconnue du premier terme qui est toujours la plus haute puissance de l'inconnue dans l'équation, en marque le degré par ses unitéz.

Cet exposant marque aussi par ses unitéz le nombre des racines de l'équation, c'est-à-dire, des équations simples qui entrent dans sa formation; ainsi dans le second degré il y a deux racines, dans le troisième il y en a trois, &c.

Si de cet exposant on retranche l'unité, on aura aussi le nombre des multiplications dont l'équation est formée. L'équation du second degré a 2 pour exposant, j'en retranche 1, le reste 1 marque qu'il y a une multiplication d'une racine par une autre: de même l'exposant du troisième degré est 3 dont je retranche 1, le reste 2 marque qu'il faut deux multiplications pour former l'équation du troisième degré, & ainsi des autres.

Des espèces différentes des équations dans chaque degré.

Dans le premier degré toutes les équations sont simples ; il n'y en a donc qu'une seule espèce : mais dans le second , le troisième , le quatrième degré & dans tous les degrez supérieurs à l'infini toutes les équations sont composées , mais on les distingue en deux espèces , savoir les équations pures & simples , & les équations affectées de termes moïens , qu'on appelle aussi en ce sens les équations composées , quoiqu'elles soient toutes équations composées dans les degrez supérieurs à commencer par le second (qui est regardé comme le premier) parce qu'elles sont le produit ou de deux équations du premier degré ou de plusieurs équations multipliées les unes par les autres.

Les équations pures & simples sont celles qui n'ont que deux termes dans le premier membre , & zéro seul dans le second membre ; & il n'y en a qu'une seule dans chaque degré , en lui donnant deux signes pour marquer les deux cas , dans le premier degré , c'est $\pm x \pm a = 0$.

L'équation pure & simple du second degré est $\pm x^2 \pm a^2 = 0$. ce qui fait deux cas ou deux formules.

L'équation pure & simple du troisième degré est $\pm x^3 \pm a^3 = 0$. & ainsi de même de tous les degrez supérieurs.

Mais dans tous les degrez supérieurs (à commencer par le second degré qui est proprement le premier degré ,) il y a une infinité d'équations affectées de termes moïens , or ces termes moïens sont les differens produits qui naissent de la multiplication des racines multipliées les unes par les autres.

Entre ces équations affectées de termes moïens , il y en a qui ont tous leurs termes par ordre , comme il se trouvent dans la formation régulière des puissances. Et il

à aussi des équations où il manque quelque terme, qui sont détruits par des signes contraires des racines différentes, par exemple lorsque la somme des racines positives est égale à la somme des racines négatives; cela détruit le second terme. Ainsi dans une équation du second degré si le second terme manque, c'est une marque qu'il est évanoui & qu'il a été détruit par des signes contraires, & que les deux racines sont égales, l'une positive, l'autre négative. Dans le troisième degré si le second terme manque, c'est que la somme des racines positives est égale à la somme des racines négatives; & ainsi des autres.

En quoi les Equations peuvent être contraires ou sou-contraires, différentes ou semblables.

En quoi deux Equations sont contraires, ou sou-contraires.

Deux équations contraires sont celles qui ont des racines contraires, c'est-à-dire, dont les racines sont réelles dans une équation & imaginaires dans l'autre, car le réel est contraire à l'imaginaire qui est impossible, comme $x^2 + 8x = -16$, dont les racines réelles sont négatives & réelles $x + 4 = 0$, & $x - 4 = 0$, mais dans $x^2 = -16$, les deux racines sont imaginaires, $x + \sqrt{-4} = 0$, & $x - \sqrt{-4} = 0$.

Deux équations sont sou-contraires, lorsqu'elles ont les mêmes racines qui sont dans l'une positive & dans l'autre négative, ce qui fait en ce cas une espèce d'opposition & de contrariété, comme dans $x^2 - 8x = -16$, dont les deux racines sont égales & positives $x - 4 = 0$, & dans l'équation sou-contraire $x^2 + 8x = -16$, dont les deux racines égales & négatives sont $x + 4 = 0$, pour avoir une équation sou-contraire, il faut changer les signes dans les termes pairs.

Analyse.

f

En quoi deux Equations sont différentes.

Deux équations ou plusieurs peuvent être différentes de plusieurs manières. 1°. Par les degrez lorsqu'elles sont de différens degrez; or il y a une infinité de degrez entre les équations comme entre les puissances, & c'est la plus grande différence qui puisse se rencontrer entre deux équations ou entre plusieurs.

2°. La seconde différence entre deux équations vient de ce que leurs racines sont contraires; sçavoir réelles dans une équation, & imaginaires dans l'autre équation.

3°. Il y en a encore une qui vient de la diversité qui se trouve entre les racines d'une équation & les racines d'une autre équation, selon toutes les diversitez des racines expliquées dans leur article particulier, car elles peuvent être positives ou négatives, rationnelles ou irrationnelles, &c.

4°. En ce qu'une équation a tous les termes & un autre ne les a pas tous, & qu'il y en a quelques-uns d'évanouïs.

En quoi deux Equations sont semblables.

Deux équations ou plusieurs équations peuvent être semblables de deux manières; sçavoir, ou Arithmétiquement ou géométriquement.

Les équations semblables Arithmétiquement sont celles dont les racines suivent la proportion arithmétique 1. 2. 3, &c. On les connoît du premier coup d'œil, parce qu'elles ont entièrement tous leurs termes semblables, excepté le dernier terme ou l'homogène qui est seul différent, par exemple, dans les équations suivantes, il y a trois équations semblables Arithmétiquement dans chaque colonne, trois dans le second degré, & trois dans le troisième degré dont les racines sont rationnelles.

$$1. \dots x^2 + 13x = 14. \quad x^2 + 10x = 11.$$

$$2. \dots x^2 + 13x = 34. \quad x^3 + 10x = 28.$$

$$3. \dots x^2 + 13x = 48. \quad x^3 + 10x = 57.$$

Les équations semblables géométriquement sont celles dont les racines ou valeurs de l'inconnuë x sont en proportion géométrique quelconque, ou ce qui revient au même, dont tous les termes d'une équation sont doubles ou triples ou quadruples, &c. de chacun des termes correspondans dans l'autre ou dans les autres équations.

$$\text{Comme dans } z^3 - 150z^2 + 7100z = 10500.$$

$$z^3 - 30y^2 + 284y = 840.$$

$$x^3 - 15x^2 + 71x = 105.$$

Car dans ces trois équations commençant par la dernière, la seconde est double de la dernière, & la première est quintuple de la seconde.

Des termes des Equations de tous les degrez , qui est-ce qui les distingue , & quel est leur nombre , comment il faut ordonner les termes d'une Equation.

Toutes les grandeurs qui entrent dans la formation d'une équation du second degré & des autres plus élevés ne sont pas pour cela des termes de l'équation, il y a une marque qui les distingue & qui est telle.

Le dernier terme d'une équation est toujours celui qui est exprimé, ou par un nombre ou par des lettres connues ou par une seule, sans mélange d'aucune grandeur inconnue, voilà le caractère qui le distingue en quel qu'endroit qu'il se trouve placé.

Tous les autres termes de l'équation sont distingués

f ij

par les puissances différentes de l'inconnue comme il suit, de telle sorte que toutes les grandeurs qui sont multipliées par une même puissance de l'inconnue ne font toutes ensemble qu'un seul terme, dont la place est fixée dans l'équation par l'ordre de la puissance qui les affecte ou multiplie.

Voici la manière d'ordonner les termes d'une équation, ou de les ranger dans l'ordre qui leur convient ; comme ce sont les puissances de l'inconnue qui détermine & qui règle la place des termes, je mets toujours dans le premier terme la plus haute puissance de l'inconnue, & je mets de suite les puissances décroissantes de la même inconnue dans les termes suivans dans le premier membre de l'équation, avec le zéro seul dans le second membre.

$$\begin{array}{l}
 \text{1}^{\text{er}}. \text{ terme. } 2^{\text{d}}. \text{ terme. } 3^{\text{e}}. \text{ terme. } 4^{\text{e}}. \text{ terme } \text{second} \\
 \hspace{15em} \text{ou homogène. membre.} \\
 x^3 \quad \text{---} a x^2 \quad \text{+} a b x \quad \text{+} a b c = 0 \\
 \text{---} b x^2 \quad \text{+} a c x \\
 \text{---} c x^2 \quad \text{+} b c x
 \end{array}$$

Tous les termes doivent être homogènes, c'est-à-dire avoir le même nombre de dimensions dans les équations comme dans les puissances.

Du nombre des termes dans une Equation.

Une équation d'un degré quelconque a toujours un terme de plus que l'exposant de son degré ne contient d'unités de même que dans les puissances, & lorsqu'il manque quelque terme qui a été détruit par des signes contraires, ce qui ne peut jamais se trouver dans la formation des puissances, mais ce qui arrive dans la formation des équations lorsqu'il y a des racines positives & négatives, je remplis les places vuides des termes dé-

truits par la puissance de l'inconnuë qui leur convient multipliée par zéro qui rend toujours ce terme nul, précédé des deux signes \pm , parce que zéro n'est ni positif ni négatif, mais le terme commun des grandeurs positives & des grandeurs négatives, ainsi lorsqu'il manque une puissance inférieure dans une équation, c'est une marque que ce terme est détruit.

Cela supposé, une équation du premier degré a deux termes, celle du second degré a trois termes, une équation du troisième degré contient quatre termes, celle du quatrième degré contient cinq termes, & ainsi des autres.

Le premier terme d'une équation & le dernier se nomment les extrêmes, les autres se nomment les termes moïens, chaque terme moïen contient une puissance de l'inconnuë multipliée par un nombre connu ou lettre connue qui est son multiplicateur ou coefficient ou facteur.

DES RACINES DES EQUATIONS.

Il y a trois choses à considérer dans les racines des Equations. 1°. Leurs genres, 2°. leur espèce, 3°. leur nombre.

Il y a quatre genres supérieurs ou se rapportent les différentes racines qui entrent dans la formation des Equations, ou les valeurs de l'inconnuë dans chaque Equation du premier degré, puisque nous avons démontré ci-dessus, que les racines d'une équation composée ou ses élémens, sont les équations du premier degré qui ont été multipliées pour la former, & que l'équation composée quelconque n'est autre chose que le produit qui résulte de la multiplication réitérée d'une même équation du premier degré, ou de plusieurs équations.

Quelque fois pour abrégé on nomme, mais improprement, la racine d'une équation la valeur de l'incon-

nuë x dans chaque équation du premier degré qui entre dans la formation d'une équation composée, ainsi dans $x^2 - 7x + 12 = 0$, 3 & 4 ne sont pas proprement ses racines, car 3 n'est que la valeur de l'inconnuë dans $x - 3 = 0$, & 4 n'est que la valeur de l'inconnuë dans $x - 4 = 0$; or ce sont ces deux équations simples du premier degré qui sont toutes entières les élémens ou les racines de l'équation composée $x^2 - 7x + 12 = 0$; elles entrent dans sa formation naturelle, & non pas leurs valeurs séparément.

Le premier genre comprend les racines positives.

Le second genre comprend les racines négatives.

Les deux premiers genres s'étendent aux deux genres suivans, dont le troisième comprend les racines égales, le quatrième genre comprend les racines inégales.

Ces quatre genres comprénent toutes les racines qui peuvent entrer dans la formation des équations, & se divisent en trois espèces primitives, qui ont chacune deux espèces subalternes qui les divisent encore, c'est ce que nous expliquerons dans le détail.

La racine est positive dans une équation du premier degré, lorsque la valeur de son inconnuë est positive, & je connois par le signe $-$ qui la lie à x qu'elle est positive, comme dans $x - a = 0$, car mettant a dans le second membre en changeant son signe, j'ai $x = +a$, donc cette valeur a est positive, je nomme $x - a = 0$ une racine positive.

Ainsi les racines sont positives dans une équation composée, si les valeurs de l'inconnuë sont positives dans les équations simples qui entrent dans sa formation.

Car si je multiplie $x - a = 0$ par elle-même, comme c'est une racine positive, l'équation du second degré $x^2 - 2ax + aa = 0$ qui en est le produit, a ses deux racines positives.

La racine négative au contraire d'une équation composée est une équation du premier degré où la valeur de l'inconnue est négative, & par conséquent précédée du signe $+$ comme $x + a = 0$ est une racine négative, car la valeur de x est négative, puisqu'en transposant j'ai $x = -a$, or il est évident que $-a$ est une grandeur négative.

Chaque genre de racine se divise en trois espèces primitives qui sont, 1°. les racines réelles, 2°. les racines imaginaires, 3°. les racines mixtes, en partie réelles & en partie imaginaires; mais elles sont proprement imaginaires, car l'imaginaire se communique au réel qui l'accompagne comme une contagion.

Chacune de ces espèces primitives se divise encore en deux espèces subalternes, ce qui comprend 1°. les racines rationnelles, 2°. les racines irrationnelles.

La première espèce contient les racines réelles, & cette première espèce primitive se divise en deux espèces subalternes, qui sont 1°. les racines réelles rationnelles, 2°. les racines réelles irrationnelles.

1°. Les racines réelles rationnelles ou commensurables, sont celles dont la valeur s'exprime exactement dans l'équation simple par un nombre, ou par une lettre, comme $x - a = 0$, $x - 4 = 0$.

2°. Les racines irrationnelles ou incommensurables, sont celles dont la valeur s'exprime par le secours du signe radical dans l'équation simple, comme dans $x - \sqrt{a} = 0$, $x - \sqrt{3} = 0$. Car on ne peut point exprimer cette valeur exactement, ni en lettres ni en nombres; mais on peut par la Méthode d'approximation en approcher à l'infini, en exprimant cette valeur par deux nombres, l'un plus grand, & l'autre plus petit, qui ne peuvent jamais atteindre à une expression exacte, parce qu'on ne peut tirer la racine exacte ni de \sqrt{a} , ni de $\sqrt{3}$.

La seconde espèce primitive qui contient les racines imaginaires se divise en deux espèces subalternes; sçavoir, 1^o. les racines imaginaires rationnelles, 2^o. les racines imaginaires irrationnelles, ou impossibles qui sont celles dont on ne peut se former aucune idée.

Comme la racine quarrée de $-aa$, qui est impossible, car il est impossible qu'un quarré ou en général, toute puissance dont l'exposant est pair soit, précédée du signe $-$, puisque $++$ donne $+$ au produit & $- \times -$ donne aussi $+$ au produit.

Ainsi ces racines imaginaires sont les racines paires des grandeurs négatives considérées comme des puissances paires, & on ne peut exprimer ces racines sans un signe radical qui a deux signes, l'un sous le signe qui est toujours $-$, & l'autre hors le signe ou devant le signe radical qui est ou $+$, ou $-$; ce signe qui est le premier suit toujours la règle des signes dans les opérations, ce qui le fait varier; mais le signe $-$ sous le radical ne peut jamais varier, il est de l'essence des grandeurs imaginaires.

Une racine imaginaire est rationnelle, lorsque la grandeur ou valeur imaginaire de l'inconnuë est une puissance exacte & parfaite, semblable à l'exposant du signe radical comme a^2 qui est une seconde puissance comme l'exposant de son radical dans $x + \sqrt{-a^2}$, comme a^3 qui est une troisième puissance parfaite & semblable à l'exposant du radical $\sqrt[3]{-}$ dans $x^2 + \sqrt[3]{-a^3}$, &c.

Une racine imaginaire est irrationnelle ou incommensurable, lorsque la valeur imaginaire qui est sous le signe n'est pas du même degré que l'exposant du signe radical sous lequel elle est placée comme $\sqrt[3]{b}$, dans $x^2 - \sqrt[3]{b}$. &c.

On connoît aussi peu les racines imaginaires rationnelles

nelles que les irrationnelles , elles marquent également l'impossibilité du Problème.

Remarque. Lorsqu'en cherchant à résoudre une équation proposée qui est réduite à sa plus simple expression , & dans laquelle par conséquent il n'y a point d'incommensurables , on trouve des racines imaginaires, c'est une marque qu'elles y sont en nombre pair avec des signes contraires , puisqu'elles sont détruites dans l'équation , & qu'elles ne paroissent point. Ainsi s'il y a une racine imaginaire dans une équation du second degré , elles sont tous les deux imaginaires ; dans une équation du troisième degré , il y a deux racines imaginaires avec une troisième racine qui est réelle ; dans une équation du quatrième degré , il y a quatre racines imaginaires , ou deux racines imaginaires avec deux racines réelles , & ainsi des autres.

La troisième espèce primitive contient les racines mixtes, c'est-à-dire mixtes imaginaires , en partie réelles & en partie imaginaires ; elles sont exprimées par deux grandeurs liées ensemble , dont l'une est réelle précédée d'un seul signe , & l'autre imaginaire précédée de deux signes , dont le second est — , ce qui est essentiel aux grandeurs imaginaires, elles sont précédées de deux signes $+ - a$ est une grandeur imaginaire sans signe radical $+ \sqrt{-b}$ est une grandeur imaginaire avec un signe radical.

Ainsi $+ a + - b$ est une grandeur mixte imaginaire dans $x + a + - b = 0$, de même $x + a + \sqrt{-c} = 0$, est une racine imaginaire.

Les racines mixtes imaginaires se trouvent souvent dans les équations , car étant multipliées les unes par les autres , elles donnent des grandeurs réelles dans le dernier terme de l'équation ; or elles ne peuvent donner de grandeurs réelles que lorsqu'elles se trouvent deux à deux , ou quatre à quatre , &c. toujours en nombre pair, car multipliant $+ \sqrt{-a} \times - \sqrt{-a}$, le produit réel

Analyse

est $+a$ qui est positif, mais $+\sqrt{-a} \times +\sqrt{-a}$ donne le produit négatif réel $-a$. de même aussi $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}$ donne le produit négatif réel $-a$.

Le troisième genre des racines des équations contient les racines égales, or les racines sont égales, lorsque la même équation du premier degré est multipliée par elle-même dans l'équation composée, comme dans $x^2 - 2ax + aa = 0$, il y a deux racines égales $x - a = 0$, & $x - a = 0$, dont la multiplication donne cette équation du second degré; de même dans $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0$, il y a trois racines égales, puisque cette équation contient le produit de $x - a = 0$ multiplié d'abord par elle-même, & de plus le produit qui en résulte multiplié par la même racine, qui sont deux multiplications par la même racine.

Le quatrième genre des racines contient les racines inégales, il s'en trouve dans toutes les équations formées par la multiplication des équations simples dont la valeur est différente; ce qui est si commun que cela ne demande pas d'autre explication. Ces deux derniers genres sont plutôt des propriétés que des vérités propres à donner des principes pour la résolution des équations.

Du nombre des racines dans les équations.

Le nombre des racines établit la plus grande diversité des équations qui est celle de leurs degrés, il y a toujours dans une équation autant de racines que l'exposant de son degré contient d'unités; ainsi dans le premier degré il y a une racine par simple analogie, ce n'est pas proprement une racine, puisque l'équation du premier degré n'est pas un produit.

Dans une équation du second degré il y a deux racines, dans une équation du troisième degré il y a trois racines:

dans le quatrième degré il y a quatre racines, &c.

De la diversité qui naît dans une Equation par les racines positives & négatives mêlées ensemble.

Il est évident que si tous les termes de l'équation ont le signe $+$, toutes les racines sont négatives, 2°. si les termes ont alternativement les signes $+$ & $-$, alors toutes les racines sont positives, 3°. si on trouve cet ordre interrompu, & qu'il y ait des signes $+$ & $-$ non pas alternativement, mais deux plus de suite $+$ $+$, ou deux $-$ $-$ dans quelques termes, alors il y a nécessairement des racines positives & des racines négatives.

De la préparation des équations.

Préparer une équation, c'est lui donner la forme la plus commode & la plus avantageuse pour parvenir à sa résolution, qui donne celle du Problème proposé.

Il y a quatre préparations nécessaires sans lesquelles on ne pourroit résoudre l'équation proposée, auxquelles j'en ajoute quatre autres qui sont d'élégance & non pas de nécessité, & qui rendent sa résolution plus facile.

1°. La première & la plus essentielle consiste à faire évanouir toutes les inconnues hors une seule dans l'équation unique à laquelle on a réduit toutes les équations qu'on a trouvé d'abord suivant les conditions du Problème.

2°. La seconde consiste à délivrer cette unique équation de toutes grandeurs incommensurables; s'il y en a, multipliant tous les termes de l'équation, pour l'élever à la puissance exprimée par l'exposant du signe radical de ces grandeurs incommensurables.

3°. La troisième consiste à délivrer cette équation de toute fraction, ce qui se fait encore en élevant l'équa-

tion à la puissance exprimée par le dénominateur de la fraction s'il n'y en a qu'une, ou par la somme de tous les dénominateurs s'il y a plusieurs fractions.

4°. La quatrième si le premier terme qui contient la haute puissance de l'inconnue à un coefficient différent de l'unité, il faut diviser tout par ce coefficient ou multiplicateur.

5°. Il faut rendre tous les termes positifs hors le premier seul qu'il faut rendre négatif pour rendre le dernier terme qui est l'homogène de comparaison positif, lorsqu'il est négatif dans l'équation proposée, & à cet effet je change tous les signes de l'équation.

Or si l'on change tous les signes des termes pairs, sçavoir le second, le quatrième, le sixième, &c. dans une équation sans toucher aux signes des termes impairs qui sont le premier, le troisième, le cinquième, &c. alors toutes les racines positives seront changées en négatives, & les racines négatives seront changées en positives.

Au contraire, si l'on change tous les signes dans les termes d'une équation où la puissance de l'inconnue a pour exposant un nombre impair comme x^1 , x^3 , x^5 , x^7 . &c. sans toucher aux signes des autres termes. Alors toutes les racines positives seront changées en négatives, & les racines négatives seront changées en positives.

6°. Il faut réduire l'équation proposée à sa plus simple expression ou à moindres termes; ce qui se fait en la réduisant à l'équation primitive d'où elle est dérivée comme il suit. Par exemple, soit l'équation proposée $A \dots z^3$

— $150z^2 + 7100z = 10500 = 0$, dont les coefficients numériques sont distinguez par les différentes puissances de l'inconnue z

Les trois racines de cette équation sont positives, c'est $z - 30 = 0$, $z - 50 = 0$, & $z - 70 = 0$,

Je divise tous coefficients ou multiplicateurs par quel-

qu'un des nombres premiers & par ses puissances correspondantes à celle de a ; mais pour abrégé je tente d'abord la division alternativement par les puissances des nombres impairs & des pairs la division de l'homogène ou dernier terme 10500, qui répond à a^3 , je le divise d'abord par les troisièmes puissances des nombres premiers seulement qui peuvent le diviser exactement.

Or le cube de 5 est 125, je divise $10500 = a^3$ par 125, j'ai le quotient exact 840. qui sera l'homogène d'une autre équation. Je continue la division par les autres puissances de 5, puisque $7100 = a^2$, je le divise par 25 carré de 5, le quotient est 284. De même je divise $150 = a$ par 5, le quotient est 30, ce qui donne l'équation plus simple,

$$B \dots y^3 - 30y^2 + 284y - 7100 = 0. \text{ dont les racines sont } y - 6 = 0, y - 10 = 0, y - 14 = 0.$$

Je tente encore par la division, si je pourrois réduire l'équation B à une expression plus simple par la suite des puissances d'un nombre premier correspondantes aux multiplicateurs marquez par les puissances de a ,

Je divise l'homogène $840 = a^3$ par 8 cube 2, le quotient est 105 qui est un autre homogène.

Je divise $284 = a^2$ par 4 carré de 2, le quotient est 71. Enfin je divise $30 = a$ par 2, le quotient est 15. ce qui donne une autre équation réduite encore

$$C \dots x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0.$$

À moindres termes, dont les racines sont positives $x - 3 = 0, x - 5 = 0, x - 7 = 0$.

Comme je ne peux plus diviser cette équation par les puissances d'aucun nombre premier; je conclus que c'est l'équation primitive dont l'équation proposée A est dérivée. Or il est plus facile de résoudre l'équation C que l'équation proposée A. Et après avoir trouvé ses racines je les multiplie par les diviseurs

que j'ai employé, 5 & 2; or 3. 5. 7 multipliez par 5 & par 2 donnent 30, 50, 70, pour racines, c'est-à-dire $z - 30 = 0$, $z - 50 = 0$, $z - 70 = 0$ sont les trois racines désirées, puisque ce sont les trois équations du premier degré dont l'équation proposée A contient le produit.

Remarque. Cette préparation qui n'est que d'élégance mais très-naturelle, puisqu'il est aussi absurde de vouloir résoudre une équation sans la réduire, comme de trouver la valeur d'une fraction sans la réduire à ses moindres termes, fournit un moyen facile & simple de réduire toutes les équations composées à leur équation primitive dont la valeur des racines sont des nombres premiers; ce qui donne moyen d'en dresser des tables, comme il est expliqué ci-dessus, page 58.

7°. Enfin toute équation proposée étant réduite à moindres termes, je place l'homogène seul qui est le dernier terme dans le second membre, parce qu'il est connu; & je mets dans le premier membre tous les autres termes. Cette disposition est la plus favorable pour la résolution, puisque tout l'inconnu est dans le premier membre, & le connu dans le second membre, ce qui est très-naturel; on voit clairement ce qu'il faut faire, c'est de tirer la racine de chaque membre. Toute autre disposition n'est ni assez simple, ni assez naturelle: j'avoue que la disposition de M^r. Descartes qui place toutes les grandeurs dans le premier membre, & le zéro seul dans le second membre, est préférable à toute autre disposition lorsqu'il s'agit de former une équation; mais celle-ci mérite la préférence lorsqu'il s'agit de résoudre ces équations.

En quoi consiste la résolution des Equations.

La résolution de toute équation consiste à trouver ses racines ou les valeurs de l'inconnue, c'est-à-dire à trouver

chacune des équations simples du premier degré qui en sont élémens & dont elle contient le produit , & d'en trouver autant que l'exposant du degré de l'équation contient d'unités ; il faut de plus que chaque valeur de l'inconnue soit un nombre entier , car une fraction ne peut point être la valeur d'une inconnue dans une équation préparée , où il ne se trouve par conséquent ni fractions ni incommensurables.

Mais avant d'entreprendre de résoudre les équations de tous les degrés à l'infini , c'est-à-dire d'en trouver les racines , il faut examiner d'abord comment les racines & leurs valeurs sont contenues dans une équation & dans tous ses termes , comme il suit.

Comment les racines ou les valeurs des racines sont contenues dans une équation & dans ses différens termes.

En général toute équation contient le produit de toutes ses racines multipliées les unes par les autres ; c'est la somme des produits particuliers. Mais chaque produit particulier donne un terme ou une partie d'un terme de l'équation.

Je prends pour exemple une équation littérale du troisième degré & une équation en nombres du même degré pour en examiner plus facilement chacun des produits.

$$\begin{array}{rcl}
 x & - & a = 0 \\
 \times x & + & b = 0 \\
 \hline
 x^2 & - & ax \\
 & + & bx - ab = 0 \\
 \times x & - & c = 0 \\
 \hline
 x^3 & - & ax^2 - abx + ac = 0 \\
 & + & bx^2 + acx \\
 & - & cx^2 - bcx
 \end{array}$$

$$x - 2 = 0$$

$$x x + 4 = 0$$

$$x^2 - 2x$$

$$+ 4x - 8 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x x - 2 = 0$$

$$x^3 + 2x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$- 2x^2 - 4x$$

$$\text{ou } x^3 + 0x^2 - 12x + 16 = 0.$$

Chacune de ces équations est du troisième degré & contient quatre termes.

Le premier terme contient la haute puissance de l'inconnue seule; & le dernier terme contient seulement le produit des trois racines, abc , ou 16, qui résulte en multipliant les trois racines l'une par l'autre $a \times b \times c = abc$, $2 \times 4 \times 2 = 16$. Voilà ce qui est contenu dans les deux termes extrêmes.

Tous les termes moyens contiennent un multiplicateur avec une puissance de l'inconnue, laquelle distingue les différens termes par la différence de ses degrez.

Ainsi dans l'équation litterale, le second terme contient trois grandeurs a , b , c multipliées par la même puissance x^2 qui est moindre de l'unité que dans le premier terme; c'est pourquoi ce sont des produits partiels qui ne font qu'un seul terme, or si $+b$ qui est positif = les deux grandeurs négatives a & c , alors ces grandeurs égales se détruisent par des signes contraires, comme il se voit dans l'équation numerique $x^3 + 0x^2 - 12x + 16 = 0$ dans laquelle le multiplicateur du second terme est détruit & sa place vuide est remplie d'un zéro, qui étant

étant nul, ce second terme est absolument nul,

Le second terme contient toujours la somme de toutes les racines, c'est-à-dire 1°. que son multiplicateur contient réellement la somme de toutes les racines si elles sont semblables, ou toutes positives ou toutes négatives. 2°. Si elles sont inégales avec des signes contraires, cette somme est la différence des positives & des négatives. 3°. Si les racines négatives sont égales aux positives, leur somme ou leur différence est zéro, ce qui détruit le second terme.

Le coefficient ou multiplicateur 12 du troisième terme $12x$ dans l'équation numérique du troisième degré contient la somme des produits des racines prises deux à deux & multipliées par une puissance de x moindre de deux unitez que dans le premier terme. La preuve en est évidente dans le troisième terme de l'équation littérale, dans laquelle le troisième terme contient les trois produits

\overline{abxx} , \overline{acxx} , \overline{bcxx} .

— abx .

+ acx .

— bcx .

Si l'on forme une équation d'un degré plus élevé, comme du quatrième, cinquième sixième degré, en répétant la multiplication des racines semblables ou différentes; On remarquera que le quatrième terme contient au multiplicateur quatre produits des valeurs de quatre racines prises trois à trois, multipliées par une puissance de l'inconnue moindre de trois unitez que celle du 1^{er} terme.

Que le multiplicateur du cinquième terme contient cinq produits des valeurs de quatre racines prises quatre à quatre. Et ainsi de suite à l'infini, on trouvera autant de produits que les racines peuvent en fournir de différents.

Analyse.

#

Mais le pénultième terme dans toute équation est toujours celui qui contient l'inconnue au premier degré avec tous les multiplicateurs partiels.

Il suit de là, 1°. Que dans les termes pairs qui sont le second, le quatrième, le sixième, &c. les racines y sont toujours dans le nombre qui suit, sçavoir, une à une pour multiplier l'inconnue dans le second terme; mais dans tous les termes pairs supérieurs, les racines y sont multipliées en nombre impair; sçavoir, trois à trois dans le quatrième terme, cinq à cinq dans le cinquième terme, sept à sept dans le huitième terme, &c.

2°. Dans les termes impairs à commencer par le troisième & continuer par le cinquième, le septième, &c. les racines y sont multipliées en nombre pair, sçavoir deux à deux dans le troisième terme, quatre à quatre, dans le cinquième terme, six à six, dans le septième terme, &c.

Règle générale pour les signes dans les différens termes des Equations.

1°. Si toutes les racines de l'équation sont négatives, tous les termes de l'équation ont nécessairement le signe $+$, car alors les racines sont, $x + a = 0$, ou $x + b = 0$, &c. Ainsi tous les produits qui en sont formez ont nécessairement le signe $+$.

2°. Si toutes les racines sont positives, comme $x - a = 0$, alors tous les termes ont alternativement les signes $+$ & $-$, car le premier terme a toujours le signe $+$ par hypothèse, le second terme a le signe $-$ puisqu'il contient la somme des racines positives qui ont toutes le signe $-$ dans l'équation simple, comme $x - a = 0$.

3°. Dans tous les autres termes de l'équation, lorsque toutes les racines sont positives, alors tous les termes pairs

comme le quatrième, le sixième, &c. ont le signe —, puisqu'ils ont pour multiplicateur ou coefficient la somme des produits des racines en nombre impair, qui ont le signe —.

Mais au contraire tous les termes pairs ont le signe +, puisqu'ils ont pour multiplicateurs les produits des valeurs des racines multipliées en nombre pair, puisque $- \times -$ donne +.

D'où il suit que lorsque toutes les racines sont positives, alors tous les termes de l'équation ont alternativement les signes + & —.

4°. Il suit de là que lorsqu'il y a des + & des — dans une équation, & qu'il se trouve tantôt deux fois le signe +, tantôt deux fois le signe —, c'est une marque qu'il y a des racines positives & des racines négatives.

5°. Comme le dernier terme est le produit de toutes les racines, lorsque le nombre des racines positives est pair, le dernier terme a le signe +; mais si le nombre des racines positives est impair, le dernier terme a le signe —; d'où il suit que si le dernier terme d'une équation a le signe —, il a nécessairement des racines positives réelles; car les racines imaginaires qui ont des signes contraires se détruisent & donnent le signe + au produit réel qu'elles rétablissent par leur multiplication.

SECTION TROISIÈME.

La résolution des Equations en général
& en particulier.

La résolution des Equations pures & simples de tous les degrez, avec la formation & la résolution des Equations du second degré.

LA résolution d'une équation d'un degré quelconque consiste en général à trouver les racines dont elle contient le produit, & ces racines sont les équations simples du premier degré par la multiplication desquelles l'équation est formée, voilà ses élémens. Ainsi, chercher les racines d'une équation, c'est la réduire aux équations simples du premier degré qui sont ses racines réelles; de sorte qu'on dit qu'une équation est irréductible lorsqu'on ne peut la réduire à des équations du premier degré dans lesquelles la valeur de l'inconnue soit réelle, mais imaginaire, ou mixte imaginaire.

Or une équation contient autant de racines qu'il y a d'unités dans l'exposant de son degré, qui est égal à l'exposant de l'inconnue du premier terme qui est toujours sa plus haute puissance dans l'équation. Ainsi il faut trouver pour chaque équation autant d'équations simples, ou du premier degré, que la haute puissance de l'inconnue contient d'unités. Il faut que leurs valeurs soient réelles, puisque l'inconnue dans une équation a autant de valeurs que l'exposant de sa haute puissance contient d'unités; & que les valeurs imaginaires marquent de l'impossibilité dans le Problème qui a donné l'Equation.

R E G L E G E N E R A L E.

Pour la résolution des Equations de tous les degrez à l'infini.

Soit en général l'équation d'un degré quelconque.

$$x^P \pm ax^{P-1} \pm b''x^{P-2} \dots \&c. = z^P$$

J'ajoute de part & d'autre la grandeur m élevée à la même puissance que l'inconnue c'est m^P . Alors je considère le premier membre de l'équation, comme la puissance du binôme $x \pm m$, du même degré que l'équation; elle seroit parfaite si tous les multiplicateurs a , b , &c. des termes moïens étoient les puissances inférieures de m .

$$\text{j'ai } x^P \pm ax^{P-1} \pm b''x^{P-2} \dots \&c. \pm m^P = m^P + z^P$$

Ensuite je tire la racine de chaque membre & du même degré que l'équation exprimée par cette formule;

$$\sqrt[P]{x^P \pm ax^{P-1} \pm b''x^{P-2} \dots \&c. \pm m^P} = \sqrt[P]{mx \pm z^P}$$

abrégeant cette expression & substituant des nombres en la place des lettres, je trouve en nombres entiers la première racine, qui me sert à diviser l'équation proposée; & le quotient est une seconde équation abaissée d'un degré sur laquelle j'opère de même, & je continue jusqu'à ce que j'aye réduit le tout à une équation du premier degré: par ce moïen je trouve de suite toutes les équations ou racines dont l'équation proposée est le produit, ce qui s'éclaircira dans la suite par des exemples.

La résolution des Equations pures & simples de tous les degrez à l'infini.

Il y a dans tous les degrez des équations pures & simples, & dans le second degré & dans les autres supérieurs, il y a aussi des équations affectées.

Les équations pures & simples sont celles qui n'ont que deux termes, l'inconnue avec un nombre ou une lettre connue, comme $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 2 = 0$, l'inconnue peut avoir un exposant quelconque, ce qui détermine le degré de l'équation, comme x^1, x^2, x^3, x^4 , &c. & le signe qui joint ces deux termes a le signe $+$, ou le signe $-$, ce qui comprend deux cas.

Premier cas. Si l'exposant de l'inconnue est un nombre pair comme x^2, x^4 , & que sa valeur ait le signe $-$, ce qui marque qu'elle est positive dans l'équation égale à zéro, comme $x^2 - 4 = 0$, $x^4 - 16 = 0$, les valeurs des deux racines sont réelles & rationnelles, l'une positive $x - 2 = 0$, l'autre négative $x + 2 = 0$, car en multipliant l'une de ces équations par l'autre

j'ai $x^2 - 2x$

$$+ 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - 0x - 4 = 0, \text{ ou } x^2 - 4 = 0.$$

Mais si j'ai $x^2 - 6 = 0$, ses deux racines sont réelles, mais irrationnelles ou incommensurables, puisque 6 n'est point un carré d'un nombre entier, mais de l'incommensurable $\sqrt{6}$. Sa racine positive est $x - \sqrt{6} = 0$, sa racine négative est $x + \sqrt{6} = 0$.

En général, soit $x^p - a^p = 0$ (dans laquelle l'exposant p signifie un nombre pair quelconque) on aura

pour les deux racines $x \mp a = 0$. car en élevant l'une & l'autre de ces deux binômes à la même puissance pair, en les multipliant l'un par l'autre autant de fois moins une que l'exposant contient d'unités, le produit sera toujours $x^p - a^p = 0$

Second cas. Si la valeur de l'inconnue est négative dans l'équation du second degré, du 4^e. & du 6^e. & autres degrés pairs, ce qu'on connoit par le signe $+$ comme dans $x^2 + 4 = 0$. dans ce cas les deux valeurs de l'inconnue x^2 sont imaginaires, c'est $x + \sqrt{-4} = 0$, & $x - \sqrt{-4} = 0$, car aiant élevé une quantité négative $-a$, ou -2 , à la seconde puissance ou à toute autre puissance, dont l'exposant est le nombre pair p , donnera toujours $+a^p$ & jamais $-a^p$, au produit.

Troisième cas. Si l'exposant de l'inconnue est un nombre impair, 1, 3, 5, 7, &c. l'inconnue dans le premier degré n'a qu'une seule valeur, mais dans les autres degrés, elle n'aura qu'une valeur réelle qui est positive, lorsqu'elle a le signe $-$, dans l'équation du premier degré, comme $x - a = 0$.

Quatrième cas. Mais cette racine réelle est négative lorsqu'elle a le signe $+$ dans l'équation du premier degré comme $x + a = 0$, toutes les autres racines sont imaginaires dans ces quatre cas; ainsi dans $x^3 - a^3 = 0$, qui est du premier degré la valeur a précédée du signe $-$ est positive.

Dans l'équation pure & simple du troisième degré $x^3 - a^3 = 0$, la racine est réelle & positive, c'est $x - a = 0$, car la racine d'une puissance positive est positive, mais dans $x^3 + a^3 = 0$ qui est une troisième puissance négative, la racine réelle est négative, c'est $x + a = 0$, puisque le cube d'une grandeur négative est négatif, en général soit $x^q - a^q = 0$ dans laquelle l'exposant q

marque un nombre pair quelconque) on 'aura pour la racine réelle & positive $x - a = 0$, au contraire dans $x^q + a^q = 0$, on aura pour racine réelle & négative $x + a = 0$.

Toutes les autres racines des degrez supérieurs à commencer par le troisième sont toutes imaginaires, excepté la première racine dans les équations pures & simples, soit que l'exposant de la haute puissance soit pair ou impair, & soit que le terme connu qui est l'homogène de l'équation soit positif ou négatif. Exemple, dans le troisième degré $x^3 - 8 = 0$, n'a qu'une seule racine réelle positive, $x - 2 = 0$, les deux autres sont mixtes imaginaires, & négatives dans la partie réelle, & l'une positive, l'autre négative dans la partie imaginaire, c'est $x + 1 - \sqrt{-3} = 0$, & $x + 1 + \sqrt{-3} = 0$.

Formation de $x^3 - 8 = 0$.

$$\begin{array}{r}
 x + 1 - \sqrt{-3} = 0 \\
 \times x + 1 + \sqrt{-3} = 0 \\
 \hline
 x^2 + 1x - x\sqrt{-3} \\
 + 1x + 1 - 1\sqrt{-3} \\
 + x\sqrt{-3} + 1\sqrt{-3} + 3 = 0. \\
 \hline
 x^2 + 2x + 1 + 3(+4) = 0 \\
 \text{ou } x^2 + 2x + 4 = 0 \\
 \times x - 2 = 0 \\
 \hline
 x^3 + 2x^2 + 4x \\
 - 2x^2 - 4x - 8 = 0 \\
 \hline
 x^3 + 0x^2 + 0x - 8 = 0 \\
 \text{ou } x^3 - 8 = 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

Formation

Formation de $x^3 + 8 = 0$.

$$\begin{array}{r}
 x - 1 - \sqrt{-3} = 0 \\
 \times x - 1 + \sqrt{-3} = 0 \\
 \hline
 x^2 - 1x - x\sqrt{-3} \\
 \quad - 1x + 1 + 1\sqrt{-3} \\
 \quad \quad + x\sqrt{-3} - 1\sqrt{-3} + 3 = 0 \\
 \hline
 x^2 - 2x + 4 = 0 \\
 \times x + 2 = 0 \\
 \hline
 x^3 - 2x^2 + 4x \\
 \quad + 2x^2 - 4x + 8 = 0 \\
 \hline
 x^3 \circ x^2 \quad 0x + 8 = 0 \\
 \text{ou } x^3 + 8 = 0
 \end{array}$$

De même dans $x^3 + 8 = 0$, la racine réelle est négative, c'est $x + 2 = 0$, les deux autres racines sont mixtes imaginaires, positives dans la partie réelle, mais l'une positive dans la partie imaginaire, l'autre négative, ce qui fait que l'imaginaire se détruit par des signes contraires, & ne paroît point dans l'équation, dans laquelle l'homogène 8 est le produit de la racine 2, par $4 = 1 + 3$, qui est le produit 1 de 1×1 réel, & 3 produit réel de l'imaginaire $+ \sqrt{-3}$, $x - \sqrt{-3}$.

Analyse.

x

Formation des Equations du second degré par toutes les espèces des racines différentes.

Chaque équation du second degré est formée par la multiplication de deux équations du premier degré.

Formation par deux racines égales & positives, réelles & rationnelles.

$$\begin{array}{r}
 x - 4 = 0 \\
 \times x - 4 = 0 \\
 \hline
 x^2 - 4x \\
 - 4x + 16 = 0 \\
 \hline
 x^2 - 8x + 16 = 0
 \end{array}$$

Formation par deux Racines égales & négatives, réelles & rationnelles.

$$\begin{array}{r}
 x + 4 = 0 \\
 \times x + 4 = 0 \\
 \hline
 x^2 + 4x \\
 + 4x + 16 = 0 \\
 \hline
 x^2 + 8x + 16 = 0
 \end{array}$$

Par deux Racines inégales positives.

$$\begin{array}{r}
 x - 4 = 0 \\
 \times x - 3 = 0 \\
 \hline
 x^2 - 4x \\
 - 3x + 12 = 0 \\
 \hline
 x^2 - 7x + 12 = 0
 \end{array}$$

Par deux Racines inégales négatives.

$$\begin{array}{r}
 x + 4 = 0 \\
 \times x + 3 = 0 \\
 \hline
 x^2 + 4x \\
 + 3x + 12 = 0 \\
 \hline
 x^2 + 7x + 12 = 0
 \end{array}$$

Par deux Racines égales l'une positive, l'autre négative.

$$\begin{array}{r} x - 6 = 0 \\ \hline x x + 6 = 0 \\ \hline x^2 - 6x \\ + 6x - 36 = 0 \\ \hline x^2 + 0x - 36 = 0 \\ \hline \hline \end{array}$$

Par deux Racines inégales, l'une positive, l'autre négative.

$$\begin{array}{r} x - 6 = 0 \\ \hline x x + 7 = 0 \\ \hline x^2 - 6x \\ + 7x - 42 = 0 \\ \hline x^2 + 1x - 42 = 0 \\ \hline \hline \end{array}$$

Formation par deux Racines irrationnelles.

Irrationnelles égales positives.

$$\begin{array}{r} x - \sqrt{2} = 0 \\ \hline x x - \sqrt{2} = 0 \\ \hline x^2 - x\sqrt{2} \\ - x\sqrt{2} + 2 = 0 \\ \hline x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 0 \\ \hline \hline \end{array}$$

Irrationnelles égales, l'une positive, l'autre négative.

$$\begin{array}{r} x - \sqrt{2} = 0 \\ \hline x x + \sqrt{2} = 0 \\ \hline x^2 - x\sqrt{2} \\ + x\sqrt{2} - 2 = 0 \\ \hline x^2 + 0x - 2 = 0 \\ \hline \hline \end{array}$$

Ces deux racines ne se rencontrent jamais dans une équation préparée & réduite à sa forme la plus simple : ni les racines irrationnelles inégales.

Formation des Equations du second degré par deux racines imaginaires du premier degré & toujours égales, & contraires.

$$\begin{array}{r}
 x + \quad - 4 = 0 \\
 \times x \quad - \quad - 4 = 0 \\
 \hline
 x^2 + \quad - 4x \\
 \quad - \quad - 4x + 16 = 0 \\
 \hline
 x^2 + 0x + 16 = 0. \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

Mixtes imaginaires.

$$\begin{array}{r}
 x - 4 + - 3 = 0 \\
 \times x - 4 - - 3 = 0 \\
 \hline
 x^2 - 4x + - 3x \\
 \quad - 4x + 16 - - 12 \\
 \quad - - 3x + - 12 + 9 = 0 \\
 \hline
 x^2 - 8x (+ 16 + 9) + 25 = 0
 \end{array}$$

Par deux racines imaginaires du second degré.

$$\begin{array}{r}
 x + 4 + \sqrt{-3} = 0 \\
 \times x + 4 - \sqrt{-3} = 0 \\
 \hline
 x^2 + 4x + x\sqrt{-3} \\
 \quad + 4x + 16 + 4\sqrt{-3} \\
 \quad - x\sqrt{-3} - 4\sqrt{-3} + 3 = 0 \\
 \hline
 x^2 + 8x (+ 16 + 3) + 19 = 0
 \end{array}$$

Remarque. La multiplication des imaginaires n'est point difficile, les imaginaires ont deux signes qui les précèdent, le second est toujours négatif, il est invariable dans le calcul, soit qu'il y ait un radical comme dans les imaginaires du second degré $\pm \sqrt{-}$, ou qu'il n'y ait point de signe radical comme dans les imaginaires du premier degré. $+$ — 3, & — — 3.

Une grandeur réelle multipliée par une grandeur imaginaire donne toujours un produit imaginaire, c'est une contagion qui se contracte même par l'addition & par la soustraction; or comme les racines imaginaires sont toujours deux à deux & avec des signes contraires dans une équation, dans laquelle ces imaginaires ne paroissent point, il suit de-là qu'ils se sont détruits, ainsi ils donnent des produits mixtes imaginaires, qui se détruisent aussi par des signes contraires, & il ne reste dans l'équation que le produit des grandeurs réelles par les grandeurs réelles, car le produit des imaginaires par les imaginaires contraires, rétablit la grandeur réelle par la multiplication qui est toujours positive, ainsi $+$ — 4 \times — — 4 $=$ $+$ 16, & de même $+$ — $\sqrt{3}$ \times — — $\sqrt{3}$ donne $+$ 3 au produit.

Mais lorsque les imaginaires ont le même premier signe, leur produit donne une grandeur négative, ainsi $+$ — 3 \times $+$ — 3, donne — 3. de même — $\sqrt{-3}$ \times — $\sqrt{-3}$ $=$ — 3.

La résolution des Equations du second degré.

Nous venons de donner la résolution des équations pures & simples de tous les degré à l'infini; il reste à donner la résolution des équations affectées de termes moïens, ce sont celles qui ont plus de deux termes; or les équations affectées des termes moïens ont, ou tous leurs termes comme les puissances, c'est-à-dire, au-

ant de termes que l'exposant de leur degré contient d'unités, & un terme encore de plus, ou bien il y manque quelque terme, ce qui est facile à connoître, puisque les puissances de l'inconnue distingue seule les termes & non pas le nombre des grandeurs, puisque nous avons vu que toutes les grandeurs qui sont multipliées par la même puissance de l'inconnue, ne font toutes ensemble qu'un seul & unique terme; donc si la suite des puissances est interrompue, ou qu'il s'y en trouve quelqu'une multipliée par zéro, c'est une marque que ce terme est évanoui & manque dans l'équation.

En général, toute équation du second degré s'exprime par cette formule $x^2 \pm ax = \pm b$. a & b sont des nombres ou des grandeurs connus.

L'exposant b en chiffre romain est pour conserver la Loi des homogènes, qui veut que dans une équation tous les termes aient le même nombre de dimensions, ici b est un nombre quelconque.

L'inconnue x est élevée à la 2^{de}. puissance, par conséquent elle a deux valeurs ou deux racines exprimées par

$$\text{cette formule générale } x \pm \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa \pm b} = 0$$

Ces formules sont des règles abrégées qui prescrivent ce qu'il faut faire pour trouver les racines des équations, mais comme la formule générale pour les racines embarrasse fort les commençans, pour leur en faciliter l'intelligence, j'entrerai dans le détail de tous les cas possibles en supposant tous les termes réels, il y a six cas qui donnent six formules, qu'il faut éclaircir par des exemples; sçavoir, les deux formules des équations pures & simples, la première formule $x^2 - b = 0$, dont les deux racines réelles, l'une positive & l'autre négative, sont $x \pm \sqrt{b} = 0$, la seconde formule est $x^2 + b = 0$, dont les deux racines sont imaginaires $x \pm \sqrt{-b} = 0$.

Il reste donc quatre formules des six formules ordinaires, savoir, la troisième, la quatrième, la cinquième & la sixième qu'il faut expliquer, & ce sont les seuls cas des équations du second degré affectées de termes moïens.

$$3^e. x^2 + ax = b$$

$$4^e. x^2 - ax = b$$

$$5^e. x^2 + ax = -b$$

$$6^e. x^2 - ax = -b.$$

La résolution des Equations affectées du second degré.

Dans la troisième formule $x^2 + ax = b''$ voilà pour l'équation : mais la formule pour les racines est x

$$= -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + b''}.$$

Dans cette formule toutes les équations ont deux racines réelles & inégales la plus petite positive, la plus grande, négative. Exemple, en nombres. Soit l'équation $x^2 + 10x = 144$. pour trouver les racines. suivant ce qui est prescrit par la formule des racines qui est une règle abrégée, j'ajoute de part & d'autre $\frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}100$ j'ai donc $x^2 + 10x + \frac{1}{4}100 = \frac{1}{4}100 + 144$. dont il faut trouver les racines.

1°. Je prends la moitié du multiplicateur $10 = a$, c'est $5 = \frac{1}{2}a$, que je garde à part, ce sera la première partie de la valeur de la racine.

2°. Pour avoir le reste de sa valeur, je quarre cette moitié, c'est $\frac{1}{4}aa$, ou $\frac{1}{4}100$, ou $\frac{10^2}{4} = 25$, ou simplement je quarre 5, & j'ai 25.

3°. A ce carré j'ajoute l'homogène qui est le dernier terme sans changer son signe, c'est $\frac{1}{4}aa + b''$. ou $25 + 144 = 169$.

4°. J'en tire la racine quarrée, c'est $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b''}$, ou $\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

5°. Pour avoir la première racine, je prends la moi-

tié du coefficient ou multiplicateur du second terme que j'ai mis d'abord à part $\frac{1}{2} a$, ou 5, que j'ajoute à cette racine quarrée trouvée, c'est $x = -\frac{1}{2} a +$

$\sqrt{\frac{1}{4} a a + b''}$. ou $x = -5 + \sqrt{25 + 144}$, ou $x = -5 + \sqrt{169}$, ou $x = -5 + 13$ qui se réduit à $x = 8$. voilà la première racine qui est positive & la plus petite.

6°. Pour avoir la seconde racine qui est négative, par la formule, c'est $x = -\frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} a a + b''}$,

& en nombres $x = -5 - \sqrt{\frac{1}{4} 100 + 144}$, ou $x = -5 - \sqrt{25 + 144}$ qui donne $x = -5 - \sqrt{169}$, ou $x = -5 - 13$, qui donne enfin $x = -18$, c'est la seconde racine qui est négative & la plus grande.

Pour abrégé dans l'équation proposée $x^2 - 10x = 144$, pour rendre le premier membre un quarré parfait, j'ajoute dans chaque membre le quarré de la moitié 5 du multiplicateur du second terme 10, c'est $\frac{1}{4} 100$, ou $\frac{100}{4}$, ou 25, ce qui donne $x^2 - 10x + 25 = 25 + 144$.

2°. Je tire la racine quarrée de chaque membre, c'est $x + 5 = \sqrt{25 + 144}$, ou $x + 5 = \sqrt{169} = 13$, ce qui donne $x + 5 = 13$, & par transposition $x = 5 + 13 = 18$, c'est la première racine, la seconde est $x = -5 - 13 = -18$, c'est la seconde racine négative.

Pour avoir la démonstration, il suffit de multiplier la première racine $x = 8 = 0$, par la seconde $x = -18 = 0$, leur produit donnera l'équation proposée.

$$\begin{array}{rcl}
 x - 8 & = & 0 \\
 x x + 18 & = & 0 \\
 \hline
 x^2 - 8x & & \\
 + 18x - 144 & = & 0 \\
 \hline
 x^2 + 10x - 144 & = & 0
 \end{array}$$

Remarque première. Il y a dans cette équation deux termes de suite, sçavoir le premier & le second qui ont le signe $+$, & le dernier a le signe $-$, ce qui montre que l'équation a une racine positive & une racine négative, car si les deux racines étoient négatives tous les termes auroient le signe $+$, & si les deux racines étoient positives, les termes auroient alternativement les signes $+$ & $-$.

Résolution des Equations affectées du second degré.

Dans la quatrième formule $x^2 - ax = b''$. qui a pour la formule de ses deux racines $x = \frac{1}{2} a \pm$

$$\sqrt{\frac{1}{4} aa + b''}.$$

Cette formule est soustraite à la précédente, car ce sont les mêmes racines, l'une positive & l'autre négative, qui ont des signes contraires, à ceux qu'ils ont dans la troisième formule, ainsi soit l'équation proposée dans la quatrième formule $x^2 - 10x = 144$.

Sa grande racine positive est $x - 18 = 0$, & sa petite racine négative est $x + 8 = 0$; au contraire dans la troisième formule soit l'équation proposée $x^2 + 10x = 144$, la racine négative est $x^2 + 18 = 0$, la positive est $x - 8 = 0$.

Pour les trouver, 1°. j'ajoute d'abord dans chaque membre de l'équation proposée le carré $+\frac{1}{4}aa$ de la

Analyse.

j

moitié du multiplicateur — a du second terme, ce qui donne $x^2 - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + b''$. & dans l'équation numérique $\frac{1}{4}100$, qui donne $x^2 - 10x + \frac{1}{4}100 = \frac{1}{4}100 + 144$.

2°. Je tire la racine quarrée de chaque membre,

j'ai $x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + b''}$. dans la formule, & dans l'équation numérique, j'ai $x - 5 =$

$\sqrt{\frac{1}{4}100 + 144}$, qui donne en abrégant $x - 5 = \sqrt{25 + 144}$, ou $x - 5 = \sqrt{169}$, qui donne enfin $x - 5 = 13$, & par transposition $x = 5 + 13$, qui donne $x = 18$, c'est la grande racine.

3°. Pour avoir la seconde racine, j'ai par la formule $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b''}$. & dans l'équation numérique $x = 5 - \sqrt{\frac{1}{4}100 + 144}$, qui donne $x = 5 - \sqrt{25 + 144}$, ou $x = 5 - \sqrt{169}$, ou $x = 5 - 13$, qui donne enfin $x = -8$, c'est la petite racine qui est négative.

Remarque seconde. Pour éviter les fractions, si j'ai l'équation $x^2 - 5x = 24$, où $\frac{1}{4}aa + b''$, sont deux nombres dont on ne peut trouver exactement la racine, puisque $a = 5$ est un nombre impair, dont la moitié est $2\frac{1}{2}$, pour éviter les fractions, je quarré le nombre impair $a = 5$, son quarré est $aa = 25$, je l'ajoute au quadruple du dernier terme 24, puisque 4 est dénominateur de la fraction $\frac{1}{4}aa$, la somme est $25 + 96 = 121$, j'ai donc $\sqrt{\frac{1}{4}aa + b''} = \sqrt{121}$, dont la racine est 11, ce qui donne la somme des racines, j'en ôte 3 la plus grande moitié du multiplicateur 5, le reste 8 est la plus grande racine positive, & cette grande moitié 3 du multiplicateur 5 est elle-même la petite racine négative;

j'aurai encore cette petite racine en ôtant le multiplicateur 5 de la grande racine 8.

Remarque troisième. On peut encore avoir la seconde racine d'une équation du second degré par la division après avoir trouvé la première, soit $x^2 + 10x - 144 = 0$, dont j'ai trouvé la racine positive $x - 8 = 0$, je divise l'équation par cette racine, & le quotient donne l'autre racine.

$$\begin{array}{l} \text{Diviseur } \left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende} \\ x - 8 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient \& 2^{de} Racine} \\ x^2 + 10x - 144 = 0 \\ x + 18 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Quotients.

$$\begin{array}{rcl} x & . & . & . & x^2 - 8x & \text{premier produit à ôter.} \\ & & & & 0 + 18x - 144 & \text{premier reste.} \\ + 18 & & + 18x - 144 & \text{second produit à ôter.} \\ = 0 & & 0 & \text{second \& dernier reste.} \end{array}$$

Remarque quatrième. Il y a une série infinie d'équations dans la troisième formule, qu'on peut former sur chacune des deux valeurs de l'inconnue x , parce qu'on peut combiner tous les nombres possibles avec une valeur déterminée en nombre quelconque. Ainsi prenant une racine constante égale à 2, l'autre racine peut varier par la suite de tous les nombres à l'infini, ce qui fait une série infinie, & comme je peux prendre successivement pour la valeur constante de la première racine chacun des nombres à l'infini, & dans chaque cas prendre successivement tous les nombres à l'infini pour la seconde racine; il suit de là que je peux former une infinité de séries infinies d'équations du second degré dans cette troisième

formule, dans laquelle le multiplicateur a croissant continuellement, fait aussi croître à proportion le dernier terme ou l'homogène de comparaison qui contient le produit des deux racines.

Outre cela sur chaque valeur déterminée de a constante, on peut former une série infinie d'équations dont tous les homogènes sont différens, ce qui donne des équations Arithmétiquement semblables à l'infini.

Séries infinies d'équations du second degré dans la troisième formule sur a & b variables.

<u>Pour $x = z$.</u>	<u>Pour $x = 4$.</u>
$x^2 + 0x = 0$	$x^2 + 0x = 16$. Rac. — $4 + 4$
$x^2 + 1x = 6$	$x^2 + 1x = 20$. R. — $5 + 4$
$x^2 + 2x = 8$	$x^2 + 2x = 24$. R. — $6 + 4$
$x^2 + 3x = 10$	$x^2 + 3x = 28$. R. — $7 + 4$
$x^2 + 4x = 12$	$x^2 + 4x = 32$. R. — $8 + 4$
$x^2 + 5x = 14$	$x^2 + 5x = 36$. R. — $9 + 4$
$x^2 + 6x = 16$	$x^2 + 6x = 40$. R. — $10 + 4$
$x^2 + 7x = 18$	$x^2 + 7x = 44$. R. — $11 + 4$
&c. à l'infini.	&c. à l'infini.

Série infinie pour a constant $= 7$.

$x^2 + 7x = 0$	
$x^2 + 7x = 8$	
$x^2 + 7x = 18$	
$x^2 + 7x = 30$	
$x^2 + 7x = 44$	
$x^2 + 7x = 60$	
$x^2 + 7x = 78$	
$x^2 + 7x = 98$	
$x^2 + 7x = 120$	&c. à l'infini.

Remarque cinquième. Dans cette troisième formule toutes les racines sont inégales, il n'y en peut avoir d'égales, car elles sont dans la première formule qui comprend les équations pures & simples.

Dans la troisième formule la grande racine est toujours négative à cause du signe $+$ du second terme, c'est $x + a$, & la petite racine est positive, c'est $x - a$.

Remarque sixième. Dans la quatrième formule $x^2 - ax = b''$ les équations possibles sur une valeur déterminée du multiplicateur a du second terme forment deux séries, l'une finie réellement, qui arrive au zéro homogène, après lequel commence la seconde série qui est infinie, dont tous les homogènes croissent à l'infini.

Dans la première série qui est finie, les deux racines sont toutes les deux positives & inégales.

Dans la seconde série qui est infinie, la grande racine est positive, & la plus petite est négative.

Série finie d'équations dans la quatrième formule du second degré ;

Formule. $x^2 - ax = b''$. en lettres.

La même $x^2 - 7x = b''$. en chiffres.

Série finie.

$$x^2 - 7x = 0. \text{ Rac. } x - 0 = 0, xx - 7 = 0.$$

Minimum. $x^2 - 7x = 6. \text{ Rac. } x - 1 = 0, xx - 6 = 0.$

$$x^2 - 7x = 10. \text{ Rac. } x - 2 = 0, xx - 5 = 0.$$

Maximum. $x^2 - 7x = 12. \text{ Rac. } x - 3 = 0, xx - 4 = 0.$

Maximum. $x^2 - 7x = 12. \text{ Rac. } x - 4 = 0, xx - 3 = 0.$

$$x^2 - 7x = 10. \text{ Rac. } x - 5 = 0, xx - 2 = 0.$$

$$x^2 - 7x = 6. \text{ Rac. } x - 6 = 0, xx - 1 = 0.$$

$$x^2 - 7x = 0. \text{ Rac. } x - 7 = 0, xx - 0 = 0.$$

Point de partage & origine de la série infinie.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 7x &= 8. \text{ Rac. } x - 8 = 0, xx + 1 = 0. \\
 x^2 - 7x &= 18. \text{ Rac. } x - 9 = 0, xx + 2 = 0. \\
 x^2 - 7x &= 30. \text{ Rac. } x - 10 = 0, xx + 3 = 0. \\
 x^2 - 7x &= 44. \text{ Rac. } x - 11 = 0, xx + 4 = 0. \\
 x^2 - 7x &= 60. \text{ Rac. } x - 12 = 0, xx + 5 = 0. \\
 x^2 - 7x &= 78. \text{ Rac. } x - 13 = 0, xx + 6 = 0. \\
 x^2 - 7x &= 98. \text{ Rac. } x - 14 = 0, xx + 7 = 0. \\
 x^2 - 7x &= 120. \text{ Rac. } x - 15 = 0, xx + 8 = 0. \\
 x^2 - 7x &= 144. \text{ Rac. } x - 16 = 0, xx + 9 = 0. \\
 &\&c. \quad \&c. \quad \&c. \text{ à l'infini.}
 \end{aligned}$$

Série des Equations de la quatrième formule sur les valeurs de a & de x, variables mais égales.

Racines.

$$\begin{aligned}
 0. \quad x^2 - 0x &= 0. \\
 1. \quad x^2 - 1x &= 0. \\
 2. \quad x^2 - 2x &= 0. \\
 3. \quad x^2 - 3x &= 0. \\
 4. \quad x^2 - 4x &= 0. \\
 5. \quad x^2 - 5x &= 0. \\
 6. \quad x^2 - 6x &= 0. \\
 7. \quad x^2 - 7x &= 0. \\
 8. \quad x^2 - 8x &= 0. \\
 9. \quad x^2 - 9x &= 0.
 \end{aligned}$$

Série pour x constant $\equiv 4$ & a variable.

$$x^1 - 0x = 0. \text{ Racines. } x - 4 = 0 \times x + 0 = 0.$$

$$x^1 - 1x = + 12 \dots x - 4 = 0 \times x + 3 = 0.$$

$$x^2 - 2x = + 8 \dots x - 4 = 0 \times x + 2 = 0.$$

$$x^2 - 3x = + 4 \dots x - 4 = 0 \times x + 1 = 0.$$

$$x^2 - 4x = - 0 \dots x - 4 = 0 \times x + 0 = 0.$$

$$x^2 - 5x = - 4 \dots x - 4 = 0 \times x - 1 = 0.$$

$$x^2 - 6x = - 8 \dots x - 4 = 0 \times x - 2 = 0.$$

$$x^2 - 7x = - 12 \dots x - 4 = 0 \times x - 3 = 0.$$

$$x^2 - 8x = - 16 \dots x - 4 = 0 \times x - 4 = 0.$$

$$x^2 - 9x = - 20 \dots x - 4 = 0 \times x - 5 = 0.$$

$$x^2 - 10x = - 24 \dots x - 4 = 0 \times x - 6 = 0.$$

&c. à l'infini homogènes &c. à l'infini.
négatifs.

Résolution de la cinquième formule $x^2 + ax = - b''$.
& de la sixième formule $x^2 - ax = - b''$.

Dans ces deux formules il y a deux racines qui sont, ou toutes deux réelles, ou toutes les deux imaginaires; de sorte que celles qui sont toutes les deux positives dans la cinquième formule sont toutes les deux négatives dans la 6^e. formule, suivant les différens cas qu'il faut développer.

La formule de ces deux racines est $x = \mp \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa - b''}$.

Or comme suivant cette formule, il faut prendre la somme ou la différence du binôme $\frac{1}{4} aa - b''$. qui est sous le signe radical, & en tirer la racine, cette som-

me devient négative, lorsque $\frac{1}{4}aa$ est moindre que l'homogène b'' , qui représente en général tout nombre entier qui peut être l'homogène ou le dernier terme de l'équation; or lorsque cette somme ou cette différence est négative, c'est une seconde puissance négative dont il faut tirer la racine quarrée, or il est impossible qu'une seconde puissance, & même que toute puissance paire $—b''$, en général soit procédée du signe $—$, puisque $—b \times —b$ donne $+b''$, de même que $+b \times +b$ donne $+b''$. donc cette grandeur est une grandeur impossible, & sa racine est imaginaire & impossible. Il suffit pour cela que $\frac{1}{4}aa$ soit moindre que b'' , car $\frac{1}{4}aa$ est moindre que $\frac{1}{2}a$, puisque le quarré d'une fraction est moindre que la fraction & décroît en raison des puissances, c'est ce qui m'engage à considérer les différens rapports qui peuvent se rencontrer entre $\frac{1}{4}aa$ & b'' .

Premier cas, lorsque $\frac{1}{4}aa = b''$. ou lorsque $\frac{1}{2}a = \sqrt{b''}$ alors les deux racines sont égales, dans la cinquième formule $x + ax = —b''$, soit l'équation $x^2 + 10x = —25$ ses deux racines sont négatives, c'est $x + 5 = 0$. car suivant la formule c'est $x = —\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa — b''}$, ou $x = —5 \pm \sqrt{\frac{100}{4} — 25}$ ou $x = —5 \pm \sqrt{25 — 25}$, qui donne $x = —5 \pm \sqrt{0}$. & par transposition $x + 5 = 0$, & $x + 5 = 0$ qui sont les deux racines négatives désirées.

Dans la sixième formule $x^2 — ax = —b''$, soit l'équation $x^2 — 10x = —25$, j'ai la formule

$x = +\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa — b''}$. qui donne $x = 5 \pm \sqrt{\frac{100}{4} — 25}$, ou $x = 5 \pm \sqrt{25 — 25}$, ou $x = 5 \pm 0$. & par transposition $x — 5 = 0$, & $x — 5 = 0$, qui sont les deux racines positives dans ce cas pour la sixième

fixième formule ; la formation de l'équation en donnera la preuve.

Le second cas, est lorsque $\frac{1}{4}aa$ surpasse b'' , ou lorsque $\frac{1}{4}a$ surpasse $\sqrt{b''}$ alors la somme ou le reste du binôme $\frac{1}{4}aa - b''$ qui est sous le signe radical

$\sqrt{\frac{1}{4}aa - b''}$, est toujours une grandeur positive, dans ce second cas les deux racines sont réelles, inégales & négatives dans la cinquième formule.

Exemple. Soit l'équation $x^2 + 10x = -16$. ses deux racines réelles inégales & négatives sont $x + 8 = 0$, $x + 2 = 0$. car j'ai par la formule $x = -5 \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 16}$, ou $x = -5 \pm \sqrt{25 - 16}$, ou $x = -5 \pm \sqrt{9}$, ou $x = -5 \pm 3$. donc $x = -2$ & $x = -8$.

Mais dans la fixième formule les deux racines sont réelles, inégales & positives. *Exemple.* Soit l'équation $x^2 - 10x = -16$, j'ai par la formule de la racine $x = +5 \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 16}$, ou $x = 5 \pm \sqrt{25 - 16}$ qui donne $x = 5 \pm \sqrt{9}$, ou $x = 5 \pm 3$, qui donne $x = 8$, & $x = 2$. Donc les deux racines positives sont $x - 8 = 0$ & $x - 2 = 0$.

Le troisième cas, est lorsque $\frac{1}{4}aa$ est moindre que b'' , ou ce qui revient au même, lorsque b'' surpasse $\frac{1}{4}aa$, ou lorsque $\sqrt{b''}$ surpasse $\frac{1}{4}a$; dans ce troisième cas les deux racines sont imaginaires, mais égales & négatives dans la cinquième formule. *Exemple.* Soit l'équation $x^2 + 8x = -25$. Ses racines sont $x = -4$

$\pm \sqrt{\frac{64}{4} - 25}$, ou $x = -4 \pm \sqrt{16 - 25}$, ou $x = -4 \pm \sqrt{-9}$ qui donne $x = -4 \pm 3i$. Donc les deux racines sont $x + 4 + 3i = 0$, &

Analyse.

z

$x + 4 - - 3 = 0$, qui sont deux racines imaginaires à cause des doubles signes $+ -$, & $- -$.

Dans la sixième formule, les deux racines sont imaginaires, égales & positives. Soit l'équation $x^2 - 8x$

$= - 25$, ses racines sont $x = 4 \pm \sqrt{\frac{64}{4} - 25}$, ou $x = 4 \pm \sqrt{16 - 25}$, ou $x = 4 \pm \sqrt{-9}$ qui donne $x = 4 \pm - 3$. Donc les deux racines positives, égales & imaginaires sont $x - 4 + - 3 = 0$, $x - 4 - - 3 = 0$.

La preuve se tire de la formation de ces équations par les deux racines trouvées.

Formation de l'Equation dans la cinquième Formule.

Par les deux racines imaginaires égales & négatives.

$$\begin{array}{r}
 x + 4 + - 3 = 0 \\
 \times x + 4 - - 3 = 0 \\
 \hline
 x^2 + 4x + - 3x \\
 + 4x + 16 + - 12 \\
 - - 3x - - 12 + 9 = 0 \\
 \hline
 x^2 + 8x + (-16 + 9) + 25 = 0 \\
 \text{ou } x^2 + 8x + 25 = 0.
 \end{array}$$

Remarque. Toutes les racines de l'équation ont le signe $+$, ce qui marque que toutes les racines sont négatives, ce qui fait que cette formule n'est d'aucun usage: d'ailleurs le dernier terme étant positif dans cette équation égalée à zéro, & dont l'exposant est un nombre pair; c'est une marque qu'il y a des racines imaginaires & en nom-

bre pair, puisqu'elles ne peuvent se rencontrer que deux à deux, quatre à quatre, &c.

Donc les deux racines de l'équation sont imaginaires.

Formation de l'Equation dans la sixième formule.

Par les deux racines imaginaires égales & positives.

$$x - 4 + - 3 = 0.$$

$$x x - 4 + - 3 = 0.$$

$$x^2 - 4x + - 3x$$

$$- 4x + 16 - - 12$$

$$- - 3x + - 12 + 9 = 0$$

$$x^2 - 8x (+ 16 + 9) + 25 = 0.$$

$$\text{ou } x^2 - 8x + 25 = 0.$$

Remarque. Les imaginaires communiquent leur contagion dans les racines à tout ce qui les accompagne ; ainsi la racine $4 + - 3$ qui est en partie réelle & en partie imaginaire, ou mixte imaginaire est regardée comme totalement imaginaire.

L'imaginaire se détruit ici par des signes contraires, & le produit rétablit la grandeur réelle & positive $+ 9$. parce que le premier chiffre des deux qui précède l'imaginaire est différent dans les deux racines ; voyez ce que nous en avons dit au commencement de cette Section. Nous en parlerons encore dans la suite. Ces racines imaginaires marquent que le Problème qui donne cette équation, est absolument impossible.

Ainsi on peut se dispenser de résoudre ces sortes d'équations lorsqu'on a remarqué que les racines sont ima-

ginaires, si ce n'est qu'elles viennent de la résolution d'autres équations des degrez plus élevez.

Remarque générale. Dans toutes les équations du second degré, qui comme celle-ci a deux racines inégales, & positives.

$$x^2 - 10x = -21$$

Il y a deux résolutions, & x^2 représente généralement le quarré des deux racines 7 & 3.

$$x^2 - 10x = -21$$

qui sont 49 quarré de 7 grande rac. $49 - 70 = -21$

& 9 quarré de la petite racine 3. $9 - 30 = -21$

comme cela est général dans toutes les équations du second degré; il suit de là que toutes les équations du second degré ont autant de résolutions que l'exposant de leur degré contient d'unités, ce qui est général dans toutes les équations déterminées.

La résolution des Equations du second degré qui ont des racines irrationnelles.

Nous n'avons donné jusques ici que des exemples d'équations dont les racines sont rationnelles pour ne point embarrasser les commençans en multipliant les difficultés; j'expliquerai ici la manière de résoudre les équations qui ont des racines réelles, irrationnelles; & ensuite je parlerai des racines irrationnelles imaginaires, qui sont celles qu'on ne peut exprimer exactement ni en nombres entiers, ni par des fractions ni par un nombre mixte quelconque, mais dont on peut approcher à l'infini comme nous le verrons; comme entre les deux homogènes consécutifs & semblables 36 & 50, il y a dans la suite naturelle les treize nombres 37, 38, 39, 40, 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. qui remplissent cet interval. Ainsi entre l'équation $x^2 + 5x = 36$ dont les racines sont $x - 4 = 0$, $x + 9 = 0$, ou pour abrégé dont les valeurs de x sont $+4$ & -9 d'une part.

Et l'équation $x^2 + 5x = 50$ dont les valeurs de x sont $+ 5$ & $- 10$. qui sont deux équations arithmétique-
ment semblables, puisqu'elles ne diffèrent que dans
le dernier terme. Si je les écris dans une colonne avec une
distance j'en remplirai l'interval de treize équations qui
seront aussi arithmétique-ment semblables, parcequ'elles ne
différeront que dans le seul dernier terme: or on ne peut
exprimer les racines de ces équations par exemple de
 $x^2 + 5x = 37$ par aucun nombre entier; car comme
 $6 \times 6 = 36$. & $6 \times 7 = 42$ dans les nombres, ainsi la
racine de l'homogène 37 est irrationnelle dans l'équation
 $x^2 + 5x = 37$. Si je prens pour racines $x = 4 - \sqrt{1}$
 $= 0$, & $x = 9 + \sqrt{1} = 0$, l'erreur sera 13 $\sqrt{1} = 13$
qui est la somme des deux racines, puisque $13 \sqrt{1} = 13$.

$$\begin{array}{r}
 x - 4 - \sqrt{1} = 0 \\
 x x + 9 + \sqrt{1} = 0 \\
 \hline
 x^2 - 4x - x\sqrt{1} \\
 + 9x - 36 - 9\sqrt{1} \\
 + x\sqrt{1} - 4\sqrt{1} - 1 = 0. \\
 \hline
 x^2 + 5x - 37 - 13\sqrt{1} = 0.
 \end{array}$$

Voici la série de treize équations arithmétique-ment sem-
blables dont les racines sont irrationnelles, c'est-à-dire plus
grande que $+ 4$ & $- 9$, mais plus petites que $+ 5$ &
 $- 10$ qui sont les racines rationnelles des équations A & B
qui sont au commencement & à la fin de cette Série.

Donc la petite racine est entre 4 & 5, la grande en-
tre 9 & 10.

Série de treize équations semblables.

$$A...x^2 + 5x = 36 \text{ Racines } x - 4 = 0 \& x + 9 = 0$$

$$1...x^2 + 5x = 37$$

$$2...x^2 + 5x = 38$$

$$3...x^2 + 5x = 39$$

$$4...x^2 + 5x = 40$$

$$5...x^2 + 5x = 41$$

$$6...x^2 + 5x = 42$$

$$7...x^2 + 5x = 43$$

$$8...x^2 + 5x = 44$$

$$9...x^2 + 5x = 45$$

$$10...x^2 + 5x = 46$$

$$11...x^2 + 5x = 47$$

$$12...x^2 + 5x = 48$$

$$13...x^2 + 5x = 49$$

$$B...x^2 + 5x = 50 \text{ Racines } x - 5 = 0. \& x + 10 = 0$$

Comme il n'y a aucun nombre entre 4 & 5, ni entre 9 & 10 qui se suivent immédiatement & qui ne diffèrent que de l'unité; donc les racines approchées à l'unité près de ces treize équations sont irrationnelles $+ 4 +$, ou $+ 5 -$, & $- 9 +$, ou $- 10 -$, c'est-à-dire, que $+ 4$ & $- 9$ sont approchées par défaut étant trop petites, mais $+ 5$ & $- 10$ sont par excès étant trop grandes.

Pour en approcher à l'infini, il faut employer la nouvelle Méthode d'approximation qui suit dans le second Livre,

SECTION QUATRIÈME.

*La formation & la résolution des Equations
du troisième degré.*

L Es Equations du troisième degré sont formées par la multiplication de trois équations simples du premier degré ou pour abrégé par une équation quelconque du second degré multipliée par une équation simple du premier degré.

Formation par trois racines.

$$x - 2 = 0$$

$$x x - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x$$

$$- 3x + 6 = 0$$

$$x^3 - 5x + 6 = 0$$

$$x x + 5 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$+ 5x^2 - 25x + 30 = 0$$

$$x^3 + 0x^2 - 19x + 30 = 0.$$

$$\text{ou } x^3 + 0x^2 - 19x = - 30.$$

Formation par une Equation du second degré & une du premier degré.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 5x + 6 = 0 \\
 \times x + 4 = 0 \\
 \hline
 x^3 - 5x^2 + 6x \\
 + 4x^2 - 20x + 24 = 0 \\
 \hline
 x^3 - 1x^2 - 14x + 24 = 0 \\
 \text{ou } x^3 - 1x^2 - 14x = -24
 \end{array}$$

Le dernier terme qui est l'homogène de comparaison contient le produit des trois racines, il s'agit de les trouver, elles peuvent être réelles ou imaginaires, rationnelles ou irrationnelles, &c.

La formule générale de toutes les équations possibles du troisième degré est $\pm x^3 \pm ax^2 \pm a^2x = b'''$. dans laquelle b''' est l'homogène de comparaison, c'est un nombre quelconque qui a trois dimensions par la multiplication des trois racines. Les multiplicateurs a & a^2 , sont aussi des nombres.

La formule générale de Tartalea pour les racines est

$$\begin{array}{l}
 x = \pm \sqrt[3]{\frac{1}{2} b''' + \sqrt{\frac{1}{4} b'^2 + \frac{1}{27} a^3}} \\
 \pm \sqrt[3]{\pm \frac{1}{2} b''' + \sqrt{\frac{1}{4} b'^2 + \frac{1}{27} a^3}}
 \end{array}$$

Cardan qui vivoit dans le même tems attribué cette formule à Scipio Ferreus, dans son Traité d'Algebre, comme au premier inventeur ; mais il dit que Tartalea a fait aussi dans la suite la même découverte.

METHODE

METHODE POUR TROUVER LA
Formule de la première racine des Equations
du troisième degré.

I. Soit $x^3 = * - a'x + b'''$.

Pour trouver la formule de la première racine.

1°. Je suppose $x = m - \frac{a}{3m}$ son cube est $x^3 = m^3 - am + \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3}$.

2°. Multipliant tout par a dans la première hypothèse $x = m - \frac{a}{3m}$, j'ai $ax = am - \frac{a^2}{3m}$.

3°. Substituant cette valeur dans le second membre de la première équation $x^3 = -a'x + b'''$, j'ai $-a'x + b''' = -am + \frac{a^2}{3m} + b'''$.

4°. Donc l'équation proposée $x^3 = -a'x + b'''$, se changera en celle-ci $m^3 - am + \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3} = -am + \frac{a^2}{3m} + b'''$, ce qui donne par transposition & par soustraction $m^3 - \frac{a^3}{27m^3} = b'''$.

5°. Je multiplie les deux membres par m^3 , ce qui donne $m^6 - \frac{1}{27}a^3 = b'''m^3$, & par transposition $m^6 - b'''m^3 = \frac{1}{27}a^3$.

6°. J'ajoute $\frac{1}{4}b'''$ de chaque côté, ce qui donne $m^6 - b'''m^3 + \frac{1}{4}b''' = \frac{1}{4}b''' + \frac{1}{27}a^3$, dont la racine quarrée est $m^3 - \frac{1}{2}b''' = \sqrt{\frac{1}{4}b''' + \frac{1}{27}a^3}$,

& par transposition $m^3 = \frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b''' + \frac{1}{27}a^3}$

Analyse.

44

dont la racine cubique est $m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b'' + \frac{1}{27}a^3}}$

Voilà la première partie de la racine qui est trop grande, puisque j'ai m & non pas x , & par la première hypothèse $x = m - \frac{a}{3m}$, il faut donc en retrancher $\frac{a}{3m}$ qui est la seconde partie de la racine en continuant comme il suit.

7°. Je substitue cette première partie trouvée de la racine dans l'équation simple de la première hypothèse, $x = m - \frac{a}{3m}$ la substitution donne

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b'' + \frac{1}{27}a^3}} - \frac{a}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b'' + \frac{1}{27}a^3}}}$$

Cette formule ne demande qu'une seule extraction d'une racine cubique, & d'une racine quarrée.

8°. Mais si je veux avoir la formule ordinaire de Tartaléa rapportée par Cardan, il faut multiplier le numérateur & le dénominateur de cette fraction par

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b'' + \frac{1}{27}a^3}}$, qui donnera la formule entière qui suit pour la première racine

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}}$$

où j'ai supprimé les exposans italiques de b pour abréger, mais cette formule demande deux extractions de racines cubiques, & deux de racines quarrées.

II. Soit $x^3 = * + a''x + b'''$.

Pour trouver la formule de sa première racine.

1°. Je suppose $x = m + \frac{a}{3m}$ son cube est $x^3 = m^3 + am + \frac{a^2}{3m} + \frac{a^3}{27m^3}$.

2°. Je multiplie tout par a dans la première hypothèse $x = m + \frac{a}{3m}$, ce qui donne $ax = am + \frac{a^2}{3m}$.

3°. Je substitue cette valeur dans le second membre de l'équation proposée, ce qui donne $ax + b''' = am + \frac{a^2}{3m} + b'''$.

4°. Je substitue ces deux valeurs dans les deux membres de l'équation proposée, $x^3 = * + a''x + b'''$, ce qui donne $m^3 + am + \frac{a^2}{3m} + \frac{a^3}{27m^3} = am + \frac{a^2}{3m} + b'''$, qui donne en abrégant par transposition & par soustraction $m^3 + \frac{a^3}{27m^3} = b'''$.

5°. Je multiplie ces deux membres par m^3 , ce qui donne $m^6 + \frac{1}{27}a^3 = b'''m^3$, & par transposition, $m^6 + b'''m^3 = -\frac{1}{27}a^3$.

6°. J'ajoute de chaque côté $\frac{1}{4}b'''$, ce qui donne $m^6 + b'''m^3 + \frac{1}{4}b''' = \frac{1}{4}b''' - \frac{1}{27}a^3$ dont la racine quarrée est $m^3 + \frac{1}{2}b''' = \sqrt{\frac{1}{4}b''' - \frac{1}{27}a^3}$, & par transpo-

sition $m^3 = -\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b''' - \frac{1}{27}a^3}$, dont la racine

cubique est $m = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b''' - \frac{1}{27}a^3}}$, c'est la

1^{re}. partie de la racine qui est trop petite, car par l'hypothèse x surpasse m , de $+\frac{a}{3m}$; pour trouver cette

aa ij

partie qu'il faut ajouter, je continuë

7°. Je substitué cette valeur trouvée de m dans la première hypothèse $x = m + \frac{a}{3m}$, la substitution donne

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b'' - \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt{\frac{1}{4}b'' - \frac{1}{27}a^3}}$$

cette formule n'a besoin que de l'extraction d'une racine cubique & d'une racine quarrée pour trouver la première racine désirée.

8°. Pour réduire cette expression à celle de Tartaléa, je multiplie le numérateur & le dénominateur de cette fraction trouvée par $\sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' - \sqrt{\frac{1}{4}b'' - \frac{1}{27}a^3}}$, le produit donne la formule entière qui suit.

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}},$$

où j'ai supprimé les exposans italiques de b pour abrégé; mais il faut dans cette formule deux extractions de racines cubiques & deux extractions de racines quarrées; lorsque $\frac{1}{4}b''$ est moindre que $\frac{1}{27}a^3$, la racine quoique réelle vient sous une forme imaginaire d'où il est impossible de la tirer. *C'est le cas irréductible.*

III. Soit $x^3 = * + a''x - b'''$.

Pour trouver la formule de sa première racine.

1°. Je change les signes de la proposée dans le premier & le dernier terme, ce qui donne $-x^3 = +ax - b'''$, ensuite je suppose $-x = m + \frac{a}{3m}$, son cube est $-x^3 = m^3 + am - \frac{a^2}{3m} + \frac{a^3}{27m^3}$, ou bien $x^3 = -m^3 - am + \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3}$.

2°. Je multiplie tout par a dans l'hypothèse de $x = m + \frac{a}{3m}$, ce qui donne $ax = am + \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3}$.

3°. Je substitue cette valeur dans le second membre de la première équation, j'ai $ax - b''' = am + \frac{a^2}{3m} + b'''$ & substituant la première valeur à la place de x , j'ai $m^3 - am - \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3} = am - \frac{a^2}{3m} + b'''$.

4°. Donc abrégant par transposition & par soustraction, j'ai $m^3 + \frac{a^3}{27m^3} = b'''$.

5°. Je multiplie tout par m^3 , ce qui donne $m^6 + \frac{1}{27}a^3 = b'''m^3$, & par transposition $m^6 - b'''m^3 = -\frac{1}{27}a^3$.

6°. J'ajoute $\frac{1}{4}b'''$ dans chaque membre, ce qui donne $m^6 - b'''m^3 + \frac{1}{4}b''' = \frac{1}{4}b''' - \frac{1}{27}a^3$ dont la rac. quarrée est $m^3 - \frac{1}{2}b''' = \sqrt[4]{\frac{1}{4}b''' - \frac{1}{27}a^3}$, & par transposi-

tion $m^3 = \frac{1}{2}b''' + \sqrt[4]{\frac{1}{4}b''' - \frac{1}{27}a^3}$, dont la racine

cubique est $m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt[4]{\frac{1}{4}b''' - \frac{1}{27}a^3}}$, c'est la première partie de la racine qui est trop petite, car x surpasse m , puisque par la première hypothèse $x = m + \frac{a}{3m}$, je continue pour trouver la partie qu'il faut ajouter à cette racine.

7°. Je substitue cette valeur de m dans la première hypothèse $x = m + \frac{a}{3m}$, ce qui donne

$$— x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} b''' + \sqrt{\frac{1}{4} b'' - \frac{1}{27} a^3}} \dots \dots \dots$$

$$+ 3 \sqrt[3]{\frac{1}{2} b''' + \sqrt{\frac{1}{4} b'' - \frac{1}{27} a^3}}, \text{ qui ne de-}$$

mande qu'une extraction de racine cubique & une extraction de racine quarrée.

8°. Mais pour réduire cette expression à la formule ordinaire de la première racine du troisième degré, il faut multiplier comme ci-dessus le numérateur & le dénominateur de cette fraction trouvée, le produit donnera la formule de Tartaléa, — $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} b + \sqrt{\frac{1}{4} b b - \frac{1}{27} a^3}}$

+ $\sqrt[3]{\frac{1}{2} b - \sqrt{\frac{1}{4} b b - \frac{1}{27} a^3}}$, qui demande l'extraction de deux racines quarrées qui sont impossibles, & viennent sous une forme imaginaire, lorsque $\frac{1}{4} b b$ est moindre que $\frac{1}{27} a^3$, quoique la racine soit réelle, ce qui fait le cas irréductible.

IV. Soit $x^3 = * - a''x - b'''$.

Pour trouver la Formule de sa première racine.

1°. Je change les signes du premier & du dernier terme, ce qui donne — $x^3 = - a''x + b'''$. & je suppose

$$— x = m - \frac{a}{3m} \text{ son cube est } — x^3 = m^3 - am$$

$$+ \frac{a^2}{3m} - \frac{a^3}{27m^3}$$

2°. Je multiplie tout par a dans la première hypothèse, ce qui donne + $ax = am - \frac{a^2}{3m}$.

3°. Substituant ces deux valeurs dans l'équation pro-

posée $x^3 = -a''x$, j'ay $m^3 = am + \frac{a^2}{3m} - \frac{a^2}{27m^2}$
 $= am - \frac{a^2}{3m} + b'''$. qui donne en abrégéant par transposition & soustraction $m^3 - \frac{a^2}{27m^3} = b'''$.

4°. Je multiplie ces deux membres par m^3 ; ce qui donne $m^6 - \frac{a^2}{27m^3} = b'''m^3$ & par transposition $m^6 - b'''m^3 = + \frac{1}{27}a^3$.

5°. J'ajoute de chaque côté $\frac{1}{4}b''$, ce qui donne $m^6 - b'''m^3 + \frac{1}{4}b'' = \frac{1}{4}b'' + \frac{1}{27}a^3$, dont la racine

quarré est $m^3 - \frac{1}{2}b''' = \sqrt[2]{\frac{1}{4}b'' + \frac{1}{27}a^3}$ qui donne

par transposition $m^3 = \frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b'' + \frac{1}{27}a^3}$

dont la racine cubique est $m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b'' + \frac{1}{27}a^3}}$

c'est la première partie de la racine qui est trop grande, car m surpasse x , puisque par l'hypothèse $-x = m$

$= \frac{a}{3m}$. Je continue pour trouver la partie qu'il faut retrancher de la racine.

6°. Je substitue cette valeur de m trouvée dans l'hypothèse $-x = m = \frac{a}{3m}$, la substitution donne

$$-x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b'' + \frac{1}{27}a^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}b''' + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b'' + \frac{1}{27}a^3}} \text{ qui n'a besoin}$$

que de l'extraction d'une racine cubique & d'une racine quarrée.

7°. Pour réduire cette expression à la formule ordinaire, il faut multiplier le numérateur & le dénominateur de cette fraction par le même multiplicateur

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b'''} + \sqrt[2]{\frac{1}{4}b'' + \frac{1}{27}a^3} \text{ le produit donnera}$$

la formule ordinaire pour la première racine $x =$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}b} + \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b} + \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}$$

qui demande l'extraction de deux racines cubiques & de deux racines quarrées.

Nombre des Formules du troisième degré.

Toutes les équations possibles du troisième degré contiennent dix-huit cas qui donnent les dix-huit formules suivantes.

$$\left. \begin{array}{l} 1.. x^3 + b''' = 0 \\ 2.. x^3 - b''' = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Les deux Formules des Equations pures} \\ \text{\& simples.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2.. x^3 - ax = b''' & \text{Une racine réelle positive, \& deux} \\ & \text{négatives égales à la somme de} \\ & \text{la positive.} \\ 4.. x^3 - ax = -b''' & \text{Toute entière dans le cas irréduci-} \\ & \text{ble.} \\ 5.. x^3 - ax = +b''' & \text{Une racine négative égale à la} \\ & \text{somme des deux négatives.} \\ 6.. x^3 + ax = -b''' & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 7.. x^3 - ax^2 + 0x = +b''' & \\ 8.. x^3 - ax^2 + 0x = -b''' & \text{Formule toute entière dans} \\ & \text{le cas irréductible.} \\ 9.. x^3 + ax^2 + 0x = b''' & \\ 10.. x^3 + ax^2 + 0x = -b''' & \end{array}$$

$$11. \dots x^3 - ax^2 - a^2x = b'''.$$

$$12. \dots x^3 - ax^2 - a^2x = -b'''.$$

$$13. \dots x^3 - ax^2 + a^2x = b'''.$$

$$14. \dots x^3 - ax^2 + a^2x = -b'''.$$

$$15. \dots x^3 + ax^2 - a^2x = b'''.$$

$$16. \dots x^3 + ax^2 - a^2x = -b'''.$$

$$17. \dots x^3 + ax^2 + a^2x = b'''.$$

$$18. \dots x^3 + ax^2 + a^2x = -b'''.$$

De ces dix-huit formules il en faut retrancher d'abord quatre formules qui sont purement négatives & qui ne peuvent être jamais d'aucun usage y compris la première qui est une équation pure & simple, mais négative.

Je retranche encore la seconde équation pure & simple $x^3 = b'''$. Sa résolution est expliquée dans la Section troisième. Il ne reste donc que treize formules, qu'on peut réduire à cette seule & unique formule $\pm x^3 \pm ax^2 \pm a^2x = \pm b$.

Réduction des dix-huit Formules du troisième degré à trois seules Formules.

Après avoir réduit les dix-huit formules des équations du troisième degré à treize, on pourroit absolument les réduire à une seule, dans laquelle on pourroit suivant les cas supposer quelques termes nuls, lorsqu'ils sont évanouïs dans quelques équations proposées, avec les différentes combinaisons des signes, tant dans la formule générale des équations, que dans la formule générale des racines. Mais comme cela n'empêche pas la multiplicité des cas, & que cela est incommode pour les commençans,

Analyse.

bb

d'ailleurs qu'il y a des équations & même des formules entières qui tombent dans le cas irréductible, dont on ne peut trouver les racines imaginaires, soit rationnelles soit irrationnelles par la formule de Tartalea; j'ai jugé à propos de réduire les dix-huit formules aux trois suivantes qui comprennent toutes les difficultez des équations du troisième degré, & auxquelles on pourra ramener les équations des autres formules de la manière dont nous l'expliquerons dans la suite par l'évanouissement de quelque terme.

1^{re}. Form. ... $x^3 + ax = b'''$. c'est la 5^e. des anciennes.

2^{de}. Form. ... $x^3 - ax = b'''$. c'est la 3^e. des anciennes:

3^e. Form. ... $x^3 - ax = -b'''$. c'est la 4^e. des anciens.

Le second terme manque dans ces trois formules, c'est la seconde puissance x^2 que je suppose égale à zéro: ainsi les équations dans ces trois formules ont, ou deux racines positives dont la somme est égale à la troisième racine qui est négative, ou il y a une racine positive qui est égale à la somme des deux autres qui sont négatives.

Dans la première formule le nombre des équations possibles est infini, il n'y a qu'une seule série infinie, & il n'y a qu'une seule racine réelle & positive, qui est égale à la somme des deux autres qui sont négatives & mixtes imaginaires; dans la seconde & troisième formule il y a deux séries, une finie l'autre infinie.

Dans la seconde formule le nombre des équations possibles est égal au carré moins un de la plus grande racine déterminée. Si $x = 10$, il y a 99 équations, le centième homogène est zéro & après commence la série infinie des équations de la troisième formule, entre lesquelles il y en a un quart qui tombe dans le cas irréductible, & le reste tombe dans le cas ordinaire qui est réductible.

Il n'y a qu'une seule racine réelle & positive, c'est la

grande ; les deux autres sont négatives & imaginaires dans le cas ordinaire qui comprend les trois quarts des équations possibles.

Mais dans le cas irréductible les trois racines sont réelles , la grande est positive & les deux autres sont négatives & irrationnelles.

Dans la troisième formule qui tombe toute entière dans le cas irréductible , il n'y a qu'une seule série infinie , le nombre des équations possibles est infini.

Les équations possibles sur la même valeur déterminée de x de la seconde & de la troisième formule, forment une suite d'équations composées de deux séries, l'une finie dans la seconde formule qui commence au zéro, & continue par l'équation pure & simple d'où elle retombe encore au zéro , qui est le point de partage de la seconde & de la troisième formule, d'où partent les homogènes positifs d'un côté pour la seconde formule en montant , & les homogènes négatifs d'un autre côté en descendant pour la troisième formule dont les homogènes négatifs s'étendent à l'infini , & donnent la seconde série qui est infinie.

Dans cette troisième formule , il y a deux racines positives & une racine négative qui est égale à la somme des deux positives , c'est pourquoi la seconde & la troisième formule sont des équations sou-contraires,

*Série des Equations de la seconde & de la troisième formule
sur la valeur de $x = 10$.*

$x^3 - ax = b'''$	Formule seconde.
$x^3 - 0x = 10.00.$	Equation pure & simple du 3 ^{me} . degré.
$x - 1x = 990.$	Origine du 1 ^{er} . cas réductible,
$x^3 - 2x = 980.$	où $\frac{1}{27} a^3 = \frac{1}{4} b'''$. la racine est
$x^3 - 3x = 970.$	$x = \sqrt[3]{\frac{1}{3} a} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} b}$
&c. &c. &c.	

$x^3 - 30x = 700.$	Première époque où $30x$ est triple de la racine 10.
$x^3 - 31x = 690.$	La racine est $x = \sqrt[3]{\frac{4}{3} a}$
$x^3 - 32x = 680.$	$= \sqrt[3]{\frac{4}{3} b'''}$.
&c. &c. &c.	Fin du cas réductible.

$x^3 - 75x = 250.$	Seconde époque où $75x = \frac{1}{4}$ de 100 carré de 60. & 25
$x^3 - 76x = 240.$	$= \frac{100}{4}$. c'est l'origine du cas ir-
$x^3 - 77x = 230.$	réductible qui continuë en des-
&c. &c. &c.	cendant.

$x^3 - 80x = 200.$	Troisième époque,
$x^3 - 81x = 190.$	
$x^3 - 82x = 180.$	
&c. &c. &c.	

$$x^3 - 91x = 90.$$

$$x^3 - 92x = 80.$$

$$x^3 - 93x = 70.$$

$$x^3 - 94x = 60.$$

$$x^3 - 95x = 50.$$

$$x^3 - 96x = 40.$$

$$x^3 - 97x = 30.$$

$$x^3 - 98x = 20.$$

$$x^3 - 99x = 10.$$

$$x^3 - 100x = 0.$$

Equation pure & simple du
second degré.

Et point de partage entre les homogènes positifs & négatifs de la seconde & de la troisième formule.

*Suite de la série des équations de la seconde & troisième
formule.*

$$x^3 - ax = b''$$

$$x^3 - 100x = 0$$

$$x^3 - 101x = 10$$

$$x^3 - 102x = 20$$

$$x^3 - 103x = 30$$

$$\&c. \quad \&c. \quad \&c.$$

Troisième formule toute en-
tière dans le cas irréductible.

Equation pure & simple du
second degré, qui est le
point de partage entre les
deux formules, ou terme com-
mun d'où partent les homo-
gènes positifs de la 2^e. formule,
& les négatifs de la 3^e. formule.

$$\begin{array}{lll}
 x^3 - 120x = 200 & \text{Première époque où } \sqrt[3]{a} \\
 x^3 - 121x = 201 & \text{surpasse } x = 10 \text{ de l'unité.} \\
 x^3 - 122x = 202 \\
 \&c. & \&c. & \&c.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 x^3 - 300x = 2000 & \text{Seconde époque où le coeffi-} \\
 x^3 - 301x = 2001 & \text{cient } a \text{ est triple du carré de} \\
 x^3 - 302x = 2002 & \text{ } x = 10, \& b''' \text{ est le double} \\
 & \text{du cube.} \\
 \&c. & \&c. & \&c.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 x^3 - 330x = 2300 & \text{Troisième époque où } b''' \text{ sur-} \\
 x^3 - 331x = 2301 & \text{passe le triple du carré de} \\
 & \text{ } x = 10. \\
 \&c. & \&c. & \&c. \\
 \text{à l'infini.}
 \end{array}$$

On verra dans la Méthode de résoudre les équations par des tables la parfaite analogie qui regne entre les équations de la seconde & de la troisième formule qui arrivent au zéro, qui est le terme commun, d'où partent la série finie de l'une, & la série infinie de l'autre de ces deux formules : ceci suffit pour s'en former une idée assez claire pour les résoudre par la première Méthode que nous donnons ici, par la formule de Tartaléa ou Tartaglia géomètre de grande réputation, qu'il publia dans ses livres imprimez à Venise en 1556.

Cette formule pour la première & la plus grande racine des équations du troisième degré, $x^3 + a''x = b'''$, est $x = \pm \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb \pm \frac{1}{27}a^3}}$

$$\pm \sqrt[3]{\frac{1}{2}bb \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb \pm \frac{1}{27}a^3}}$$

Mais cette formule a trois défauts ; le premier c'est d'engager à plusieurs extractions de racines quarrées & cubiques , pour y remédier il faut se servir des tables des quarez & des cubes naturels pour tous les cas où les racines sont rationnelles, & de nos formules d'approximation pour tous les cas où les racines sont irrationnelles.

Mais le second défaut de cette formule & le plus important , c'est que ces opérations sont inutiles dans le cas irréductible. Voilà le défaut essentiel de cette Méthode; elle n'est point générale , & comme le cas irréductible embrasse une grande partie des équations possibles du troisième degré , la formule de Tartaléa a des bornes très limitées, & jette dans l'embarras du calcul sans pouvoir l'éviter ni le prévenir.

Le troisième défaut , elle donne la racine quoique réelle déguisée sous une forme imaginaire.

En quoi consiste le cas irréductible.

Dans les équations du troisième degré, on distingue trois cas dans l'expression générale de la formule des racines inventée par Tartaléa, ces trois cas sont déterminés par le rapport du coefficient ou du multiplicateur a , avec l'homogène ou le dernier terme de l'équation b , auquel nous donnons dans la suite un exposant en chiffres Romains b''' , pour indiquer ses trois dimensions, de même nous donnons un exposant au multiplicateur a'' , quoiqu'ils ne soient qu'un seul nombre l'un & l'autre, ou une lettre connue , afin de conserver la loi des homogènes, mais nous les supprimons ici pour abréger.

Les trois cas sont, 1°. lorsque $\frac{1}{27} a^3 = \frac{1}{4} bb$: c'est-à-dire lorsque le cube du tiers du multiplicateur a est égal au quarré de la moitié de l'homogène b .

Exemple. Soit $x^3 - 12x = 16$.

1°. Je prends la moitié de 16, c'est 8, son carré est 64 $\equiv \frac{1}{4} bb$. 2°. Le tiers de 12 est 4, je l'éleve au cube, j'ai 64 $\equiv \frac{1}{27} a^3$, donc j'ai dans cette équation $\frac{1}{27} a^3 \equiv \frac{1}{4} bb$. Je résous l'équation suivant la formule de Tar-

$$\begin{aligned} \text{taléa qui suit, } x &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} b + \sqrt{\frac{1}{4} bb - \frac{1}{27} a^3}} \\ &+ \sqrt[3]{\frac{1}{2} b - \sqrt{\frac{1}{4} bb - \frac{1}{27} a^3}}, \text{ j'ai } x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{256}{4}} \\ &- 64 + \sqrt[3]{8 - \sqrt{64 - 64}}, \text{ ce qui donne} \\ x &= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8}, \text{ qui donne } x = 2 + 2 = 4, \\ \text{ou } x &= 4. \end{aligned}$$

Donc dans ce premier cas, la première racine est toujours $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3} a} + \sqrt[3]{\frac{1}{3} a}$, ou $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3} a}$, ou bien on peut prendre $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} b} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} b}$, ou $x = \sqrt[3]{b}$, c'est-à-dire, que dans le premier cas on peut prendre indifféremment le double de la racine carrée du tiers du coefficient a , ou le double de la racine cubique de la moitié de l'homogène b .

Ce premier cas est toujours réductible, puisqu'on peut le résoudre par la formule de Tartaléa, & le réduire aux équations simples du premier degré, dont il contient le produit. ce qui se fait en divisant l'équation proposée par la racine trouvée, car le quotient sera une équation du second degré qu'on peut résoudre aisément par la formule du second degré, ses deux racines sont égales.

Le second cas est, lorsque $\frac{1}{27} a^3 < \frac{1}{4} bb$, c'est-à-dire, lorsque le cube du tiers du coefficient a est moindre que le carré de la moitié de l'homogène b ; alors le cas est encore réductible, mais les racines viennent sous une forme imaginaire, la grande racine est réelle, les deux autres sont mixtes imaginaires; mais en apparence seulement,

lement, car elles ont des signes contraires qui détruisent la partie imaginaire.

Le troisième cas est, lorsque $\frac{1}{17} a^3 > bb$, c'est-à-dire, lorsque le cube du tiers du coefficient a surpasse le carré de la moitié de l'homogène b , c'est ce qu'on appelle le cas *irréductible*, parce que la formule de Tartaléa ne peut le réduire aux équations simples du premier degré, qui sont les racines dont il contient le produit, parce qu'elle présente ces racines sous une forme imaginaire irrationnelle, dont on ne peut les tirer pour les exprimer, quoiqu'elles soient réelles.

Moyen court & facile pour connoître ces trois cas dans une équation.

1°. J'ajoute au coefficient a son tiers, & je tire la racine carrée de la somme.

2°. Je multiplie l'homogène b par 4, & je tire la racine cubique du produit.

3°. Je compare ces deux racines ensemble, si elles sont égales, l'équation est dans le premier cas réductible; si la racine carrée de la somme des quatre tiers de a , ou seulement son premier chiffre est moindre que la racine cubique de $4b$, ou seulement que le premier chiffre de cette racine cubique, c'est le second cas, encore réductible.

Au contraire si la racine carrée surpasse la racine cubique, ou seulement que le premier chiffre de la racine carrée surpasse le premier chiffre de la racine cubique, l'équation est dans le troisième cas, & par conséquent irréductible.

Méthode pour éviter les fractions dans la résolution des Equations du troisième degré.

On ne trouvera point de fractions dans la résolution
Analyse.

d'une équation du troisième degré, si l'homogène b est un nombre pair, & si en même tems le coefficient a est un nombre divisible par 3, qui est l'exposant du degré de l'équation.

Or l'homogène b est toujours un nombre pair, lorsque son dernier chiffre est l'un des chiffres suivans. 0. 2. 4. 6. 8. &c. ce qui se distingue du premier coup d'œil.

Pour connoître si a est divisible par 3, il suffit d'ajouter ensemble ses chiffres comme dans la preuve de 9, & d'en ôter trois autant de fois qu'il est possible, s'il ne reste rien, c'est une preuve qu'il est divisible par 3.

Mais pour rendre b un nombre pair lorsqu'il ne l'est pas, il faut le préparer, & il y a trois cas.

- 1°. Si b étant impair, a est divisible par 3.
- 2°. Si b étant pair, a n'est pas divisible par 3.
- 3°. Si b étant impair, a n'est pas divisible par 3.

Dans le premier cas où b étant impair, a est divisible par 3, je multiplie a par 4, & b par 8, ce qui me donne une équation préparée & transformée avec une autre inconnue dont je cherche la racine, dont la moitié sera la première racine de l'équation proposée.

Exemple. dans $x^3 - a x = b''$.

Soit $x^3 - 18 x = 35$.

Je multiplie $\times 4$ & $\times 8$.

Produit $y^3 - 72 x = 280$. dont je trouve la racine par la Méthode ci-après $y - 10 = 0$, dont la moitié donne $x - 5 = 0$ pour la racine de l'équation proposée.

Dans le second cas où b qui est toujours de trois dimensions est pair, & a qui est toujours de deux dimensions n'est pas divisible par 3, je multiplie a par 9, qui est le carré de 3, & b par 27 qui est le cube de 3, ou

par $30 \div 3 = 27$, ce qui est le plus commode pour la multiplication.

Exemple. dans $x^3 - ax = 3$.	168	ou	168
Soit . . . $x^3 - 8x = 168$.	$\times 27$	$\times 30 \div 3$	
Je multiplie	$\times 9 \& \times 27$		
	1176	50400	
ce qui donne $y^3 - 72x = 4536$.	336	504	
	4536	4536	

J'opère sur cette équation transformée par la Méthode suivante, & je trouve $y - 18 = 0$, c'est la racine dont le tiers donne $x - 6 = 0$ pour la racine de l'équation proposée.

Dans le troisième cas où b étant impair, a n'est point divisible par 3, je prends 6 double de 3, son carré est 36, & son cube est 216. Or comme par hypothèse & par construction, a est un carré imparfait ou un produit de deux dimensions, & b un cube imparfait ou un produit de trois dimensions, c'est pourquoi je lui donne un exposant en chiffres Romains b''' qui ne marque point une troisième puissance, mais un produit de trois dimensions, pour conserver la Loi des homogènes entre les termes de l'équation : c'est-à-dire, afin qu'ils aient chacun trois dimensions, c'est pourquoi je multiplie a par 36, carré de 6, & b par 216 cube de 6, ce qui donne une équation transformée mettant une autre inconnue y à la place de x , dont je trouverai la racine par la Méthode qui suit, & la sixième partie de cette racine sera la racine de l'équation proposée.

Exemple dans $x^3 - ax = b'''$

Soit $x^3 - 8x = 85$.

Je multiplie par $\times 36 \& \times 216$.

48	510.
24.	85.
	170.

Ce qui donne $y^3 - 288 = 18360$, dont je trouve la première & plus grande racine par la Méthode suivante $y - 30 = 0$, je divise 30 par 6, la sixième partie ou son quotient est 5, qui donne $x - 5 = 0$, pour la première & plus grande racine de l'équation proposée qui est positive.

La résolution des Equations du troisième degré.

Dans la première formule $x^3 - ax = b'''$.

Il n'y a qu'une seule série mais infinie d'équations possibles dans cette formule, soit sur la valeur déterminée de l'une des racines x , soit sur une valeur déterminée du multiplicateur a ; on trouve dans l'un & l'autre de ces cas une série infinie, & ces deux séries sont différentes, puisqu'elles viennent d'une origine différente.

Dans cette formule qui comprend le cas ordinaire réductible, on peut toujours trouver la première racine des équation & les abaisser ensuite au second degré par la division pour avoir les deux autres.

Puisque le second terme manque dans cette formule, il y a une racine réelle & positive, égale à la somme des deux autres qui sont négatives imaginaires & égales.

La grande racine réelle & positive ne vient jamais sous une forme imaginaire par la formule de Tartaléa.

$$\text{c'est } x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}} \dots\dots\dots$$

$$- \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}}.$$

Les deux autres racines sont négatives, imaginaires & égales, on les trouve par cette formule, supposant $z =$ à la première racine trouvée.

$$y = -\frac{1}{2}z \pm \sqrt{-4 - \frac{3}{4}zx}.$$

Exemple. Soit l'équation $x^3 + 45x = 98$.

$$\text{Je me sers de la formule } x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}}$$

$$- \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}}, \text{ qui donne}$$

$$\sqrt[3]{\frac{98}{2} + \sqrt{\frac{9604}{4} + \frac{91125}{27}}} \dots\dots\dots$$

$$- \sqrt[3]{\frac{98}{2} + \sqrt{\frac{9604}{4} + \frac{91125}{27}}} \text{ ce qui donne}$$

$$\sqrt[3]{49 + \sqrt{2401 + 3375}} \dots\dots\dots$$

$$- \sqrt[3]{49 - \sqrt{2401 + 3375}} \text{ qui se réduit à}$$

$$\sqrt[3]{49 + \sqrt{5776}} - \sqrt[3]{49 - \sqrt{5776}}$$

$$\text{ou } \sqrt[3]{49 + 76} - \sqrt[3]{49 - 76}.$$

$$\text{ou } \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{-27} \text{ qui donne enfin}$$

$$x = 5 - 3, \text{ ou bien } x = 2, \text{ donc la racine est } + z.$$

Explication de l'opération suivant la formule de Tartalea.

1°. Je prends la moitié de l'homogène 98 , c'est 49 $\equiv \frac{1}{2} b$ que je substitue dans la formule , de même que les nombres suivans.

2°. J'élève au carré cette moitié 49 , son carré est 2401. $\equiv \frac{1}{4} bb$.

3°. Je prends le tiers du multiplicateur 45 , c'est 15 , je le cube , c'est 3375 $\equiv \frac{1}{27} a^3$.

4°. J'ajoute ensemble ce carré , & ce cube dans une somme 2401 + 3375 , leur somme est 5776 $\equiv \frac{1}{4} bb + \frac{1}{27} a^3$.

5°. Je tire la racine carrée de cette somme c'est 76 $\equiv \sqrt{\frac{1}{4} bb + \frac{1}{27} a^3}$.

6°. J'ajoute cette racine carrée 76 avec 49 moitié de l'homogène , la somme est 125 , dont je tire la racine cubique qui est 5 $\equiv \sqrt[3]{\frac{1}{2} b + \sqrt{\frac{1}{4} bb + \frac{1}{27} a^3}}$, c'est la première partie de la racine , qui répond au premier membre de sa formule.

7°. Présentement pour avoir la seconde partie de la racine suivant ce que prescrit le second membre de sa formule , j'ôte la moitié 49 de la racine cubique 76 , la différence est 27 , dont je tire la racine cubique qui est

3 $\equiv \sqrt[3]{\frac{1}{2} b - \sqrt{\frac{1}{4} bb + \frac{1}{27} a^3}}$ qui est le second membre de la formule de la racine.

8°. J'ai donc les deux parties de la racine 5 — 3 = 2 donc la racine cherchée est $x - 2 = 0$, qui est positive.

Avis. Pour abréger ces opérations , il faut se servir des tables des quarrés & des cubes naturels , dont nous avons donné la construction.

Pour la preuve, je divise l'équation proposée par cette racine trouvée $x - 2 = 0$, & si la division est exacte, c'est une marque que la racine est juste. Le quotient est une équation du second degré qu'il faut résoudre par la formule du second degré pour avoir les deux autres racines qui sont négatives, & on aura de la sorte toutes les racines de l'équation proposée.

$$\begin{array}{l} \text{Diviseur.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende.} \\ x - 2 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient.} \\ x^3 + 0x^2 + 45x - 98 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient.} \\ x^2 + 2x + 49 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Quotient.

$$\begin{array}{rcl} x^3 & . & x^3 - 2x^2. \quad \text{Premier produit à ôter.} \\ & & 0 + 2x^2 + 45x. \quad \text{Premier reste.} \\ + 2x & . & + 2x^2 - 4x. \quad \text{Second produit à ôter.} \\ & & 0 + 49x - 98. \quad \text{Second reste.} \\ + 49 & . & + 49x - 98. \quad \text{3^{me} produit.} \\ = 0 & . & 0 \quad \text{o dernier reste.} \end{array}$$

Pour achever la résolution, je cherche les deux racines du quotient $x^2 + 2x + 49 = 0$ qui est une équation du second degré ou $x^2 + 2x = -49$ suivant la formule du second degré

$$x + \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}, \text{ ce qui donne}$$

$$x + 1 = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 49}, \text{ ou } x = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 49}$$

qui tombe dans le troisième cas de la cinquième formule du second degré puisque $\frac{1}{4}aa < 49$, par conséquent les deux racines sont négatives, égales & imaginaires, c'est $x = -1 \pm \sqrt{-48}$, la preuve en est évidente par la formation de l'équation qui suit.

$$\begin{array}{r}
 x + 1 - \sqrt{-48} = 0 \\
 x x + 1 + \sqrt{-48} = 0 \\
 \hline
 x^2 + 1x - x\sqrt{-48} \\
 + 1x + 1 - 1\sqrt{-48} \\
 + x\sqrt{-48} + 1\sqrt{-48} + 48 = 0. \\
 \hline
 x^2 + 2x(-1 + 48) + 49 = 0.
 \end{array}$$

où l'on voit que les produits des grandeurs réelles par les imaginaires se détruisent par des signes contraires, de même aussi le produit de l'imaginaire par l'autre imaginaire contraire détruit l'imaginaire & rétablit la grandeur positive & réelle $+ 48$.

La résolution des Equations du troisième degré dans la seconde formule $x^3 - ax = b'''$.

La seconde formule & la troisième qui suit ont une étroite liaison qui les unit & mêle ensemble leurs séries, elles en ont deux chacune sur chaque valeur de x déterminée, la première série est finie, & la seconde est infinie; la série finie de la seconde formule commence exclusivement par le cube de la valeur de x déterminée, par exemple, soit $x = 7$ dont le cube est 343. La série finie commence exclusivement par $x - 0x = 343$ & continuë $x^3 - 1x = 336$. $x^3 - 2x = 329$, &c. De sorte que la suite des homogènes positifs décroît continuellement constamment de 7, tandis que le multiplicateur a croît suivant la suite des nombres naturels 1. 2. 3. &c. Ainsi l'homogène arrive au zéro lorsque le multiplicateur a arrive à 49 quarré de la valeur de $x = 7$. dans $x^3 - 49x = 0$, qui est une équation pure & simple

ple du second degré, car en divisant tout par x , elle donne $x^2 - 49 = 0$. dont les deux racines sont $x - 7 = 0$, & $x + 7 = 0$.

Ensuite comme le zéro est le terme commun de toutes les grandeurs positives & négatives, les homogènes qui étoient positifs avant d'arriver au zéro se changent en négatifs, tandis que le multiplicateur a continuë à croître suivant la série naturelle des nombres; ce qui donne

$x^3 - 50x = -7$. & $x^3 - 51x = -14$,
 $x^3 - 52x = -21$, & ainsi de suite à l'infini. De sorte que cette série infinie tombe dans la troisième formule $x^3 - ax = -b'''$.

Pareillement dans la troisième formule il y a une série finie qui commence exclusivement par l'équation pure & simple du 3^{me}. degré, $x^3 - 0x = -343$. $x^3 - 1x = -336$. $x^3 - 2x = -329$. &c. De sorte que la suite des homogènes négatifs décroît jusqu'à ce qu'ils soient arrivés au zéro, d'où ensuite ils deviennent positifs & forment la série infinie des équations de la seconde formule $x^3 - 50x = 7$, $x^3 - 51x = 14$. $x^3 - 52x = 21$, &c. Tout cela s'éclaircira par l'opération & se découvrira du premier coup d'œil dans les Tables.

La liaison des deux séries différentes de ces deux formules vient de ce qu'elles donnent des équations soucontraires, c'est-à-dire que les racines qui sont positives dans l'une sont négatives dans l'autre.

Dans cette seconde formule il n'y a qu'une racine réelle & positive. La formule de Tartaléa pour trouver cette 1^{re}.

$$\text{\& plus grande racine est } x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} \\ + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}.$$

Les deux autres racines sont négatives : mais comme
Analyse. d d

La formule de la première racine contient deux binômes complexes ou composés de deux membres, qui comprennent tous les deux sous le signe radical de la troisième puissance, un signe radical qui couvre encore un binôme dont le premier terme $\frac{1}{4}bb$ est positif, & le second $\frac{1}{27}a^3$ est négatif, cette racine devient imaginaire lorsque $\frac{1}{4}bb$ est moindre que $\frac{1}{27}a^3$, & comme le rapport de ces deux grandeurs donnent trois cas que nous avons expliqué ci-devant, il faut les consulter.

Explication de l'opération suivant la Formule de Tartalée.

Soit proposée l'équation $x^3 - 72x = 280$.

1°. Je prends la moitié de l'homogène b''' qui est le dernier terme 280, sa moitié est $140 = \frac{1}{2}b$. que j'écris à part sous le premier radical $\sqrt[3]{}$.

2°. Je quarré cette moitié, son quarré est 19600 $= \frac{1}{4}bb$, que je mets sous le signe radical $\sqrt[3]{}$.

3°. Je prends le tiers du coefficient $72 = a$; c'est $24 = \frac{1}{3}a$, je l'éleve à la troisième puissance, c'est $13824 = \frac{1}{27}a^3$.

4°. J'ôte ce cube du quarré qui le précède, c'est $19600 - 13824 = 5776$. qui répond à $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3$, dont

la racine quarrée est $76 = \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}$.

5°. J'ajoute cette racine à $\frac{1}{2}b$, c'est $76 + 140 = 216$ & je tire la racine cubique du total, c'est 6 en nombres, qui répond au premier membre de la racine

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$.

6°. Pour avoir le second membre de la racine, j'ôte la racine quarrée que je viens de trouver 76 de 140, le reste est 64, dont je tire la racine cubique, qui est 4, c'est

le second membre de la racine qui répond au second mem-

bre de la formule $\sqrt[3]{\frac{1}{4}b - \sqrt[3]{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$.

7°. J'ajoute ensemble les deux parties de la racine $6 + 4 = 10$. Donc 10 est la première racine & la plus grande de l'équation proposée $x^3 - 72x = 280$.

Ainsi ayant trouvé la première & plus grande racine qui est positive, en divisant l'équation par cette racine $x - 10 = 0$, si la division est exacte, c'est une marque que c'est la véritable racine; & le quotient est une équation du second degré dont il faut trouver les deux racines par la formule particulière au second degré, qui seront les deux autres racines de l'équation proposée.

$$\begin{array}{l} \text{Diviseur} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende} \\ x - 10 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient} \\ x^2 - 72x - 280 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient} \\ x^2 + 10x + 28 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$x^3 . . x^3 - 10x^2$. Premier produit à ôter.

$0 + 10x^2 . - 72x$. Premier reste.

$+ 10x . . . + 10x^2 . - 100x$. 2^d. produit à ôter.

$0 + 28x . - 280$. 2^d. reste.

$+ 28 + 28x . - 280$. 3^{me}. produit

$= 0 0 . . . 0$. dernier reste.

Présentement il faut résoudre le quotient qui est une équation du second degré $x^2 + 10x + 28 = 0$, qui donne par transposition $x^2 + 10x = -28$. J'ajoute d'abord de part & d'autre $+\frac{1}{4}aa$, ou 25, ce qui donne $x^2 + 10x + 25 = 25 - 28$, je tire la racine quarrée de chaque membre suivant la formule du second degré, c'est $x + 5 = \pm \sqrt{25 - 28}$, ou $x + 5$

dd ij

$= 5 - 5 \pm \sqrt{-3}$. & abrégant $x = -5 \pm \sqrt{-3}$ qui sont deux racines négatives & mixtes imaginaires que je multiplie pour en former l'équation du second degré qui en donne la preuve comme il suit.

$$\begin{array}{r}
 x + 5 - \sqrt{-3} = 0 \\
 \times x + 5 + \sqrt{-3} = 0 \\
 \hline
 x^2 + 5x - x\sqrt{-3} \\
 + 5x + 25 - 5\sqrt{-3} \\
 + x\sqrt{-3} + 5\sqrt{-3} + 3 = 0. \\
 \hline
 x^2 + 10x + 28 = 0
 \end{array}$$

Autre preuve par simple addition.

$$\begin{array}{r}
 x^3 = 72x + 280. \\
 \text{puisque . . . } x = 10 \\
 \text{j'ai } 720 \\
 + 280 \\
 \hline
 1000 = x^3.
 \end{array}$$

Remarque. Cette formule de la racine n'est point générale pour tous les cas des équations qu'on peut former sur cette seconde formule $x^3 - ax = b$. Car il y a trois cas qui naissent du rapport de $\frac{1}{4}a^3$ avec $\frac{1}{4}bb$.

Or dans le premier cas où $\frac{1}{4}a^3 = \frac{1}{4}bb$, & dans le second cas où $\frac{1}{4}a^3 < \frac{1}{4}bb$, qui sont tous deux réductibles on peut se servir de la formule ; Mais dans le troisième cas où $\frac{1}{4}a^3 > \frac{1}{4}bb$, qui est le cas irréductible, la formule est absolument inutile quoique les racines soient réelles. Ce qui a engagé M^r. Delagny à rechercher d'autres

Méthodes pour le cas irréductible , que j'expliquerai ici.

Remarque importante. Dans cette formule le nombre des équations possibles sur la plus grande racine qui est positive forme deux séries , la première est finie , & la seconde est infinie , la première série qui est limitée est égale au quarré de cette racine moins un ; c'est-à-dire, que pour la racine $+9$, dont le quarré est 81 , il y a 80 équations possibles , & dans cet interval , comme les deux autres racines sont négatives , & que leur somme est égale à la grande racine positive , il n'y a que quatre équations qui ont des racines rationnelles ;

$$x^3 - 73x = 73, \text{ dont les racines sont } +9, -8, -1.$$

$$x^3 - 67x = 126, \text{ dont les 3 Rac. sont } +9, -7, -2.$$

$$x^3 - 63x = 162, \text{ dont les Rac. sont } +9, -6, -3.$$

$$x^3 - 61x = 180, \text{ dont les Rac. sont } +9, -5, -4.$$

$$x^3 - 61x = 180, \text{ dont les Rac. sont } +9, -4, -5.$$

Cette dernière n'est que la précédente répétée , car dans quelque ordre qu'on prenne les mêmes nombres pour racines , ils donnent précisément la même équation. Ainsi entre ces 80 équations , il n'y en a précisément que quatre qui aient des racines réelles & rationnelles , c'est précisément la moitié de 9 en entiers , mais il y en a le quart qui ont des racines imaginaires suivant la formule, quoiqu'elles soient réelles & irrationnelles , & qui tombent par conséquent dans le cas irréductible , à commencer par $x^3 - 80x = 9$, laquelle ne peut être résolue par la formule de Tartaléa , jusqu'à $x^3 - 61x = 180$ inclusivement , ce qui comprend même toutes les quatre équations ci-dessus qui ont des racines réelles & rationnelles ; mais toutes les autres équations sont réductibles qui sont au nombre de 60 , car leurs racines qui sont vé-

ritablement imaginaires, viennent sous une forme mixte imaginaire.

La série finie de ces équations est facile à former à commencer par $81x = 0$ qui est hors d'œuvre, & continuant par $80x = 9$, $79x = 18$, $78x = 27$, &c. en continuant demême à diminuer le coefficient a de l'unité, & prenant pour l'homogène b la suite des multiples de 9, qui sont 9, 18, 27, 36, &c. on aura la dernière des 80 équations $x^3 - 1x = 720$.

On peut former de semblables séries sur les neuf premiers nombres commençant toujours par le carré de la racine déterminée, ce qui est très-utile pour concevoir ces équations & leur résolution, que l'on peut trouver même directement par des tables construites de la sorte, comme nous l'avons vu ci-devant.

Résolution des équations du troisième degré.

Dans la troisième formule $x^3 - ax = -b'''$, qui est toute entière dans le cas irréductible, c'est la plus difficile & la plus utile, parce que la trisection de l'angle s'y réduit.

Cette formule contient deux séries, l'une finie & l'autre infinie d'équations comme la précédente sur une racine déterminée, comme $x = 9$, elle contient dans la série finie 80 équations, c'est 81 moins 1, carré de cette racine 9, à commencer par la plus grande équation $x^3 - 243x = -1458$, & continuer en diminuant le coefficient a de l'unité & l'homogène b de 9, ce qui donne pour la 2^{de}. équation $x^3 - 242x = -1449$, & diminuant toujours de même, on arrive à la dernière équation $x^3 - 81x = 0$, entre lesquelles il y a cinq équations dont les racines sont rationnelles, mais on ne peut absolument résoudre aucune de ces équations par la formule de Tartalea, ce qui s'appelle le cas irréductible,

qui comprend encore le quart des équations possibles de la seconde formule qui précède, ce cas n'est pas moins célèbre parmi les Analistes que la quadrature du cercle, l'est chez les Géomètres, ce qui a engagé M^r. Delagny à rechercher des Méthodes pour le résoudre ; d'ailleurs par la formule de Tartaléa les équations du troisième degré qui sont réductibles, c'est-à-dire dans le cas ordinaire, & dont les racines sont rationnelles, viennent par la formule sous la forme déguisée d'un binôme irrationnel, ce qui est le plus fréquent, que sous une forme rationnelle. Par exemple, entre les 99 équations possibles sur la valeur de $x = 10$ déterminée, il n'y a que 5 résolutions qui donnent la valeur de cette racine sous une forme rationnelle qui sont.

$$x^3 - 27x = 730. \text{ forme de la Rac. } x^3 = 9 + 1 = 10.$$

$$x^3 - 48x = 520. \dots \dots x^3 = 8 + 2 = 10.$$

$$x^3 - 63x = 370. \dots \dots x^3 = 7 + 3 = 10.$$

$$x^3 - 72x = 280. \dots \dots x^3 = 6 + 4 = 10.$$

$$x^3 - 75x = 250. \dots \dots x^3 = 5 + 5 = 10.$$

Ainsi de tous les autres cas semblables, toutes les autres équations donnent la première racine sous une forme irrationnelle imaginaire, quoique la racine soit réelle.

En général pour déterminer tous ces cas.

Soit la plus grande racine d'une équation du troisième degré dans la seconde formule, un nombre pair quelconque $= 2a$, le nombre des équations possibles en nombres entiers est $4aa - 1$.

Le nombre des équations qui donnent la racine réelle sous une forme rationnelle est $= a$.

Le nombre des équations qui donnent la racine réelle

sous une forme irrationnelle est $\equiv 3aa - a$.
 Le nombre des équations qui donnent la racine réelle

sous une forme imaginaire est $aa - 1$.
 Mais si je suppose la plus grande racine un nombre

impair quelconque $\equiv 2a + 1$.
 Le nombre des équations possibles sera $\equiv 4aa + 4a$.

Le nombre des équations qui donnent la racine sous
 une forme rationnelle $\equiv a$.

Le nombre des équations qui donnent la racine sous
 une forme irrationnelle réelle $\equiv 3aa + 2a$.

Le nombre des équations qui donnent la racine réelle
 sous une forme imaginaire $\equiv aa + a$, c'est précisé-

ment le quart des équations possibles plus une.
 Lorsque la grande racine est un nombre pair, alors le
 dernier terme de l'équation, où l'homogène est toujours
 un nombre pair, & il y a précisément le tiers en entiers du
 nombre des équations qui viennent sans fractions, parce
 qu'il faut prendre le tiers du dernier terme de l'équation,
 ainsi la racine étant 10, il y a 33 équations qui viennent
 sans fractions.

Au contraire lorsque la racine est un nombre impair,
 le dernier terme est impair, le nombre des équations sans
 fractions n'est alors que la sixième partie, par exemple,
 la racine étant 13, il y a 168 équations pos-
 sibles dans la seconde formule, dont il n'y en peut avoir
 que 28 sans fractions, ce qui fait la sixième partie en
 entiers.

Entre les racines qui viennent sous une forme imagi-
 naire, il y en a qui viennent sous une forme rationnelle,
 & d'autres sous une forme irrationnelle.

Le nombre des équations qui donnent la racine sous
 une forme imaginaire rationnelle est $\sqrt{\frac{aa}{12}}$ en nombres
 entiers, supposant la racine réelle & égale à a .
 Ainsi soit la racine $\equiv 10$, dont le carré est 100, sa
 douzième

douzième partie est $8\frac{1}{3}$ dont la racine approchée en entier est 2 ; c'est pourquoi il y a deux équations où la racine vient sous une forme imaginaire rationnelle , c'est

$$x^3 - 78x = 220.$$

$$\& x^3 - 87x = 130.$$

Si la racine réelle étoit 60 , il y auroit 17 équations où la racine viendrait sous une forme imaginaire rationnelle ; mais il y en a un tiers qui la donnent sous une forme imaginaire irrationnelle.

Quelque fois la formule donne la racine sous une forme négative , au lieu de la racine positive qu'on cherche , exemple , dans $x^3 - 3x = -2$. on trouve suivant la formule $\sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{-1} = -1$, qui donne $-\sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = -1 + 1 = 0$, qui est une racine négative , au lieu de la racine positive $x = 1$.

Enfin entre 99 équations possibles dont 10 est la racine , il y en a cinq où la racine vient sous une forme rationnelle , 70 sous une forme irrationnelle , mais réelle , & 24 sous une forme irrationnelle imaginaire.

REGLE NOUVELLE ET GENERALE

Pour trouver la première & la plus grande racine des Equations du troisième degré dans la seconde formule.

Cette règle consiste à perfectionner la formule de Tartalea. Exemple. Soit $x^3 - 60x = 400$, la racine vient par la formule sous cette forme irrationnelle.

$$x = \sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}} + \sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}$$

Pour avoir sous une forme rationnelle cette racine, qui

Analyse.

cc

est ainsi déguisée sous l'expression d'un binôme irrationnel, 1°. je prends le tiers de 60, c'est 20, je le cube, c'est 8000, $= a^3$ de la formule.

Suivant la formule générale de la racine

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} b''' + \sqrt{\frac{1}{4} b'' - \frac{1}{27} a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} b''' - \sqrt{\frac{1}{4} b'' - \frac{1}{27} a^3}}$$

2°. Je prends la moitié de l'homogène $= b''' = 400$, c'est 200 que je quarre, son quarré est 400. 00.

3°. J'ôte 80. 00 de 400. 00, il reste 320. 00 $= \frac{1}{4} b'' - \frac{1}{27} a^3$, & je tire la racine quarrée à cause du second signe radical qui couvre ces deux grandeurs dans la formule, c'est 178 que j'ajoute à la partie rationnelle 200, la somme est 378, suivant le premier membre de la formule.

4°. Cette racine quarrée 178 augmentée de l'unité c'est 179, que j'ôte de la partie rationnelle 200 $= \frac{1}{2} b'''$, le reste est 21, suivant ce que prescrit le second membre de la formule.

5°. Je tire la racine cubique de ces deux nombres en dessous, suivant ce que prescrit le signe radical $\sqrt[3]{-}$. or la racine cubique approchée de 378 en dessous est 7. & la racine cubique approchée de 21 en dessous est 2, la somme de ces deux racines $7 + 2 = 9$, que j'augmente de l'unité c'est 10, d'où je conclus que 10 est la grande racine de l'équation proposée, s'il y en a une rationnelle, ou ce sera la racine approchée si l'équation proposée n'a que des racines irrationnelles.

Démonstration.

La véritable racine de l'équation proposée est suivant

la formule $\sqrt[3]{200 + \sqrt{32000} + \dots}$

$$+ \sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}.$$

Or pour la construction $\sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}}$

est la plus grande que $\sqrt[3]{378}$, mais plus petite que $\sqrt[3]{379}$.

Par la même construction $\sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}$

est plus grande que $\sqrt[3]{21}$, mais plus petite que $\sqrt[3]{22}$.

Donc en prenant la racine cubique approchée de 378 en dessous qui est 7, il est évident que la valeur de la

racine de $\sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}}$, est entre 7 & 8.

Donc prenant pareillement la racine cubique approchée en dessous de 21, qui est 2, il est évident que la ra-

cine cubique de $\sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}$ est entre 2 & 3.

Donc la véritable racine cherchée est entre $8 + 3 = 11$, & entre $7 + 2 = 9$, donc cette valeur est 10, si l'équation proposée a une racine rationnelle, c'est-à-dire en nombres entiers, or s'il n'y en a point en nombres entiers, il est impossible qu'elle en aye en fractions. Donc 10 est la racine cherchée, ce qu'il falloit démontrer.

Preuve pour s'assurer si 10 est la Racine de l'équation proposée, il suffit de substituer sa valeur & ses puissances à la place de l'inconnue & de ses puissances.

1°. Je divise l'équation proposée par cette racine positive $x - 10 = 0$, & si la division est exacte, c'est une preuve que 10 est la véritable racine.

2°. Par la substitution, en substituant 10 & ses puissances à la place de x & de ses puissances, si après la

ce ij

substitution les deux membres de l'équation sont égaux, c'est une preuve que 10 est la véritable racine.

Mais si après la substitution les deux membres de l'équation ne se trouvent point égaux, c'est une preuve que 10 n'est pas la racine cherchée, mais seulement une valeur approchée; or pour en approcher encore d'avantage, il faut ajouter des tranches de deux zéros au second terme, & des tranches de trois zéros au troisième terme, ou bien se servir de la Méthode d'approximation qui suit, qui est plus prompte & plus exacte, & qui emploie des formules rationnelles.

Pour abrégier & s'épargner la peine de la substitution, il suffit de considérer que la racine est toujours un nombre pair, lorsque a & b sont tous deux pairs, car si a est pair, il est évident que ax sera pair, par conséquent dans l'équation générale $ax \pm b''' = x^3$, le cube x^3 sera pair.

Or par la préparation b''' devient toujours un nombre pair, d'où il suit que si la racine trouvée est un nombre impair, c'est une marque que la racine cherchée est irrationnelle, & que la valeur trouvée n'est qu'une valeur approchée.

RESOLUTION DU CAS IRREDUCTIBLE.

Première Méthode pour les racines rationnelles.

Le cas irréductible est celui où une équation ne peut se réduire à des équations simples du premier degré par la formule de Tartaléa, ce qui comprend le quart des équations possibles de la seconde formule du troisième degré, & la troisième formule toute entière dans une série formée sur une valeur constante de x , & sur a variable depuis zéro, où les homogènes sont les multiples de

x de suite jusqu'au triple de son carré, ce qui vient des racines imaginaires que donne la formule, dans ce cas où $\frac{1}{27}a^3 > b^3$.

Première Règle.

Soit $x^3 - 90x = 100$. qui est dans la seconde formule du troisième degré; je me fers de cette formule qui me donne la racine sous une forme irrationnelle ima-

$$\text{ginaire } x = \sqrt[3]{50 + \sqrt{-24500}} + \dots$$

$$+ \sqrt[3]{50 - \sqrt{-24500}}; \text{ c'est-à-dire suivant cette formule.}$$

1°. Je prends le tiers du multiplicateur $a = 90$, c'est 30, dont le cube est 2700. 00. $= \frac{1}{27}a^3$.

2°. Je prends la moitié de l'homogène $b = 100$, c'est 50, son carré est 2500. $= b^2$.

3°. J'ôte 270. 00 de 2500, il reste -24500 , dont je tire la racine carrée qui est imaginaire; c'est

$$+ \sqrt{-24500}.$$

4°. J'ajoute cette racine imaginaire à 50 $= \frac{5}{2}a$, la somme est $\sqrt[3]{50 + \sqrt{-24500}}$, dont je tire la ra-

cine cubique en mettant sur le tout le signe radical $\sqrt[3]{}$. c'est la première partie de la racine qui se réduit $5 + \sqrt{-5}$.

5°. J'ôte cette même racine imaginaire de 50, & je tire la racine cubique de la différence, c'est

$$\sqrt[3]{50 - \sqrt{-24500}}, \text{ qui se réduit à } 5 - \sqrt{-5}.$$

C'est la seconde partie de la racine.

6°. Je réunis ces deux parties pour avoir la racine totale $x = \sqrt[3]{5 + \sqrt{-5}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{-5}} = 10$, puis que la partie imaginaire de chaque binôme se détruit par des signes contraires; car $+\sqrt{-5}, -\sqrt{-5} = 0$. partant il reste $5 + 5 = 10$, & c'est la racine cherchée & positive.

Autre Exemple. Soit l'équation $x^3 - 15x = 4$, la racine vient par la formule ci-dessus sous cette forme irrationnelle imaginaire.

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

$$\text{qui donne } x = \sqrt[3]{2 + -11} + \sqrt[3]{2 - -11}.$$

Or la racine cubique de $2 + -11$, est $2 + -1$, & la racine cubique de $2 - -11$, est $2 - -1$, il suffit d'en former le cube pour s'en convaincre. Or comme ces imaginaires se détruisent par des signes contraires, ils ne sont qu'apparens & non pas de véritables imaginaires, & tout se réduit à $2 + 2 = 4$, qui est la véritable racine cherchée; pour en avoir la preuve il suffit de diviser l'équation proposée par $x - 4 = 0$.

<i>Diviseur.</i>	}	<i>Dividende.</i>	}	<i>Quotient.</i>
$x - 4 = 0$		$x^3 - 15x - 4 = 0$		$x^2 + 4x + 1 = 0$

Quotient.

x^2	.	.	.	$x^3 - 4x^2$	Premier produit à ôter.
				$0 + 4x^2 - 15x$	Premier reste.
$+ 4x$.	.	.	$+ 4x^2 - 16x$	Second produit à ôter.
				$0 + 1x - 4$	Second reste.
$+ 1$.	.	.	$+ 1x - 4$	3 ^{me} produit.
				$= 0$	dernier reste

Le Quotient est une équation du 2^d. degré à résoudre, dont les racines sont $x = -2 + \sqrt{\frac{1}{4} 16 - 1}$,
ou $x = -2 + \sqrt{4-1}$, ou $x = -2 + \sqrt{3}$. Et
 $x = -2 - \sqrt{3}$.

$$x + 2 + \sqrt{3} = 0$$

$$x x + 2 - \sqrt{3} = 0$$

$$x^2 + 2x + x\sqrt{3}$$

$$+ 2x + 4 + 2\sqrt{3}$$

$$- x\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3 = 0.$$

$$x^2 + 4x (+ 4 - 3) + 1 = 0.$$

$$\text{ou } x^2 + 4x + 1 = 0$$

RE'SOLUTION DU CAS IRREDUCTIBLE.

Seconde Méthode pour les Racines irrationnelles.

Je suppose une équation dans la 2^{de}. formule $x^3 - ax = b'''$. Règle générale. dans les trois cas, je tire la racine de la puissance du terme dominant dans le cas irréductible, c'est-à-dire, qui soit telle que $\frac{1}{27} a^3 > \frac{1}{4} b'''$, c'est-à-dire que le cube du tiers du coefficient a surpasse le quart du quarré de l'homogène b''' , ou le quarré de sa moitié, ce qui revient au même; il y a des racines imaginaires & imaginaires irrationnelles suivant la formule.

Dans ce cas je tire seulement la racine quarrée du coefficient a , parce que c'est le terme dominant, & je néglige entièrement l'homogène b''' , la raison en est évidente, puisque par l'hypothèse a peut être infiniment grand, il croît toujours, ainsi c'est sur lui qu'il faut se régler.

Au contraire l'homogène b''' a un terme fixe de grandeur, il peut diminuer & arriver au zéro; mais il ne peut croître dans ce cas, puisque son quarré doit être moindre que le tiers du cube du coefficient a ; c'est pourquoi je regarde comme nul l'homogène b''' , & je considère cette équation $x^3 - ax = b$, comme s'il y avoit $x^3 - ax = 0$, ce qui me donne $x^2 = a$, & $x = \sqrt{a}$. Voilà une valeur de la racine.

Mais cette valeur est trop petite, car l'équation proposée est $x^3 - ax = b$, qui donne $x^3 = ax + b$.

C'est pourquoi la valeur trouvée n'est point exacte, mais pour la rendre exacte je fais une seconde supposition; je suppose $x = \sqrt{a+y}$, & je substitue cette valeur & ses puissances dans l'équation proposée $x^3 - ax = b$; ou bien pour rendre le calcul plus facile, je suppose x^3 égale à la troisième puissance parfaite du binôme $a+y$, c'est $x^3 = a^3 + 3aay + 3ay^2 + y^3$.

Et je fais encore $x^3 = a^3 + aay + b'''$. ensuite j'ôte le second membre de cette égalité du second membre de la précédente, ce qui donne $x^3 = 3aay + 2aay + y^3 - b'''$.

Du second membre de cette dernière, je fais l'équation suivante $3aay + 2aay + y^3 = b'''$, dans laquelle je néglige $+y^3 = \text{zéro}$, puisque c'est un infiniment petit; il reste $3aay + 2aay = b$, qui est une équation du second degré, que je résous par la formule du second degré,

& je trouve $y = -\frac{1}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$. par con-

séquent $x = \sqrt{a+y}$ donne $x = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$. c'est une seconde valeur approchée de la racine de l'équation proposée.

Mais elle est un peu trop grande; car ce n'est pas seulement $3aay + 2aay$ qui est égal à b''' ; mais c'est $3aay + 2aay + y^3$.

Ainsi

Ainsi la racine exacte est $x = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b-y^3}{3a}}$
de sorte que si l'on substitue à la place de y sa valeur qui

est $y = -\frac{1}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$: on aura une troisième valeur un peu trop petite, mais plus approchée de beaucoup que la précédente, & on pourra continuer d'en approcher à l'infini par la même formule.

La seconde valeur est une racine approchée d'une manière assez simple, & l'erreur de cette racine est toujours moindre que l'unité, lorsque l'homogène b''' est plus petit que 368. 43. 65. ce qui suffit pour la pratique; c'est ce qu'il faut éclaircir par un exemple en nombres.

1^{er}. *Exemple.* Soit l'équation proposée $x^3 - 7569x = 2409.03$. dans laquelle le coefficient $aa = 7569$. donc $a = 87$. & l'homogène $b''' = 24.09.03$.

Donc $x = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$; c'est-à-dire,

$$x = \frac{2}{3}87. + \sqrt{\frac{1}{9}7579 + \frac{24.09.03}{3 \times 87.}}$$
 ce qui donne

$$x = 58 + \sqrt{1764.} \text{ or } \sqrt{1764} = 42. \text{ Donc}$$

$$x = 58 + 42 = 100.$$

Donc 100 est la racine approchée à moins d'une unité près.

Par la seconde formule d'approximation, $x = \frac{2}{3}a$

$$+ \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b-y^3}{3a}}$$
 je trouve pour la troisième va-

leur approchée $x = 58 + \sqrt{1755 \frac{152}{261}}$, qui approche encore beaucoup plus près. Et on en peut trouver de même de plus approchées de suite à l'infini.

Avis. Il n'y a point d'équation dans le cas irréductible

Analyse.

ff

de celles même où les racines sont irrationnelles & réelles, que l'on ne puisse résoudre par cette Méthode aussi exactement qu'il est possible.

Remarque importante. Le cas irréductible du troisième degré, vient d'une équation du second degré qui a des racines irrationnelles réelles, multipliée par une équation du premier degré, ce qui donne une équation du troisième degré dans le cas irréductible; d'où il suit que ce cas peut par la même raison se trouver dans les équations de tous les autres degrés supérieurs. Davantage; dans les degrés pairs, toutes les racines peuvent être imaginaires ou irrationnelles: ainsi dans le quatrième degré, les quatre racines peuvent être imaginaires ou irrationnelles.

E X E M P L E.

Dans la formule $x^3 - a''x = b'''$

Soit l'équation proposée $x^3 - 7569x = 240.903$.

Suivant la loi des homogènes, tous les termes doivent avoir trois dimensions, de sorte que le multiplicateur $a'' = 7569$ est par construction de deux dimensions que j'exprime par un exposant en chiffres romains dans $a''x$ qui marque non pas une seconde puissance mais simplement un produit de deux dimensions. De même l'exposant dans b''' en chiffres romains marque un produit de trois dimensions & non pas un cube; cependant à la rigueur c'est une troisième puissance imparfaite, ou le simple produit de trois nombres qu'il faut trouver.

Donc dans l'équation proposée $a'' = 7569$, & $a = 87$. & $b''' = 240.903$. substituant ces nombres dans

la formule $x = \frac{1}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$

j'ai . . . $x = \frac{1}{3}87 + \sqrt{\frac{1}{9}7569 + \frac{240.903}{3 \times 87 (261)}} (923 = \frac{b}{3a})$

ce qui donne $x = 58 + \sqrt{1764} = 58 + 42 = 100$.

Donc 100 est la valeur approchée par excès de la racine à moins d'une unité près.

Puisque cette racine est un peu trop grande, je me fers de la seconde formule $x = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b-y^3}{3a}}$ dans laquelle je substitue la valeur de y trouvée ci-dessus

$$y = -\frac{1}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}} \text{ qui est }$$

$$y = -29 + 42(13) \text{ ce qui donne par substitution la seconde formule } x = 58 + \sqrt{841 + \frac{240.903 - 2197}{261}}$$

$$\text{ou } x = 58 + \sqrt{841 + \frac{238.706}{261}}$$

$$\text{ou } x = 58 + \sqrt{841 + 914 \frac{152}{261}}, \text{ ou } 58 + \sqrt{1755 \frac{152}{261}}$$

qui donne $x = 58 + 41 + \sqrt{74 + \frac{152}{261}}$ qui est une seconde valeur de la racine encore beaucoup plus approchée $x = 99 +$, on peut de même continuer pour en approcher à l'infini.

Explication de cette opération.

Si l'équation proposée est $x^3 - 75.69x = 240.903$, dans la seconde formule du troisième degré $x^3 - a''x = b'''$.

Ou si j'ai l'équation soustraite $x^3 + 75.69x = 242.903$, qui est dans la troisième formule $x^3 + a''x = b'''$.

1°. Je tire la racine carrée de $75.69 = a''$, c'est 87 dont je prends les deux tiers, c'est $58 = \frac{2}{3}a'$.

2°. Je divise l'homogène $240.903 = b'''$, par le triple de $87 = 3a$, le quotient est $923 = \frac{b}{3a}$.

3°. j'ajoute ce quotient 923 à la neuvième partie du

ff ij

multiplicateur ou coefficient 75.69 qui
la somme est $923 + 841 = 1764$, dont je tire
cine quarrée, c'est $42 = \sqrt{\frac{1}{9} 44 + \frac{b}{3a}}$.

4°. J'ajoute ces 42 à 58 $= \frac{2}{3} a$ trouvé d'abord, la
somme 100 est la première racine approchée par excès,
mais à moins d'une unité, elle est négative dans la troi-
sième formule, mais positive dans la seconde formule.

5°. Pour trouver une seconde valeur de la racine en-
core plus approchée, suivant la seconde formule j'ôte
 $87 = \frac{2}{3} a$ de 100 $= x$ valeur trouvée, le reste est 13
 $= y$ dont je prends le cube $2197 = y^3$ qui est au nu-
mérateur de la fraction du dernier terme de la seconde
formule, $\frac{b-y^3}{3a} = \frac{240.903 - 2197}{261}$.

6°. Présentement au lieu de diviser $240.903 - 2197$
 $= 238.706$, je divise seulement 2197 par 261 ce qui
est plus commode, le quotient est $8 \frac{109}{261}$, que j'ôte de
1764, ce qui donne le reste $1755 \frac{152}{261}$, qui donne
pour seconde valeur approchée davantage de la racine

$$x = 58 + \sqrt{1755 \frac{152}{261}}$$

$$+ 41 + \sqrt{74 + \frac{152}{261}}$$

qui se réduit à $x = 58$
que 99, mais moindre que 100, mais son excès est encore
moindre, & on pourra de même trouver des valeurs plus
approchées à l'infini.

7°. Pour achever la résolution, il faut trouver les
les deux autres petites racines de cette sorte.
Je prends d'abord la moitié de la grande racine trou-
vée $100 = x$, c'est 50 que je quarré, c'est 2500, $= \frac{1}{4} x$
je triple encore ce quarré, c'est 7500 $= \frac{3}{4} x x$.

Ensuite j'ôte 7500 $= \frac{3}{4} x x$ de 7569 $= \sqrt{\frac{1}{9} 44}$

reste $69 = \sqrt{\frac{1}{9}aa - \frac{3}{4}x^2}$, or la racine quarrée $\sqrt{69}$ est $8\frac{1}{16}$ à peu près.

Par conséquent les deux petites racines approchées sont $x = 50 + \sqrt{69}$, & $x = 50 - \sqrt{69}$, ou $58\frac{1}{16}$ & $41\frac{11}{16}$, suivant la formule suivante qui est du second degré $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa - \frac{3}{4}xx}$, ces deux petites racines sont positives dans la troisième formule, & négatives dans la seconde.

Exemple second. Soit l'équation dans la troisième formule $x^3 - 84x = -160$, qui est dans la troisième formule.

1°. Je tire la racine quarrée de 84, c'est $9\frac{1}{18}$ à peu près, j'en prends les deux tiers, $6\frac{2}{18}$, ou $6\frac{1}{9}$, c'est la première partie de la racine.

2°. Je divise 160 par trois fois $9\frac{1}{9}$, c'est-à-dire je divise 160 par $27\frac{1}{3}$, ou bien ce qui revient au même pour éviter les fractions je multiplie tout par 3, c'est 320 que je divise par 55 $= 2 \times 27\frac{1}{3}$, dont le quotient est $5\frac{2}{11}$.

3°. J'ajoute ce quotient à la neuvième partie de 84 qui est $9\frac{1}{9}$, la somme de ces deux fractions après les avoir réduit au même dénominateur est $15\frac{1}{11}$, dont la racine approchée est 4, que j'ajoute à la première partie trouvée de la racine $6\frac{1}{9}$ la somme en entiers est 10, valeur de la première & plus grande racine cherchée qui est négative, car en substituant -10 dans l'équation proposée, je trouve

$$-x^3 - 84x = -160, \text{ ou } -x^3 + 84x = +160.$$

$$\text{ou } +1000 - 840 = -160, \text{ \& } -1000 + 840 = +160$$

Remarque. Pour éviter les fractions lorsque a n'est pas un nombre quarré, je lui ajoute deux zéros, & trois zéros à l'homogène, ce qui donne $x^3 - 84.00x =$
ff iij

— 160. 000. dont je tire les racines approchées par excès.

RÈGLE GÉNÉRALE

Pour trouver l'une des petites racines, lorsqu'on a trouvé l'autre dans la seconde & la troisième formule du troisième degré.

Dans la seconde formule il y a deux petites racines négatives, & la troisième qui est positive est égale à la somme des deux autres.

Dans la troisième formule au contraire les deux petites racines sont positives, & la troisième qui est négative est égale à la somme des deux autres petites racines.

Soit l'une des petites racines trouvées $x = c$, on trouvera l'autre par cette formule $\sqrt[3]{a - \frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}c$.

Par exemple, dans la troisième formule $x^3 = ax = b'''$.

Soit l'équation $x^3 = 19x = 30$. dans laquelle a ou $a'' = 19$, & b , ou $b''' = 30$.

Je suppose que la petite racine trouvée positive est a , donc $x = \sqrt[3]{a - \frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}c$. . .

ou $x = \sqrt[3]{19 - \frac{1}{4}4} - 1$.

ou $x = \sqrt[3]{19 - 1} - 1$, qui donne $x = \sqrt[3]{16} - 1 = 4 - 1 = 3$. donc la seconde des petites racines cherchée est $3 = d$.

Au contraire si je suppose que la petite racine trouvée d'abord est $3 = c$, je trouverai par la même formule la

seconde racine $x = \sqrt[3]{a - \frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}c$. qui donne par la substitution $x = \sqrt[3]{19 - \frac{1}{4}9} - \frac{1}{2}3$.

qui donne $x = \sqrt[3]{19 - 6\frac{3}{4}} - 1\frac{1}{2}$.

qui se réduit à $x = \sqrt[3]{12 \frac{1}{4}} - 1 \frac{1}{2} = 3 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{2} = 2$
 $= d$, donc la seconde racine cherchée $d = 2$.

Pour le démontrer, il n'y a qu'à former l'équation du troisième degré par la multiplication des trois racines.

$$x - c = 0, x - d = 0, x + c + d = 0.$$

$$x - c = 0.$$

$$x x - d = 0.$$

$$x^2 - c x$$

$$- d x + c d = 0$$

$$x x + c + d = 0.$$

$$x^3 - c x^2$$

$$- d x^2 + c d x + c c d = 0$$

$$+ c x^2 - c c x + c d d.$$

$$+ d x^2 - c d x$$

$$- c d x$$

$$- d d x$$

Pour trouver la formule, je suppose que tous les produits du troisième terme sont égaux au multiplicateur a de la formule, en les comparant j'aurai l'équation suivante.

$$c c + d d + 2 c d - c d = a, \text{ \& abrégeant j'ai}$$

$$c^2 + d^2 + c d = a, \text{ ce qui donne par transposition}$$

l'équation $d^2 + c d = a - c^2$, dans laquelle ajoutant de part & d'autre $+\frac{1}{4}cc$, j'ai $d^2 + c d + \frac{1}{4}cc$

$= a - c^2 + \frac{1}{4}c^2$, ensuite je tire la racine quarrée de chaque membre, ce qui donne $d + \frac{1}{2}c = \sqrt{a - c^2 + \frac{1}{4}cc}$, or dans le 2^d. membre $-c^2 + \frac{1}{4}cc = \frac{1}{4}cc$, donc en abrégeant & transposant, j'ai $d = \sqrt{a - \frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}c$; voilà la démonstration trouvée de la formule ci-dessus.

La résolution de toutes les autres formules du troisième degré.

Le reste des 18 formules anciennes du troisième degré se réduisent à 12 qui sont de deux sortes.

1^o. Il y en a quatre où le troisième terme manque, qui est la puissance linéaire de x , ces quatre formules sont en général $x^3 + ax^2 = \pm b$, & retombent dans le premier degré, car en divisant tout par xx , on aura $x + a = \pm \frac{b}{x}$, par exemple.

Soit l'équation proposée $x^3 - 30x^2 = -3703$, qui est dans le cas *irréductible*, je divise tout par xx , ce qui donne $x = 30 + \frac{3703}{xx}$, or je suppose d'abord $x <$

30 , ce qui donne $x < 30 - \frac{3703}{30 \times 30} (900)$, puisque $\frac{3703}{900}$

$= 4 + \frac{103}{900}$ donc $x < 30 - 4 + \frac{103}{900}$, ou $x < 26$

$+ \frac{103}{900}$, donc $x < 26$, ce qui donne $xx < 676$, d'où je

tire $x < 30 - \frac{3703}{676} < 30 - 6 < 24$ or $24 \times 24 = 576$,

donc $x = 30 - \frac{3703}{576}$, donc $x = 30 - 7$, donc

$x = 23$, ou $x < 24$, donc 23 est la première racine positive.

Diviseur

$$\begin{array}{lcl} \text{Diviseur} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende} \\ x-23=0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient} \\ x^3-30xx+3703=0 \end{array} \right. \\ & & \left\{ \begin{array}{l} \\ xx-7x-161=0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & xx \dots x^3 - 23xx & \text{premier produit à ôter.} \\ & 0 - 7xx & \text{premier reste.} \\ -7x \dots & -7xx + 161x & \text{second produit.} \\ & 0 \dots - 161x + 3703. & \text{second reste.} \\ -161 \dots & -161x + 3703. & \\ = 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Le quotient est une équation du second degré.
 $x^2 = 7x + 161$, que je résoud par la formule propre du second degré $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$, ce qui donne $x = 3\frac{1}{2} \pm \sqrt{173\frac{1}{4}}$ qui se réduit à $x = 3\frac{1}{2} + 13\frac{1}{2}$ donc $x = +17$, c'est la seconde racine; la troisième est $x = -10$.

2°. Il reste les 8 dernières formules qui ont tous leurs termes, lesquelles se réduisent à sept, puisque nous en avons déjà retranché une comme inutile, parce qu'elle est entièrement négative.

Or pour ramener ces sept formules aux trois premières formules expliquées ci-dessus, il faut en faire évanouir le second terme comme il suit.

Méthode pour faire évanouir le second terme dans une Equation d'un degré quelconque.

Pour faire évanouir le second terme dans une équation, il faut la transformer dans une autre équation dont le second terme soit évanoui,

Analyse.

Règle générale.

1°. Je suppose dans l'équation proposée l'inconnue x égale à une nouvelle inconnue y augmentée ou diminuée d'une fraction, dont le numérateur soit le multiplicateur a du second terme de l'équation proposée, & dont le dénominateur soit l'exposant du degré de l'équation, comme $y \pm \frac{a}{3}$ pour l'équation du troisième degré $x^3 \pm 30x^2 \pm 20x \pm 341$; de sorte que dans le binôme $y \pm \frac{30}{3}$ le signe qui joint ou précède la fraction soit contraire au signe du multiplicateur a de l'équation proposée, c'est-à-dire, que pour l'équation $x^3 \pm 30x^2 \pm 20x \pm 341$, je suppose $x = y \pm \frac{30}{3}$.

2°. Je substitue cette valeur de x en sa place, & les puissances de la même valeur de x à la place des puissances semblables de x ; ce qui donnera l'équation transformée qui n'aura point de second terme.

1^{er}. Exemple. Soit $x^3 \pm 30x^2 \pm 20x \pm 341 = 0$.

dans laquelle Soit $x = y \pm \frac{30}{3}$

$$\text{Donc } x^2 = y^2 \pm 20y \pm \frac{900}{9}$$

$$\text{Donc } x^3 = y^3 \pm 30y^2 \pm \frac{900y}{3} \pm \frac{27000}{27}$$

Et substituant ces valeurs dans l'équation proposée comme il suit, j'aurai l'équation transformée où le second terme est évanoui.

$$\begin{aligned}
 x^3 &= y^3 + 30y^2 + \frac{900y}{3} + \frac{27000}{27} \\
 - 30x^2 &= \dots - 30y^2 + 20y + \frac{900}{9} \\
 - 20x &= \dots - 20y + \frac{30}{3} \\
 - 341 &= \dots - 341
 \end{aligned}$$

$$y^3 + 0y^2 + \frac{900y}{3} + \frac{27000}{27} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{La transformée} & \dots + \frac{900}{9} \\
 & + \frac{30}{3} \\
 & - 341.
 \end{aligned}$$

Je prépare d'abord cette transformée en ôtant toutes les fractions, & ensuite je trouve la valeur de $y = 21$, qui étant substituée dans l'équation simple $x = y + \frac{10}{3}$, donne $x = 21 + 10$, ou $x = 31$, c'est la racine désirée.

Pour rendre l'opération plus courte & plus facile, on peut prendre d'abord $x = y + 10$, puisque $10 = \frac{30}{3}$; mais j'ai voulu donner un exemple où il y entre des fractions.

SECOND EXEMPLE.

Soit l'équation proposée $x^3 + 30x^2 + 20x + 341 = 0$. je suppose $x = y - \frac{10}{3}$, & substituant cette valeur & ses puissances à la place de x & de ses puissances

ggij

dans l'équation proposée, j'ai l'équation transformée où le second terme est évanoui.

$$y^3 \pm 0y^2 - \frac{900y}{3} - \frac{27000}{27} = 0.$$

$$+ \frac{900}{9}$$

$$- 341.$$

Remarque 1^{re}. Si dans l'équation proposée, le premier terme avoit un coefficient différent de l'unité, comme ax^3 , &c. Dans ce cas, je divise tout par ce multiplicateur a du premier terme; ainsi je suppose $x = y \pm \frac{30}{a}$ & substituant de même cette valeur & ses puissances à la place de x & de ses puissances dans l'équation proposée, j'aurai une équation transformée où le second terme sera évanoui; ainsi si l'équation n'avoit que trois termes comme dans les trois formules générales auxquelles je réduis toutes les équations possibles dans chaque degré, alors l'équation transformée seroit une équation pure & simple du degré de la proposée, dans laquelle il n'y auroit que deux termes. Ainsi il sera facile de trouver la racine de la nouvelle inconnue y , & substituant cette valeur dans l'équation simple ou du premier degré, sçavoir $x = y \pm \frac{a}{3}$ pour le troisième degré & $x = y \pm \frac{a}{2}$ pour le second degré, on trouvera la valeur de l'inconnue x .

Remarque seconde & fondamentale.

On peut résoudre toutes les équations du second degré, en faisant évanouir le second terme par la transformation, car alors il ne reste plus que deux termes, dont

le premier est inconnu & le second est tout connu, car tirant la racine quarrée de chaque membre on aura la valeur de y , qui étant substituée dans $x = y + \frac{a}{2}$ donnera la valeur de x , ce qui est trop facile pour s'y arrêter davantage.

SECTION CINQUIÈME.

Méthode générale & nouvelle,

Pour résoudre les Equations de tous les degrez à l'infini, par le terme dominant.

Monsieur de Lagny a donné cette Méthode à l'Académie ; elle est imprimée dans le Recueil de l'année 1706. page 296.

Cette Méthode s'étend à tous les degrez à l'infini, & sert à trouver d'abord la première racine de l'équation proposée, par une simple extraction de racine, qui n'est proprement qu'une simple division, dans les équations affectées de termes moyens, comme dans les équations pures & simples.

1^o. *Préparation.* Je réduis d'abord les équations affectées de termes moyens à trois formules seulement, en conservant la loi des homogènes, en sorte que tous les termes dans chaque formule aient le même nombre de dimensions.

Dans le second degré, j'ai les trois formules suivantes,

1^{re}. formule. $x^2 + ax = b''$.

2^{de}. formule. $x^2 - ax = b''$.

3^{me}. formule. $-x^2 + ax = b''$. ou $x^2 - ax = -b''$.

gg *ijj*

Dans le 3^{me}, degré, j'ai les trois formules suivantes.

1^{re}. formule. $x^3 + a''x = b'''$.

2^{de}. formule. $x^3 - a''x = b'''$.

3^{me}. formule. $-x^3 + a''x = b'''$. ou $x^3 - a''x = -b'''$.

& pareillement dans tous les degrez supérieurs.

Or il est facile de réduire les autres formules du troisième degré aux trois précédentes en faisant évanouir le second terme par la transformation suivant les Méthodes connues ; on peut même opérer directement sur une équation quelconque par cette nouvelle Méthode, sans faire évanouir aucune terme.

En quoi consiste la Méthode, je néglige la haute puissance que je suppose nulle, & je n'opère que sur a & b.

2^o. La Méthode consiste à faire une division simple, dont le dividende & le diviseur sont toujours donnez dans toute équation proposée, c'est le coefficient a & l'homogène b ; mais la difficulté consiste à connoître quel est le diviseur, car dans un cas a est le diviseur, & dans un autre cas c'est b qui est le diviseur.

En général le terme, *dominant*, est toujours le diviseur.

Premier cas. Si a est le terme dominant il est le diviseur, & l'homogène est le dividende,

Second cas. Au contraire si b est le terme dominant d'une équation proposée, a est le dividende, & b le diviseur.

Troisième cas. Mais si a & b dominent également, ou plutôt s'ils ne dominent ni l'un ni l'autre, on peut en ce cas d'égalité tirer la racine du degré de l'équation dans l'homogène, ce fera la première racine désirée. Cependant si le nombre des tranches est égal, celui dont la première

tranche contient le plus grand nombre est le terme dominant.

3°. Voici la marque du terme dominant. Je divise a & b par tranches comme dans les puissances.

Dans le second degré où le multiplicateur numérique a n'a qu'une dimension, je le coupe par tranches d'un seul chiffre de droite à gauche.

Et comme l'homogène b a deux dimensions, je le coupe par tranches de deux chiffres de droite à gauche.

Celui des deux qui a plus de tranches est le terme dominant & par conséquent c'est le diviseur.

Dans le troisième degré où le multiplicateur a'' est de deux dimensions, je le coupe par tranches de deux chiffres de droite à gauche.

Et l'homogène b est de trois dimensions, je le coupe par tranches de trois chiffres de droite à gauche,

Premier cas où a est le terme dominant.

Premier Exemple. Dans la première formule du second degré $x^2 + ax = b''$, soit l'équation proposée $x^2 + 5.4.8.7.6.x = 38.41.81$. je suppose x^2 nul ou égal à zéro, partant je le néglige entièrement, & je ne considère que le coefficient $a = 5.4.8.7.6.$ & l'homogène de comparaison $b'' = 38.41.81$.

Comme le coefficient a n'est que d'une dimension, je le divise par tranches d'un seul chiffre, j'en trouve cinq; & comme b'' est de deux dimensions, je le divise par tranches de deux chiffres de droite à gauche, je n'en trouve que trois. Donc a est le terme dominant, & par conséquent c'est le diviseur, & b'' est le dividende; & je fais la division comme il suit.

$$\begin{array}{l} \text{Dividende. } b'' = 38.41.81. \\ \text{Diviseur. } a = 5.4.8.7.6. \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Quotient.} \\ 7. \end{array}$$

Je dis en 38 qui est la première tranche du dividende combien de fois cinq premier chiffre ou première tranche du diviseur, il y est sept fois ; car $5 \times 7 = 35$. de 38 reste 3.

Ensuite je multiplie le diviseur entier. 54876 par le quotient trouvé 7, le produit est 38.41.32. auquel j'ajoute le carré de 7 = 49 qui est l'homogène proposé, la somme est 38.41.81. = b'' .

Donc 7 est la racine exacte.

Remarque. Dans l'équation $x^2 + 54.876x = 38.41.86$.

$$\begin{array}{l} \text{Diviseur} \\ \text{a dominant} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende} \\ b'' \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient} \\ 7. + \frac{5}{54.87.6.} \end{array} \right.$$

$$7. \quad . \quad . \quad 38.41.81. \quad = \quad 38.41.32.$$

$$\begin{array}{r} \text{reste } 5. \quad \quad \quad + 49 \\ \hline 38.41.81. \end{array}$$

$$\{ x - 7 = 0 \quad \{ x^2 + 54876x - 384186 = 0$$

$$x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^2 - 7x$$

$$0 + 54883x$$

$$+ 54883.. \quad + 54883x - 384181.$$

$$0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad \text{reste } 5$$

Comme la division n'est pas exacte, & qu'il y a un reste moindre que le diviseur qui est le terme dominant x ; dans

cc

ce cas l'équation proposée a ses racines irrationelles, l'une plus grande que 7, mais plus petite que 8. l'autre plus grande que 54883 mais plus petite que 54884.

2^d. Exemple. Dans la seconde formule $x^2 - ax = b''$. soit l'équation proposée $x^2 - 54. 8. 7. 6. x = 38. 41. 81$.

Le multiplicateur a est le terme dominant, puisqu'il a cinq tranches de chiffres, & que l'homogène b'' n'en a que trois.

Dans ce cas je suppose $x = a + \frac{b''}{a}$, ce qui donne $x = 5. 4. 8. 7. 6. + \frac{38. 41. 81.}{5. 4. 8. 7. 6.}$ or cette fraction donne au quotient 7, ce qui donne $x = 5. 4. 8. 7. 6. + 7 = 54883$. pour la grande racine positive, & divisant l'équation proposée par cette racine, le quotient donne la petite racine négative — 7.

1 ^{re} . Racine.	{	Equation proposée.
Diviseur		
$x - 54883$	{	$x^2 - 54876x - 38. 41. 81$
<hr/>		<hr/>

Quotient,

$x \dots \dots x^2 - 54883x$	premier produit à ôter.
0	$+ 7x - 38. 41. 81.$
$+ 7 \dots \dots + 7x$	$- 58. 41. 81.$
$= 0$	0 0
<hr/>	

Dans la troisième formule $-x^2 + 5. 4. 8. 7. 6. x = 38. 41. 81$, j'ai $x = \frac{38. 41. 81.}{5. 4. 8. 7. 6.}$ qui donne encore $x = 7$.

Remarque. Lorsque b'' est plus petit que a , je suppose
Analyse. $\frac{b''}{h h}$

$b'' = 0$, & j'ai $x = a$ pour la valeur approchée de la racine.

Second cas où l'homogène de comparaison b'' est le terme dominant.

Dans ce cas, je peux absolument négliger le multiplicateur numérique a du second terme, & ne faire qu'une simple extraction de la racine quarrée de l'homogène de comparaison b'' , & dans tous les degrez supérieurs tirer la racine exprimée par l'exposant du degré de l'équation.

Troisième cas où il n'y a aucun terme dominant.

C'est lorsque le coefficient a & l'homogène b'' ont un égal nombre de tranches; il suffit alors de tirer la racine de l'un ou de l'autre, suivant l'exposant de leurs dimensions.

Les tables des quarrés & des cubes naturels présentent un moïen facile pour trouver ces racines du premier coup d'œil lorsqu'elles sont rationnelles, & lorsqu'elles sont irrationnelles, on les trouve d'abord approchées à moins de l'unité près, soit par excès, soit par défaut, & on approchera indéfiniment par la Méthode d'approximation.

Remarque. Cette nouvelle Méthode par le terme dominant, où l'on néglige x^2 , ou x^3 qu'on regarde comme nul, abrège les opérations qu'on ne pourroit pas finir dans un jour entier de calcul par les formules ordinaires, car il est évident que quelque petite que soit la première racine, elle peut se trouver multipliée par un très-grand nombre, & le produit augmenté ou diminué du quarré de cette petite racine sera égal à un homogène indéfiniment grand, ce qui demande des opérations très-longues dans la Méthode ordinaire.

Résolution des Equations du troisiéme degré par le terme dominant.

Je réduis à trois formules seulement toutes les équations du troisiéme degré, dans lesquelles il y a deux racines positives & la troisiéme négative, ou deux racines négatives & la troisiéme positive, de sorte que la somme des racines positives est égale à celle de la négative, ce qui détruit le second terme & donne $0x^2$.

Première formule $x^3 + a''x = b'''$.

Seconde formule $x^3 - a''x = b'''$.

Troisiéme formule $-x^3 + a''x = b'''$.

Dans lesquelles le multiplicateur a'' est de deux dimensions, & l'homogène b''' de trois dimensions; ainsi dans les équations numériques je divise a'' par tranches de deux chiffres de droite à gauche, & l'homogène b''' par tranches de trois chiffres de droite à gauche.

1^{er}. *Exemple.* Soit $x^3 - 75.00x = 250.000$. dans laquelle $a = 75.00$ contient deux tranches de deux chiffres, & $b''' = 250.000$, contient aussi deux tranches de trois chiffres, donc ces deux termes sont dans l'égalité & ne dominant point.

Préparation. J'ajoute à 75.00 , son tiers 25.00 , pour avoir ses quatre tiers 100.00 . j'en tire la racine quarrée c'est 100 , voilà la première racine trouvée.

Ou bien je multiplie l'homogène $b''' = 25000$ par 4 , le produit est 1000.00 , j'en tire la racine eubique 100 , c'est encore la racine désirée.

En général, je résous toutes les équations affectées comme les équations pures & simples. Ainsi pour $x^3 - 6x = 464$, il suffit de trouver un nombre dont le

h h ij

cube diminué de six fois sa racine, soit $\equiv 464$, or ce nombre est 8, dont le cube est 512, or $512 - 8 \times 6 (48) \equiv 464$.

Dans tous les cas où l'un des deux termes domine peu, comme b''' dans $x^3 - 2.00x \equiv 980.000$, puisqu'il y a deux tranches dans a'' & dans b''' , mais les tranches de a'' sont foibles, je me contente de tirer simplement la racine approchée de b''' . prochainement plus grande, c'est 100.

Résolution des équations du troisième degré dans la première formule $x^3 + a'x \equiv b'''$.

Soit l'équation proposée $x^3 + 21x \equiv 8420$. où le multiplicateur a'' de deux dimensions $\equiv 21$, & $b''' \equiv 8.420$. je coupe a'' pour tranches de deux chiffres, il n'en a qu'une, je coupe b''' par tranches de trois chiffres de droite à gauche, il en a deux dont la seconde n'a que le seul chiffre 8, par conséquent b''' est le terme dominant; je tire la racine cubique de 8 qui fait la première tranche c'est 2, j'ajoute un zéro pour la seconde tranche, ou simplement je dis la racine cubique de 8000, est 20, c'est la première racine positive, je multiplie 20 par $a'' \equiv 21$, le produit est 420, que je multiplie par la même racine 20, le produit donne 8400 qui est égal à l'homogène b''' .

Autrement. Je quarre la racine trouvée 20, c'est 400, que je multiplie par 21, le produit est 8400, auquel j'ajoute la même racine 20, la somme 84200 est égal à l'homogène proposé.

Pour la preuve je divise l'équation proposée par la racine positive trouvée, la division se fait exactement.

$$\{ x - 20 = 0 \} \{ x^3 + 0x^2 + 12x - 8.420 = 0 \}$$

Quotient.

$$\begin{array}{r}
 x^3 \dots\dots x^3 - 20x^2 \\
 0 + 20x^2 + 21x \\
 + 20x \dots\dots + 20x^2 - 400 \\
 0 + 421x - 8420 \\
 + 421 \dots\dots\dots + 421x - 8420 \\
 = 0 \dots\dots\dots 0 \qquad 0
 \end{array}$$

Second exemple. Soit $x^3 + 18x = 44$ où $a'' = 18$, & $b''' = 44$, dont la première racine est 42, pour la trouver je dis $a'' = 18$ est ici le terme *dominant*, & par conséquent le diviseur, puisqu'il a sa tranche complète de deux chiffres, & $b = 44$ n'a que deux chiffres au lieu qu'il devrait en avoir trois, ainsi b''' est le dividende.

Pour suivre la règle générale le diviseur est 18, or 44 divisé par 18 donne 2 au quotient, c'est la première racine, je multiplie 18 par cette racine 2, le produit est 36 auquel j'ajoute le cube 8 de la même racine 2, la somme est 44 égale à l'homogène proposé.

$$x - 2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x^3 + 0x^2 + 18x - 44 = 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} x^3 \dots\dots\dots x^3 - 2x^3 \\ 0 + 2x^3 + 18x \\ + 2x \dots\dots\dots + 2x^2 - 4x \\ 0 + 22x - 44 \\ + 22 \dots\dots\dots + 22x - 44 \\ = 0 \dots\dots\dots 0 \quad 0 \end{array}$$

Résolution des Equations du troisième degré dans la seconde formule $x^3 - a''x = b'''$, ou $x^3 - aa x = b^3$.

C'est proprement dans les grands nombres qu'on a besoin de Méthodes, ainsi je donnerai ici de grands nombres pour exemples.

La formule universelle pour trouver la première & plus petite racine est $x = a + \frac{b}{2aa} - \frac{cd-b}{3cc-aa} - \frac{ef-b}{3ee-aa}$ &c. dans laquelle le premier terme complexe donne la racine par excès, c'est pourquoi il faut le diminuer & continuer la soustraction jusqu'à ce que les deux termes du numérateur soient égaux ou donnent zéro, car si $cd-b=0$, ou $ef-b=0$, alors l'opération est finie, & la racine est trouvée exactement $=c$, ou $=e$ &c.

Or l'équation proposée donne le premier terme complexe $a + \frac{b}{2aa}$, car a est la racine quarrée du multiplicateur a'' . b est l'homogène & $2aa$ est le double du multiplicateur de l'équation $a''x$, ou $aa x$, pour avoir les autres fractions qu'il faut soustraire, je suppose $a +$

$\frac{b}{2aa} = c$ pour abréger, & $cc - aa = d$, je suppose aussi $cc - aa = f$, &c.

Je prends toujours les quotients marquez par les fractions de cette formule en nombres entiers, sçavoir le premier $\frac{b}{2aa}$, par défaut, & les autres comme $\frac{cd - b}{3cc - aa}$ $\frac{cf - b}{3cc - aa}$ par excès.

Je pourrois même au lieu de la fraction $\frac{b}{2aa}$ prendre

$\frac{b}{2aa + 3a + 1}$, ce qui abrége en quelques rencontres & conserve l'analogie, mais comme $3a + 1$ est un infiniment petit à l'égard de la grandeur constante $2aa$, on peut le négliger, comme je le néglige effectivement.

Je suppose toujours l'équation préparée à l'ordinaire, c'est-à-dire sans fractions & sans incommensurables, & même si l'on veut pour une plus grande facilité sans multiplicateur à la haute puissance que l'unité, cette dernière préparation n'est que d'élégance & non pas de nécessité, car si j'ai $cx - aa x = b$, supposant que c représente un nombre entier quelconque, alors au lieu de a pour premier membre de la racine, je prendrois $\sqrt{\frac{aa}{c}}$,

ou $\frac{a}{c}$, ce qui ne change rien dans l'essence de la Méthode.

Il faut aussi examiner si l'équation est primitive, ou si elle est dérivée, on connoîtra qu'elle est dérivée si on peut diviser l'homogène par le cube d'un nombre quelconque, & le multiplicateur aa par le quarré du même nombre, & l'équation qui résulte de cette division est l'équation primitive sur laquelle il faut opérer, car c'est précisément la même faute d'exactitude en matière d'équations, d'en résoudre une qui soit dérivée ou compo-

sée sans l'avoir réduite à son équation simple ou primitive, comme d'opérer sur les fractions sans les avoir réduites à leurs moindres termes.

Exemple. Soit l'équation proposée $x^3 - 75.69x = 243.100$. dans la seconde formule du troisième degré, dans laquelle $aa = 75.69$. qui contient deux tranches de deux chiffres chacune, parce qu'il a deux dimensions, & l'homogène $b''' = 243.100$, qui contient deux tranches chacune de trois chiffres, parce que cet homogène a trois dimensions.

Puisqu'il y a deux tranches de part & d'autre, je tire la racine quarrée de 75. Première tranche du coefficient aa , c'est 8, ensuite je tire la racine cubique de 243 première tranche de b''' c'est 6, car le cube de 6 est 216 moindre que 243, & le cube de 7 est 343.

Or la racine quarrée 8 du multiplicateur aa , est plus grande que 6, racine cubique de l'homogène 243. Ainsi le multiplicateur aa est le terme dominant, & par conséquent c'est le diviseur, & b''' est le dividende.

1°. Pour avoir le premier membre de la racine qui est toujours plus grand que la racine cherchée, je me sers de la 1^{re}. partie de la formule $a + \frac{b}{2aa}$, c'est-à-dire, je prends la racine quarrée de $75.69 = aa$, cette racine est $87 = a$.

Et suivant $\frac{b'''}{2aa}$ j'ai la fraction $\frac{243100}{15138}$ qui indique une division.

$\left. \begin{array}{l} \text{Diviseur.} \\ 2aa = 15138 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{Dividende.} \\ b''' = 243100. \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{Quotient.} \\ 16 + \end{array} \right\}$	$\begin{array}{r} \text{Racine.} \\ \{ 7569 \{ 87 - \\ \hline \text{S. } 64 \\ 11:69 \\ 16;7. \quad 11 \quad 69 \end{array}$
1	15138.		
	91720.		
6	90828.		
	892.		

Ainsi

Ainsi le premier membre de la formule $a + \frac{b'''}{2aa}$

donne pour premier membre de la racine $87 + 16 = 103 +$ qui excède la véritable valeur de la racine cherchée, & c'est en quoi consiste l'esprit de la Méthode qui se sert de la soustraction ensuite pour trouver la racine, par la voie la plus courte. Or il est indifférent en général qu'on employe dans une Méthode, ou l'addition ou la soustraction.

2°. Pour avoir le second membre de la racine, je me sers du second membre de la formule $\frac{cd-b}{3cc-aa}$ dans

laquelle $c = a + \frac{b}{2aa} = 103$.

Donc $cc = 103 \times 103 = 10609$. Donc $3cc = 31827$.

$8c - aa = -7569$.

Donc $3cc - aa = 24258$.

Valeur du Dénominateur.

Pour trouver la valeur du numérateur $cc - aa = d$ ou $10609 - 7569 = 3040 = d$.

multiplié $\times c = 103$.

9120.

3040...

produit $cd = 313120$.

$- b = 243100$.

Donc $cd - b = 70020$. valeur du numérateur

ce qui donne $\frac{cd-b}{3cc-aa} = \frac{70020}{24258} = 3$.

Analyse.

ii

C'est le second membre de la racine ; je fais l'addition des deux membres 103 +

$$\begin{array}{r} 103 + \\ \hline 3 \end{array}$$

Somme 100 c'est la racine cherchée ; pour juger si elle est exacte , je la quarre , 100×100 donne 100.00. dont j'ôte 7569 , il reste 2431 , que je multiplie par la même racine trouvée 100 , le produit est 243100. qui est égal à l'homogène proposé. Ainsi 100 est la racine cherchée , par laquelle je divise l'équation sans passer au reste de la formule universelle.

$$x - 100 = 0 \left\{ x^3 + 0x^2 - 7569x - 243100 = 0 \right.$$

$$\begin{array}{rcl} x^3 & . & . & . & x^3 - 100x^2. & . \\ & & & & 0 + 100x^2. - 7569x. & \\ + 100x & . & . & . & + 100x^3. - 10000x. & \\ & & & & 0 + 2431x. & \\ + 2431 & . & . & . & . & + 2431x + 243100. \\ & & & & 0 & 0 \\ \hline = 0 \end{array}$$

Le quotient $x^2 + 100.0x + 24.31 = 0$ est une équation du second degré où $a = 100$ est le terme dominant parce qu'il est d'une seule dimension , & que ses chiffres font trois tranches , mais $b'' = 24.31$, est de deux dimensions , car ses quatre chiffres ne font que deux tranches chacune de deux chiffres.

Ainsi $a = 100$ est le terme dominant & le diviseur ; mais $b = 2431$ est le dividende.

$$\begin{array}{l} \text{Diviseur.} \\ \text{a terme dominant} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende.} \\ 100. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient.} \\ b'' = 24.31. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 24 + \frac{31}{100} \end{array} \right.$$

$$2 \dots \dots \dots 200$$

$$431$$

$$4 \dots \dots \dots 400$$

reste 31.

Comme le quotient donne un reste, les deux racines de cette équation du second degré sont irrationnelles l'une plus grande que 24, mais moindre que 25., l'autre plus grande que 76 & plus petite que 77. toutes deux négatives, puisque tous les signes de l'équation sont +

$$x + 24 = 0. \left\{ \begin{array}{l} x^3 + 100x + 2431 = 0. \end{array} \right.$$

$x \dots \dots x^2 + 24x.$ $0 + 76x. + 2431$ $+76 \dots \dots +76x. + 1824$ $= 0 \dots \dots 0 \dots \dots 607$	76 $\times 24$ <hr style="width: 50%; margin: 0;"/> 304 $152.$ <hr style="width: 50%; margin: 0;"/> 1824
--	--

Remarque. 1. Pour conserver une Analogie entière & parfaite dans la formule universelle de la racine

1°. Je suppose le premier membre = a , ensuite j'ai aa
 $aa = 0.$

2°. Je prends pour le second membre $+$ $\frac{aa + b}{3aa - aa}$.

$= a + \frac{b}{2aa}$ dans lequel ensuite supposant $a + \frac{b}{2aa}$

$= c$, & $cc - aa = d$ pour avoir le troisième membre
 suivant. ii ij

3°. J'ai pour le troisième membre $\frac{cd-b}{3cc-aa}$ dans lequel supposant ensuite $c = \frac{cd-b}{3cc-aa} = e$, & $cc = aa = f$. Pour avoir le quatrième membre suivant.

4°. J'ai pour le quatrième membre $\frac{ef-b}{3ee-aa}$ & continuant ainsi de suite on trouvera des membres différens à l'infini.

Remarque. 2. Lorsque dans l'un ou l'autre de ces membres le numérateur donne zéro, c'est-à-dire, lorsque $cd = b$, ou $ef = b$, &c. La question est résolue, dans ce cas la racine cherchée est c , ou e , &c. Alors il faut s'arrêter au membre qui l'a donnée sans pousser plus loin l'opération après qu'on a trouvé une racine, ou exacte ou approchée à moins de l'unité près.

Résolution des Equations du troisième degré.

Dans la troisième formule $x^3 - aa x = b'''$, ou $x^3 + aa x = b'''$; je prends toutes les quotiens par excès dans la formule universelle pour la première racine qui suit.

Je néglige x^3 que je suppose égal à zéro, & je fais une équation des deux termes $aa x = b'''$. ce qui donne 1°. par transposition & division en dégageant l'inconnue

$x = \frac{b'''}{aa}$. C'est le premier membre de la racine.

Exemple. Soit $x^3 - 5.24.16 x = 1.244.160$, dans laquelle $aa = 5.24.16$. qui a trois tranches de deux chiffres chacune, parce qu'il est de deux dimensions, & $b''' = 1.244.160$, cet homogène est de trois dimensions & a trois tranches de chiffres; mais la dernière tranche est incomplète, puisqu'elle n'a que le seul chiffre 1 au lieu de trois chiffres qu'elle devrait avoir, & la troisième

me tranche du multiplicateur aa est 5, qui surpasse 1. Ainsi aa est le terme dominant ou le diviseur, b''' est le dividende.

$$\begin{array}{l} \text{Diviseur } aa \\ \{ = 5. 24. 16. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende. } b''' \\ 1. 244. 160. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient.} \\ 23 + \text{ ou } 24 - \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 2 \dots\dots\dots 1. 04832 \\ 195840 \\ 4 - \dots\dots\dots 209664 \\ \text{reste} - 13824 \end{array}$$

Ainsi je prends pour le premier membre de la racine 24. qui est un quotient par excès, que je suppose $= c$, que je quarre pour substituer sa valeur, dans le second membre de la racine dont la formule est $c + \frac{b - cd}{aa - 3cc}$, j'ai $cc = 476$, que j'ôte de $aa = 5. 24. 16$, ce qui donne $51840 = d$, que je multiplie par la même racine trouvée $c = 24$, le produit $cd = 1. 244. 160$ est égal à l'homogène proposé b''' , & ils se détruisent par des signes contraires.

Donc la première racine est 24, qui est exacte; mais si b''' ne se trouvoit pas égal à cd , dans ce cas, il faudroit continuer l'opération suivant la formule universelle

$$\text{de la première racine } \frac{b'''}{aa} + \frac{b''' - cd}{a^2 - 3cc} + \frac{b''' - ef}{a^2 - 3ee} \&c.$$

dans laquelle on suppose dans le premier membre $\frac{b'''}{aa}$

$= c$ & $a - cc = d$, pour avoir le second membre

$$\frac{b''' - cd}{a^2 - 3cc} \text{ ensuite supposant ce second membre } = e \&$$

$a^2 - ee = f$, pour former le troisième membre

$$\frac{b''' - ef}{a^2 - 3ee},$$

Ce qui donne 1°. $x = \frac{b'''}{aa}$,

2°. $x c \mp \frac{b''' - cd}{aa - 3cc}$, ou $c \mp \frac{c^3}{aa - 3cc}$, car j'ai supposé

$$d = a - c, \text{ \& } c = \frac{b'''}{aa}, \text{ or } c \times cc = c^3.$$

3°. $x = c \mp \frac{b''' - ef}{aa}$, \& ainsi de suite à l'infini, ou simplement 1°. $x = \frac{b}{a}$, 2°. $x = \frac{c}{d}$, 3°. $x = \frac{e}{f}$

$$4°. x = \frac{g}{h}, \text{ \&c.}$$

Règle générale. Je prends toujours en nombres entiers les valeurs de tous les quotients $\frac{b'''}{c}$, $\frac{b''' - cd}{a^2 - 3cc}$, ou

$\frac{c^3}{a - 3cc}$, \&c. parce que je suppose que a \& b sont des nombres entiers, \& que je cherche la racine ou la valeur de x en nombres entiers.

Mais dès que le produit cd , ou ef , \&c. se trouve égal à l'homogène proposé, l'opération est finie, \& j'ai la valeur de x en nombres entiers, qui est une racine rationnelle.

Au contraire si après avoir trouvé que le produit cd , est moindre dans une opération que l'homogène proposé b''' , ce produit se trouve plus grand que cet homogène dans l'opération suivante, la racine est alors irrationnelle, \& sa valeur est trouvée en nombres entiers à moins d'une unité près dans ces deux équations, dont l'une donne la racine par défaut à l'unité près, \& la suivante donne la racine par excès.

Mais il faut que $\frac{1}{17} a^3$ soit ou plus grand ou égal à $\frac{1}{4} bb$, car s'il étoit plus petit dans ce cas, l'équation seroit impossible, car dans le cas d'égalité ou $\frac{1}{17} a^3 = \frac{1}{4} bb$, on aura $x = \sqrt[3]{\frac{1}{17} a} = \sqrt{\frac{1}{4} b}$; c'est-à-dire, qu'il suffit

de tirer la racine cube du tiers du multiplicateur a'' , ou la racine quarrée de la moitié de l'homogène b''' , mais dans le cas d'inégalité, la racine sera d'autant plus aisée à trouver que a^3 surpassera davantage bb .

Remarque générale. Lorsque le coefficient a'' & l'homogène b''' , sont tels que le même nombre qui mesure a'' par son quarré, mesure b''' par son cube, on pourra toujours réduire l'équation à moindres termes, alors c'est une équation dérivée qu'il faut réduire à son équation primitive, & c'est une faute aussi importante de négliger cette opération dans une équation, que de vouloir opérer sur les fractions sans les réduire auparavant à leurs moindres termes; l'équation précédente servira d'un troisième exemple $x^3 - 52416x = -1244160$, c'est un exemple tiré exprès d'Hariot, page 146, 147, & 148 de son exégétique numérique pour comparer cette Méthode (qui est très-courte comme il paroît ci-dessus) avec la sienne & celle de Viète qui demandent trois pages in folio de calcul.

Cependant Hariot a très mal choisi cet exemple, car l'équation $x^3 - 52416x = -1244160$, qui a pour racines $+ 24$, $+ 216$, $- 240$, est une équation dérivée, puisque le multiplicateur $a'' = 52416$ est mesuré par 576, qui est le quarré de 24, qu'il contient 91 fois, & l'homogène $- 1244160$ est mesuré par 13824, qui est le cube du même nombre 24, qu'il contient 90 fois.

Ainsi l'équation simple & primitive dont celle d'Hariot est dérivée est $y^3 - 91y = -90$, dans laquelle $aa = 91$, & $b''' = 90$, dont les trois racines sont $+ 1$, $+ 9$ & $- 10$, car le multiplicateur $aa = 91$ est

ANALYSE GÉNÉRALE,
le diviseur, & $b''' = 90$ le dividende, ce qui donne
 $\frac{21}{90} = 1 + \frac{1}{90}$.

$$\{y - 1 = 0 \{y^3 + 0y^2 - 91y + 90 = 0 \{y^2 + 1y - 90 = 0.$$

$y^2 \dots y^3 - 1y^2$ premier produit.

$0 + 1y^2 - 91y$ premier reste.

$+ 1y \quad + 1y^2 - 1y$ second produit.

$0 - 90y + 90$ second reste.

$- 90 \dots - 90y + 90.$

$= 0 \dots 0 \quad 0.$

$$\{y - 9 = 0 \{y^2 + 1y - 90 = 0. \{$$

$y \dots y^2 + 1y$

$0 + 10y - 90$

$+ 10 \dots + 10y - 90$

$= 0 \quad 0$

$$\{ x - 24 = 0 \} \{ x^3 \pm 0 x^2 - 52416 x \mp 1244160 = 0.$$

$$\begin{array}{r} x^3 \dots x^3 - 24 x^2 \\ 0 \mp 24 x^2 - 52416 x \\ \mp 24 x \dots \mp 24 x^2 - 576 x \\ 0 - 51840 x \mp 1244160. \\ - 51840 \dots - 51840 x \mp 1244160. \\ = 0 \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad 0 \end{array}$$

$$\{ x - 216 = 0 \} \{ x^2 \mp 24 x - 51840 = 0.$$

$$\begin{array}{r} x \dots x^2 - 216 x \\ 0 \mp 240 x - 51840. \\ \mp 240 \dots \mp 240 x - 51840. \\ = 0 \dots \qquad \qquad \qquad 0 \dots \qquad 0 \end{array}$$

Méthode pour trouver la seconde racine.

La première étant trouvée, dans la seconde & la troisième formule du troisième degré, je me sers de la formule $\sqrt{a - \frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}c = d$.

Ainsi dans l'Exemple précédent tiré d'Hariot où il y a deux racines positives & la troisième qui est négative, égale à la somme des deux positives.

J'ai trouvé ci-dessus la première racine positive $\mp 24 = c$, pour trouver la seconde $= d$, suivant la formule ci-dessus, j'ai $\frac{1}{2}c = 12$; ensuite je quarre c c'est $cc = 144$, que je multiplie par 3 c'est 432, que j'ôte du

Analyse. $k k$

coefficient ou multiplicateur $aa = 52416$, le reste est $51989 = a - \frac{1}{4}cc$; ensuite j'en tire la racine quarrée c'est $228 = \sqrt{a - \frac{1}{4}cc}$, de laquelle j'ôte $12 = \frac{1}{2}c$, le reste est $216 = \sqrt{a - \frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}c$. Donc 216 est la seconde racine positive cherchée $= d$.

Autre Exemple dans la troisième Formule du 3^{me} degré.

On demande le côté de l'octo-décagone, ou ce qui est la même chose la sécante de 80 degrez ou des $\frac{2}{3}$ de la circonférence du cercle. Si je suppose le rayon $= 1$, le sinus de 10 degrez ou de la trente-sixième partie du cercle est la moitié du côté de l'octo-décagone lequel côté est la petite racine de l'équation $x^3 - 3x = -1$, mais la sécante de 80 degrez est le double d'une valeur de y dans l'équation $y^3 - 3y^2 = -1$; il en est de même de toutes les sécantes dont les arcs ne peuvent être donnez que par la trisection de l'angle.

Dans l'équation $x^3 - 3x = -1$, j'ai $a'' = 3$, & $b''' = 1$. Par conséquent substituant dans la formule ces nombres en la place des lettres au lieu de $a - \frac{ab}{a^3 - 2b}$

j'ai $3 - \frac{3 \times 1}{27 - 2} (= \frac{3}{25})$ ou $3 - \frac{3}{25} = \frac{72}{25} = c$.

Ensuite pour avoir le terme suivant je quarré c , c'est $cc = \frac{5184}{625}$ & $a - c = d = 3 - \frac{72}{25} = \frac{71}{25} (= \frac{3}{25})$. Donc $cc d = \frac{15552}{15625}$ que j'ôte de $b''' = 1$; il reste $\frac{73}{15625}$, que je divise par $3cc - 2ac = \frac{15552}{625} = \frac{432}{25}$, c'est-à-dire $\frac{118800}{15625}$, le quotient est $\frac{73}{118800}$ que j'ôte de $\frac{73}{25}$, il reste $\frac{341071}{118800} = 2.879385$ ^{vi zéros}, &c. dont le double

5.758770 ^{vi}, est effectivement la sécante de 80 degrez conformément aux Tables.

Démonstration de la résolution des Equations.

Dans la troisiéme formule $x^3 - a''x = b'''$.

1°. Je cube a , & je quarre b , ce qui donne a^3 & bb .

2°. Je divise a^3 par bb , c'est $\frac{a^3}{bb}$. Si le quotient est $6\frac{1}{4}$,

la racine sera $\frac{3b}{2a}$.

Or le quotient ne peut jamais être moindre que $6\frac{1}{4}$; car si je suppose dans l'équation proposée $a'' = 3cc$, & $b''' = 2c^3$, la substitution donnera $x^3 - 3ccx = 2c^3$. Or le cube de $3cc$ est $27c^6$, & le quarré de $2c^3$ est $4c^6$, & divisant l'un par l'autre $\frac{27c^6}{4c^6}$, le quotient $= 6\frac{3}{4}$.

Maintenant lorsque $x^3 = 3ccx - 2c^3$, il est évident que $x = \frac{3b}{2a} = \frac{6c^3}{6cc} = c$, car en substituant c à la place de x , on aura $c^3 = 3c^3 - 2c^3 = c^3$.

3°. Pareillement on démontrera que si le quotient de $\frac{a^3}{bb} = 7\frac{1}{9}$, la racine ou plutôt l'une des racines sera $\frac{4b}{3a}$, par exemple dans l'équation $x^3 = 4ccx - 3c^3$, on aura $a = 4cc$, & $b = 3c^3$, par conséquent $a^3 = 64c^6$, & $bb = 9c^6$. Donc $\frac{a^3}{bb} = \frac{64c^6}{9c^6} = 7\frac{1}{9}$, & $\frac{4b}{3a} = \frac{12c^3}{12c^3} = c$.

Il est évident que $x = c$, car en substituant c à la place de x dans l'équation $x^3 = 4ccx - 3c^3$, on aura $c^3 = 4c^3 - 3c^3 = c^3$.

4°. Si le quotient est $5\frac{7}{4}$ ou $6\frac{1}{4}$ une des racines sera $\frac{3b}{2a}$.

Si le quotient est $6\frac{10}{9}$ ou $7\frac{1}{9}$ une des racines sera $\frac{4b}{3a}$.

Si le quotient est $7\frac{11}{16}$, la racine sera $\frac{5b}{4a}$.

Si le quotient est $8\frac{16}{81}$, la racine sera $\frac{6b}{5a}$.

kk ij

Si le quotient est $9 \frac{12}{16}$, une des racines sera $\frac{7b}{6a}$.

Si le quotient est $10 \frac{11}{19}$, une des racines sera, $\frac{8b}{7a}$

Si le quotient est $11 \frac{11}{24}$, une des racines sera $\frac{9b}{8a}$, &c.

& universellement si le quotient $\frac{a^3}{bb} = c + \frac{3c-8}{c-3}$, ou

$$= c + \frac{3c-8}{c-6c+8}, \text{ la racine sera } \frac{c-2 \times b}{c-3 \times a}$$

Mais si le quotient ne se trouve pas l'un des termes de la suite de cette progression ; il doit nécessairement se trouver entre deux termes consécutifs de cette progression & la racine de même sera contenue entre deux termes prochains des formules des racines de cette progression. Par exemple, lorsque ce quotient est entre 26. & 27. la racine est entre $\frac{21}{24}$ & $\frac{21}{23}$, comme dans $x^3 = 3x - 1$, en supposant $a = 3$ & $b = 1$, & substituant j'ai $\frac{21b}{24a} = \frac{21}{72}$, &

$$\frac{24b}{23a} = \frac{24}{69}.$$

Or $\frac{24}{69} - \frac{21}{72} = \frac{3}{4968} - \frac{1}{1636}$. Voilà une racine très-

approchée, parce que lorsque $x = \frac{24b}{23a}$, le quotient $\frac{a^3}{bb}$

$$= 26 \frac{70}{119}, \text{ \& lorsque } x = \frac{21b}{24a} \text{ alors le quotient } \frac{a^3}{bb}$$

$$= 27 \frac{73}{176} \text{ suivant la formule pour le quotient } c + \frac{3c-8}{c-3},$$

& suivant la formule pour la racine $\frac{c-2 \times b}{c-3 \times a}$

Or ces deux formules commencent par $5 \frac{7}{4}$, $6 \frac{10}{9}$, $7 \frac{13}{16}$ & continuent à l'infini dans la même progression.

C'est-à-dire, le premier membre de la racine cherchée =

est $\frac{c-2 \times b}{c-3 \times a}$, & parce que $c = \frac{a^3}{b^3}$ par hypothèse, & que d'ailleurs la fraction $\frac{3c-8}{c-3}$ est un infiniment petit par rapport aux grandeurs constantes a, b, c , si l'on substitue $\frac{a^3}{b^3}$ à la place de c dans la fraction $\frac{c-2 \times b}{c-3 \times a}$, on aura

$$\frac{a^3 b - 2b^3}{a^4 - 3abb}, \text{ ou } \frac{b}{a} + \frac{b^3}{a^4 - 3abb} \text{ ou enfin } + \frac{b^3}{a^3 - 3bb \times a}$$

Mais présentement si l'on suppose $\frac{b}{a} = c$, (alors c'est une nouvelle valeur de c différente de la formule $\frac{c-2 \times b}{c-3 \times a}$)

& si on substitue cette valeur dans la fraction $\frac{a^3 - 3bb \times a}{b^3}$, on aura pour le premier membre de la racine cherchée cette valeur $c + \frac{c^3}{a - 3cc}$ qui est précisément la valeur trouvée ci-dessus, dont nous avons fait la règle, & qu'il falloit démontrer.

Ensuite pour trouver les autres membres de la racine $c + \frac{b - ef}{a - 3cc}$, &c. je suppose $c + \frac{c^3}{a - 3cc} = e$ ou $ax - x^3 = b$, or puisque $e < x$, il s'ensuit de-là nécessairement que l'homogène de comparaison donné, pris pour le premier pour $ax - a^3$, sera plus petit que b .

Soit donc $a - ee = f$, il suit de là que f est plus petit que b , & $b - ef$, est la différence des deux homogènes de comparaison pour les deux équations semblables qui suivent.

$$ax - x^3 = b. \text{ \& supposant } b = ae - ee$$

$$ae - e^3 = ef, \text{ \& supposant } ef = a - ee \times e, \text{ \&c.}$$

Enfin pour avoir un troisième homogène, puisque x est

k k iij

un nombre entier, & que e est plus petit, la moindre valeur que je puisse supposer pour x est $e + 1$, je substitue cette valeur dans l'équation $ax - x^3 = b$, ou $a - x^2 = \frac{b}{a}$, la substitution donne $ae + 1 - e - 3ee - 3e - 1 = d$.

Alors si $d = b$ qui est l'homogène proposé, la racine est trouvée, c'est $x = e + 1$; mais si l'homogène d est encore moindre que l'homogène proposé b , il est évidemment plus grand que ef , car l'homogène de comparaison augmente à mesure que la racine qui le forme augmente aussi; or l'homogène d est formé du produit de e seul, c'est pourquoi je fais une règle de trois, ainsi je dis la différence des homogènes $ae - e^3 = ef$, & $ae - e^3 - 3ee - 3e - 1 + 1a = d$, cette différence est $a - 3ee - 3e - 1$.

Mais entre les deux homogènes $ax - x^3 = b$, & $ae - e^3 = ef$, la différence est $b - ef$.

Présentement la racine qui a donné l'homogène ef est e , la racine qui a donné l'homogène d est $e + 1$, la différence de ces deux racines est 1, ce qui donne cette règle de trois.

Si $a - 3ee - 3e - 1$ différence dans l'homogène vient de 1 différence dans les racines.

De combien viendra $b - ef$?

Le quotient $\frac{b - ef}{a - 3ee - 3e - 1}$ donnera le troisième membre de la racine cherchée, mais parce que $3e - 1$ est un infiniment petit par rapport aux grandeurs constantes a, b, ef , je me contente de prendre universellement $\frac{b - ef}{a - 3ee}$, ce qu'il falloit trouver & démontrer.

Enfin il reste à démontrer que ce troisième membre de la racine, & les autres suivans qu'on peut trouver de la même manière à l'infini, forment une somme plus petite que la racine lorsqu'elle est irrationnelle, & qui en

approche de plus en plus à l'infini, & c'est tout ce qu'on peut désirer.

Soient trois équations géométriquement semblables,

$$1^{\circ}. x^3 = ax - b, \text{ \& soit } y = x + e.$$

$$2^{\circ}. y^3 = ay - c, \text{ \& soit } z = y + f = x + e + f$$

$$3^{\circ}. z^3 = az - d.$$

Je dis que si l'on fait comme $c - b : d - c :: y - x$ à une quatrième grandeur $\frac{d - cxy - x}{c - b}$, la composée $y + \frac{d - cxy - x}{c - b}$ sera plus petite que z , ou que son égale $x + e + f$, car en substituant cette valeur dans $ax - x^3 = b$, & dans $ay - y^3 = c$, on aura
 $ax + ae - x^3 - 3exx - 3eex - e^3 = c.$
 donc $c - b = ae - 3exx - 3eex - e^3$, &c.
 & enfin on aura

$$\frac{afe - f^3 - 3ffe x - 3ffe - 3fexx - 6eefx - 3fe^3}{ae - 3exx - 3eex - e^3}.$$

différence qui est plus petite que f , puisqu'il ne reste que tous termes négatifs.

On prouvera de la même manière que cette différence deviendra plus petite qu'aucune grandeur donnée, & que par conséquent on peut approcher à l'infini de la valeur de la racine lorsqu'elle est irrationnelle, & on la trouvera exactement dans le cas où elle est rationnelle, ce qu'il falloit démontrer.

Remarque fondamentale.

La règle de trois que nous venons d'employer pour comparer la différence des homogènes & celles des racines qui les ont produits dans les équations géométriquement semblables, est un principe général & très fé-

cond pour résoudre les équations de tous les degrez à l'infini dans tous les cas possibles , réduçtibles ou irréduçtibles.

SECTION SIXIÈME.

Méthode pour résoudre les Equations de tous les degrez à l'infini , par les progressions Arithmétiques.

JE suppose ici tout ce que Mr. de Lagny a démontré touchant les progressions Arithmétiques dans les Mémoires de l'Académie imprimez dans les années 1705 , 1706 & 1711, où il démontre que les séries des homogènes des équations de tous les degrez à l'infini , sont des progressions Arithmétiques du même degré qui ont une dernière différence constante qui a le même exposant que le degré de l'équation proposée : je suppose cette vérité comme un axiome , & je me renferme seulement dans le détail des opérations nécessaires pour résoudre les équations qu'il avoit promis.

Cette Méthode est générale pour tous les degrez , elle donne toujours les racines exactes lorsqu'elles sont rationnelles , ou approchées à moins de l'unité près lorsqu'elles sont irrationnelles. Il n'est point nécessaire de faire évanouir aucun terme , s'il en manque quelques-uns , il faut les remplir des puissances de l'inconnuë qui manquent , & leur donner le zéro pour coefficient.

Je suppose l'équation proposée seulement sans fractions & sans incommensurables , & que l'inconnuë du premier terme n'a point d'autre coefficient que l'unité , mais cette dernière condition n'est que d'élégance & non pas de nécessité,

Dans

Dans le second degré, soit l'équation proposée $x^2 + 20x = 189$.

1°. Je substitue dans cette équation trois valeurs de x , commençant toujours par l'unité $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en la place de x , & leurs quarrés en la place de xx , comme l'équation est du second degré. je fais trois substitutions, car il en faut toujours une de plus que l'exposant du degré de l'équation ne contient d'unités.

Ces substitutions me donnent trois équations arithmétiquement semblables.

$$x^2 + 20x = 189.$$

$$x = 1 \dots 1 + 20 = 21.$$

$$x = 2 \dots 4 + 40 = 44.$$

$$x = 3 \dots 9 + 60 = 69.$$

Ce qui me donne trois homogènes primitifs, dont je cherche les différences par soustraction comme il suit.

1 ^{er} .	2 ^d .	3 ^e . homogène.
+ 21.	+ 44.	+ 69.
	+ 21.	+ 44.

1^{re}. différence.

+ 23.	+ 25.
	+ 23.

$$+ 2.$$

2^{de}. différence constante.

Je prends la première des premières & des secondes
Analyse.

différences avec le premier des homogènes que je range dans un ordre contraire.

1 ^{re} . différence constante.	la 1 ^{re} . des 1 ^{res} . différences.	le 1 ^{er} . des homogènes.
+ 2.	+ 23.	+ 21.

Ce sont trois nombres générateurs qui serviront à former par addition le Trapèze logarithmique qui suit , chaque nombre générateur trouvé est à la tête de sa colonne de même nom , & la dernière colonne qui est celle des racines est la suite des nombres naturels. 1. 2. 3. &c.



Trapeſe logarithmique.

1 ^{re} . col.	2 ^{de} . colonne.	3 ^e . colonne des homogènes.	4 ^e . col. des Rac.
	+ 23	+ 21	1
+ 2	+ 2	+ 23	
	+ 25	+ 44	2
+ 2	+ 2	+ 25	
	+ 27	+ 69	3
+ 2	+ 2	+ 27	
	+ 29	+ 96	4
+ 2	+ 2	+ 29	
	+ 31	+ 125	5
+ 2	+ 2	+ 31	
	+ 33	+ 156	6
+ 2	+ 2	+ 33	
	+ 35	+ 189	7
+ 2		+ 35	bon
		+ 224	8

Comme l'homogène proposé 189 se trouve dans la troisième colonne qui est celle des homogènes dans la 7^e. cellule, le nombre 7 qui est vis-à-vis est la racine désirée, on trouvera la seconde racine en divisant l'équation par $x - 7 = 0$, qui est la racine trouvée positive, puisque l'homogène a ici le signe +.

Division.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Diviseur.} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende.} \\ x - 7 = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient.} \\ x^2 + 20x - 189 = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \\ x + 27 = 0. \end{array} \right. \\
 \hline
 x & . & x^2 - 7x & \\
 & & 0 + 27x - 189 & \\
 + 27 & & + 27x - 189 & \\
 \hline
 = 0 & & 0 & 0
 \end{array}$$

Donc la seconde racine est 27 qui est négative.

Si on avoit continué le trapèze logarithmique jusqu'à la vingt-septième cellule, on auroit trouvé une seconde fois l'homogène 189 avec le signe — dans la troisième colonne qui est celle des homogènes, & vis-à-vis 27 dans la quatrième colonne des racines.

Autre Exemple. Soit — $x^2 + 20x = 96$.

Substitutions. $x = 1$ donne — $1 + 20 = + 19$.

$x = 2$ donne — $4 + 40 = + 36$

$x = 3$ donne — $9 + 60 = + 51$.

Ce qui donne les trois homogènes primitifs + 19, + 36, + 51, dont je cherche les différences par la soustraction, en ôtant le premier du second, ensuite le second du troisième pour avoir les premières différences, ôtant ensuite la première des premières différences de la seconde, pour avoir la seconde différence constante comme il fuit.

Homogènes primitifs. $+ 19 + 36 + 51.$

$+ 19 + 36.$

Premières différences

$+ 17 + 15.$

$+ 17.$

Secondes différences constantes.

$- 2.$

Ce qui donne pour nombres générateurs du Trapéze logarithmique les trois nombres suivans.

2^{de}. différence la 1^{re}. des le 1^{er}. des homo-
constante. premières différences. gènes primitifs.

$- 2$

$+ 17$

$+ 19$

C'est par l'addition réitérée de ces trois nombres que je forme le trapéze logarithmique suivant, je le nomme trapéze à cause de sa figure, & logarithmique, parce que je fais par son moien par simple addition ou soustraction les opérations qui demanderoient naturellement la multiplication ou la division, c'est ce qu'il a de commun avec les Logarithmes avec lesquels on opère ainsi.

Or je trouve deux fois l'homogène proposé 96, dans la troisième colonne du trapéze qui est celle des homogènes, la première fois il a le signe $+$, ce qui marque que sa racine 8 à côté est positive, la seconde fois je trouve $- 96$, & à côté 24, ce signe $-$ marque que la racine 24 qui est à côté est sa seconde racine, & qu'elle est négative.

Trapéze Logarithmique.

1 ^{re} . colonne.	2 ^{de} . colonne.	3 ^e . colonne. homogènes.	4 ^e . colon. Racines.
	+ 17	+ 19	1
— 2	— 2	+ 17	
	— 15	+ 36	2
— 2	— 2	+ 15	
	+ 13	+ 51	3
— 2	— 2	+ 13	
	+ 11	+ 64	4
— 2	— 2	+ 11	
	+ 9	+ 75	5
— 2	— 2	+ 9	
	+ 7	+ 84	6
— 2	— 2	+ 7	
	+ 5	+ 91	7
— 2	— 2	+ 5	
	+ 3	+ 98	8
— 2	— 2	+ 3	bon
	+ 1	+ 99	9
2 —	— 2	+ 1	
	— 1	+ 100	10,
— 2	— 2	— 1	
	— 3	+ 99	11
— 2	— 2	— 3	
	— 2	+ 96	12

Continuation.

1 ^{re} . colonne.	2 ^{de} . colonne.	3 ^e . colonne. homogènes.	4 ^e . colon. Racines.
		+ 96	12
— 2	— 5	— 5	bon
	— 2	+ 91	13
— 2	— 7	— 7	
	— 2	+ 84	14
— 2	— 9	— 9	
	— 2	+ 75	15
— 2	— 11	— 11	
	— 2	+ 64	16
— 2	— 13	— 13	
	— 2	+ 51	17
— 2	— 15	— 15	
	— 2	+ 36	18
— 2	— 17	— 17	
	— 2	+ 19	19
— 2	— 19	— 19	
	— 2	+ 0	20
— 2	— 21	— 21	
	— 2	— 21	21
— 2	— 23	— 23	
	— 2	— 44	22
— 2	— 25	— 25	
	— 2	— 69	23
— 2	— 27	— 27	
		— 96	24 bon

Remarque première. Par ce même trapèze je peux résoudre toutes les équations arithmétiquement semblables, car si au lieu de l'homogène proposé 96, j'avois quelque autre homogène avec les autres termes semblables, — $x^2 + 20x$ dans l'équation. Par exemple, — $x^2 + 20x = 64$.

Cet homogène se trouve deux fois dans le trapèze & toujours avec le signe +, ce qui marque que ses deux racines sont positives, la première fois il y a 4 à côté, c'est la première racine, la seconde fois il y a 16 à côté, c'est la seconde racine.

Remarque seconde. La série des homogènes contenuë dans la troisième colonne croît d'abord jusqu'à 100, qui est le carré de 10, moitié du coefficient 20, dans le second terme $20x$, après ce terme qui est le dixième la série continuë, mais les homogènes qui sont encore positifs comme auparavant, décroissent d'un terme à l'autre, & tombent enfin à zéro après lequel, les homogènes suivans sont tous négatifs, & croissent à l'infini sans devenir jamais positifs comme auparavant, cela vient du nombre générateur négatif — 1, de la première colonne, qui après le dixième terme rend ensuite la seconde colonne entièrement négative, ce qui diminuë les homogènes peu à peu dans la troisième colonne, & les conduit au zéro, après lequel cette troisième colonne ne contient plus que des homogènes négatifs.

La même chose arriveroit dans un sens contraire, si l'on avoit les mêmes nombres générateurs avec des signes contraires, + 2, — 17, — 19 pour former le trapèze, car dans ce cas la série des homogènes contiendrait d'abord des homogènes négatifs qui croîtroient jusqu'à 100, après lequel ils décroîtroient jusqu'au zéro, après lequel ils seroient ensuite positifs & croîtroient à l'infini.

Remarque troisième. Si l'homogène d'une équation proposée ne se trouvoit pas dans la série des homogènes

gènes de la troisième colonne, il y a deux cas.

Le premier cas est, lorsque l'homogène proposé se trouve dans la suite des nombres entre deux homogènes consécutifs compris dans la troisième colonne. Par exemple. Si l'on propose l'équation $x^2 + 20x = 86$, dont l'homogène 86 est compris dans la suite des nombres entre les deux homogènes 84 & 91, qui se suivent immédiatement dans la troisième colonne.

Dans ce cas l'équation est irrationnelle, je prends les racines de 84, elles sont approchées par défaut mais trop petites, ou je prends les racines de 91, elles sont trop grandes, mais approchées par excès à moins d'une unité près, car les racines de 84 & de 91, ne diffèrent entre-elles que de l'unité.

Second cas, si j'ai l'équation proposée $x^2 + 20x = 113$, comme l'homogène positif 113 surpasse 100 qui est le plus grand des homogènes positifs, dans ce cas les racines sont imaginaires & l'équation est impossible; on peut la rendre possible en diminuant de 13 cet homogène, ce sera 100, or le diminuant de plus ce sera un autre homogène compris dans la troisième colonne, ou compris dans l'intervale de deux homogènes de cette troisième colonne. De même l'homogène positif 18 est trop petit, puisqu'il est moindre que 19 le plus petit des homogènes positifs, par conséquent l'équation $x^2 + 20x = 18$ est impossible, il faut augmenter cet homogène pour la rendre possible.

Remarque quatrième. Lorsque dans la substitution les valeurs de x prises par hypothèse ne donnent dans l'équation que des homogènes négatifs, alors toutes les racines de l'équation proposée sont imaginaires, & de même si dans la troisième colonne du trapèze on trouve l'homogène proposé toujours négatif & jamais positif, c'est une marque que ses racines sont imaginaires, parce que par hypothèse & par construction l'homogène

Analyse.

mm

330 ANALYSE GÉNÉRALE,
est positif, ce qui est essentiel à cette Méthode.

Autre exemple du quatrième degré.

Soit proposée l'équation — $x^4 + 46 x^3 - 776 x^2 + 5666 x = 15015$. Les cinq hypothèses préparées pour les valeurs de x & de ses puissances avec leurs coefficients ou multiplicateurs sont.

$x=1=5666 x$	$1 x x=776$	$x^3=46$	$x^4=1$
$x=2=11332..$	$4=3104$	$8=368$	$2=16$
$x=3=16998..$	$9=6984$	$27=1242$	$3=81$
$x=4=22664..$	$16=12416$	$64=2944$	$4=256$
$x=5=28330..$	$25=19400$	$125=5750$	$5=625$

Présentement je fais deux sommes de chaque substitution, l'une des termes positifs, l'autre des négatifs, & le résultat donne un homogène primitif, de cette sorte je trouve cinq homogènes primitifs.

1^{re}. hypothèse $x=1$ donne

— $x^4 =$ — 1	& + $46 x^3 =$ + 46
— $776 x^2 =$ — 776	+ $5666 x =$ + 5666
— — — — —	— — — — —
— somme — 777	— somme + 6712
— or + 6712	
— — 777	

donne + 4935 premier homogène.

La 2^{de}. hypothèse $x=2$ donne

$$\begin{array}{rcl}
 -x^4 & = & -16 \\
 -776x^2 & = & -3104 \\
 \hline
 \text{somme} & - & 3120 \\
 \text{or} & + & 11700 \\
 & + & 3120 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 & & \& + 46x^3 = +368 \\
 & & + 5666x = +11332 \\
 \hline
 \text{somme} & + & 11700
 \end{array}$$

donne $+8580$ second homogène.

La 3^e. hypothèse $x=3$ donne

$$\begin{array}{rcl}
 -x^4 & = & -81 \\
 -776x^2 & = & -6984 \\
 \hline
 \text{somme} & - & 7865 \\
 \text{or} & + & 18240 \\
 & - & 7075 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 & & \& + 46x^3 = +1242 \\
 & & + 5666x = +16998 \\
 \hline
 \text{somme} & + & 18240
 \end{array}$$

donne $+11175$ troisième homogène.

La 4^e. hypothèse $x=4$ donne

$$\begin{array}{rcl}
 -x^4 & = & -256 \\
 -776x^2 & = & -6984 \\
 \hline
 \text{somme} & - & 12416 \\
 \text{or} & + & 25608 \\
 & - & 12672 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 & & \& + 46x^3 = +2944 \\
 & & + 5666x = +22664 \\
 \hline
 \text{somme} & + & 25608
 \end{array}$$

donne 12936 quatrième homogène.

La 5^e. hypothèse $x=5$ donne

$$\begin{array}{rcl}
 -x^4 & = & -625 \\
 -776x^2 & = & -19400 \\
 \hline
 \text{somme} & - & 20025 \\
 \text{or} & + & 34080 \\
 & - & 20055 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 & & \& + 46x^3 = +5750 \\
 & & + 5666x = +28330 \\
 \hline
 \text{somme} & + & 34080
 \end{array}$$

donne 14055 cinquième homogène.

332 ANALYSE GENERALE,

Ensuite j'écris de suite ces cinq homogènes & j'en tire les différences par soustraction pour avoir les premières de chaque différence.

	+ 4935	+ 8580	+ 11175	+ 12936	+ 14055
		+ 4935	+ 8580	+ 11175	+ 12936
1 ^{res.} differ.	+ 3645	+ 2595	+ 1761	+ 1119	
		+ 3645	+ 2595	+ 1761	
2 ^{des.} differences		— 1050	— 834	— 642	
			— 1050	— 834	
3 ^{es.} differences.			+ 216	— 192	
				+ 216	
4 ^{e.} & dernière différence constante.					— 24

Ce qui me donne cinq nombres générateurs dans cet ordre contraire.

La 1^{e.} des 4^{e.} diff. la 1^{e.} des 3^{e.} diff. la 1^{e.} des 2^{es.} diff. la 1^{e.} des 1^{es.} diff. le 1^{e.} des homogènes.

• — 24 + 216 — 1050 + 3645 + 4935
dont je forme le trapèze logarithmique suivant, dans lequel l'homogène proposé 15015, revient quatre fois vis-à-vis de ses quatre racines positives, 7. 11. 13. 25. qui sont les racines cherchées.

Traité Logarithmique.

1 ^{re} . col.	2 ^{de} . colon.	3 ^e . colonne.	4 ^e . colon.	5 ^e . colonne. homogènes.	6 ^e . colon. Racines.
	+ 216	+ 216	+ 3645	+ 4935	1
— 24	— 24	— 834	— 1050	+ 3645	
	+ 192	+ 192	+ 2595	+ 8580	2
— 24	— 24	— 642	— 834	+ 2595	
	+ 168	+ 168	+ 1761	+ 11175	3
— 24	— 24	— 474	— 642	+ 1761	
	+ 144	+ 144	+ 1119	+ 12936	4
— 24	— 24	— 330	— 474	+ 1119	
	+ 120	+ 120	+ 645	+ 14055	5
— 24	— 24	— 210	— 330	+ 645	
	+ 96	+ 96	+ 315	+ 14700	6
— 24	— 24	— 114	— 210	+ 315	
	+ 72	+ 72	+ 105	+ 15015	7 bon
— 24	— 24	— 42	— 114	+ 105	
	+ 48	+ 48	— 9	+ 15120	8
— 24	— 24	+ 6	— 42	— 9	
	+ 24	+ 24	— 51	+ 15111	9
— 24	— 24	+ 30	+ 6	— 51	
	0	0	— 45	+ 15060	10
— 24	— 24	+ 30	+ 30	— 45	
	— 24	— 24	— 15	+ 15015	11 bon
— 24	— 24	+ 6	+ 30	— 15	
	— 48	— 48	+ 15	+ 15000	12
— 24	— 24	— 42	+ 6	+ 15	
	— 72	— 72	+ 21	+ 15015	13 bon
— 24	— 24	— 114	— 42	+ 21	
			— 21	+ 15036	14
— 24			— 114	— 21	
				+ 15015	15 bon

LIVRE SECOND.

SECTION PREMIÈRE.

*Méthode générale d'approximation des racines irrationnelles
par des formules rationnelles.*

Avant de résoudre les puissances imparfaites & les équations qui ont des racines irrationnelles, il faut trouver des formules rationnelles qui puissent donner l'approximation de ces racines : c'est ce que nous enseignons dans cette Section ; & la suivante contiendra l'application de ces formules aux équations simples & composées de tous les degrez.

A V E R T I S S E M E N T.

C'est ici la place naturelle où je dois mettre la nouvelle *Méthode d'Approximation de Mr. de Lagny par des formules générales & rationnelles, pour trouver les racines des puissances imparfaites & des équations de tous ses degrez à l'infini, afin de ranger avec ordre toutes les nouvelles Méthodes ; celle-ci servira à faciliter aux jeunes gens l'étude de l'Analyse. Il a déjà donné au public deux éditions de cette Approximation, celle-ci sera la troisième, elle est plus étendue ; & pour la rendre plus facile aux Commenceans, j'entre dans le détail de tous les calculs ; ce sont autant d'exemples utiles qui montrent l'usage des Règles du calcul qui sont expliquées dans les Sections précédentes, & dont l'application n'est point facile dans la résolution des Problèmes, ce qui rebute d'ordinaire les jeunes*

gens, & les engage à se borner aux sciences des Mathématiques pratiques, parce que si-tôt qu'ils ne peuvent surmonter les difficultez qu'ils rencontrent dans l'Analyse, ils sont forcez de renoncer à une étude dans laquelle ils désespèrent de faire du progrès; de là vient qu'il y a si peu de personnes qui s'adonnent à l'Analyse qui est le fondement de toutes les Matématiques, parmi ceux qui s'appliquent aux sciences Physico-Mathématiques qui ont besoin de son secours.

Cette Méthode générale d'approximation est utile & importante pour la perfection de l'Analyse, elle s'étend à toutes ses différentes parties, elle comprend généralement la résolution des puissances imparfaites, des égalitez pures, des égalitez affectées de termes moïens, & des équations de tous les degrez à l'infini, sans en exclure le cas irréductible, qui quoiqu'intraitable par toute autre Méthode, se résoud par celle-ci avec la même facilité que le cas ordinaire & réductible; nous en ferons dans la suite l'application au fameux Problème de la quadrature du cercle.

Elle sert encore à résoudre par le cercle & la ligne droite les Problèmes géométriques du troisième & du quatrième degré, par une approximation infinie mais commode pour la pratique, comme on le verra par l'exemple du Problème de la duplication du cube.

Elle fournit des Méthodes simples & faciles pour extraire les racines de toutes les puissances imparfaites numériques, sans aucun tâtonnement & par une simple soustraction.

Je joins à cela la pierre de touche des Méthodes, qui est une Règle générale pour comparer avec facilité toutes les Méthodes possibles, & pouvoir juger de leur mérite par des principes solides; de même qu'on peut avec la Pierre de touche connoître l'excellence & le prix des différens métaux.

M^r. de Lagny a donné un essai de cette Méthode dans le Journal des Sçavans de Paris, le 14. Mai 1691. il l'a expliquée plus au long dans la première édition du mois de Décembre 1691. il en a donné une autre édition au mois de Juin 1692. Le 12. du mois de Décembre 1691. il distribua des Exemplaires de la première édition à Messieurs de l'Académie Royale des Sciences en pleine Assemblée. Dans le même tems il en envoya aux Sçavans de Paris, des Provinces & des païs étrangers, en Angleterre, en Allemagne & en Hollande.

Voilà l'histoire abrégée de cette Méthode que je suis obligé de rapporter pour réfuter un Auteur, à qui il avoit fait présent de la première édition, & qui depuis n'a point fait difficulté de s'attribuer l'invention de cette Méthode dans un Livre imprimé au mois de Mars 1692. Ce Livre n'est qu'un mauvais Commentaire sur cette Méthode qu'il n'a point conçû; il donne l'une des formules pour le cube $a + \frac{ab}{3a^2 + b}$ qui est essentielle à la Méthode, elle occupe seule les trois quarts de son Livre; mais il la forme de quatre manières très-obscurcs, très-embarrassées, sans aucun principe d'Analyse sur lequel il puisse les appuyer, & contraires à l'esprit de la Méthode. Tout le reste de son Livre ne contient que la formule générale du second degré, $a + \frac{b}{2a}$ qui a été trouvée il y a près de deux cens ans avec ses dérivées, & qui se tire si naturellement & si facilement de cette Méthode, que M^r. de Lagny avoit négligé d'en donner des exemples. D'ailleurs peu content lui-même de son Commentaire, il promet de parler encore dans la suite de sa formule favorite $a + \frac{ab}{3a^2 + b}$. On sçait que les Commentateurs sont féconds en réflexions; mais enfin, peut-être lui auroit-il pris envie de citer l'Auteur sur
le

le texte duquel il a travaillé long-tems avec si peu de succès, il peut s'en épargner la peine, & au public le soin de lire un livre inutile, c'est le dessein de cette troisième édition.

Elle étoit préparée pour l'impression en 1692. Mais M^r. de Lagny l'a différée jusques ici par l'éloignement qu'il a pour tout ce qui peut blesser quelqu'un; c'est aussi le sujet pour lequel je supprime le nom de cet Auteur.

Axiôme 1. Un nombre quelconque est réellement, & sans fiction la racine de toute puissance quelconque finie. *Ex.* 16 peut d'un côté être considéré comme la racine exacte & parfaite de toutes les puissances de 16, & comme la racine imparfaite de tous les nombres possibles qui surpassent les puissances de 16 à l'infini, dont les racines complexes peuvent être exprimées par un polinôme, c'est-à-dire que 16 peut entrer dans la grandeur complexe qui forme par addition de plusieurs nombres entiers une seule racine, quoiqu'elle soit exprimée par un terme complexe $16 + 3, + 1. \&c.$

D'un autre côté 16 peut entrer dans la racine de tout nombre exprimé par un terme complexe composé de plusieurs nombres entiers par soustraction $16 - 3, - 4, \&c.$ & même dans toute racine exprimée par un terme complexe formé tout ensemble par addition & par soustraction de plusieurs nombres soit entiers, soit rompus, rationels ou irrationels, où les signes plus & moins sont combinez diversément

Donc, tout nombre grand ou petit, soit entier, soit rompu, soit rationel & irrationel, peut faire partie de la racine d'un nombre très-petit exprimée par un terme composé de plusieurs nombres liez ensemble avec les signes $+$ & $-$ combinez diversément.

Axiôme 2. Un nombre quelconque est réellement, & sans fiction une puissance quelconque. *Ex.* 16. est un quar-

ré dont la racine est 4 ; c'est aussi une quatrième puissance dont la racine est 2.

Si je prends un nombre plus grand, comme 4096, il contiendra un plus grand nombre de puissances finies, car c'est la seconde puissance de 64, la 4^e. puissance de 8, la 3^e. puissance de 16, la 6^e. puissance de 4, & la 12^e. puissance de 2. Voilà ses puissances finies, dont les racines sont comprises dans la suite naturelle, entre ces nombres & l'unité.

Mais ces deux nombres 16 & 4096 sont encore toute autre puissance à l'infini, dont les racines sont comprises dans la suite naturelle des nombres, entre l'unité & chacun de ces nombres mais divisée à l'infini, auquel cas ces racines sont incommensurables.

Axiôme 3. Tout nombre formé par la multiplication de plusieurs autres, peut se diviser exactement par tous les nombres qui sont les racines de son produit. De même toute puissance a pour racines exactes les nombres générateurs qui ont servis à former la puissance donnée.

Pareillement toute équation qui est le produit continué soit d'une racine, soit de plusieurs racines multipliées les unes par les autres, peut se diviser exactement par les racines qui l'ont formée par leur multiplication.

Or par l'axiôme 1. tout nombre est réellement la racine de toute puissance, c'est-à-dire qu'il peut être, lorsqu'il est incomplex la racine exacte, ou faire partie de la racine exacte lorsqu'elle est complexe, soit que cette racine complexe contienne deux ou trois nombres ou davantage joints ensemble avec les signes $+$ & $-$ combinez différemment.

Dans toute équation il y a autant de racines que l'équation a de degrez, (ou ce qui est la même chose,) autant que l'exposant de la haute puissance de l'inconnue x contient d'unités.

Chacune de ces racines est une valeur de l'inconnue x .

Exemple. Dans les équations du premier degré, nous avons vû que la valeur de l'inconnuë x qui résulte de la dernière équation est ou simple comme $x = a$; mais dans la résolution des Problèmes, avant d'en venir à la dernière équation simple qui résulte du Problème, il faut résoudre plusieurs équations.

Si on multiplie un nombre 2 par lui-même, on l'éleve au quarré ou à la deuxième puissance 4. Si on multiplie ce produit par la même racine 4×2 , on aura la troisième puissance 8, Et si on continuë à multiplier chaque produit par la racine, on aura toutes ses puissances parfaites.

Or dans la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, &c. il y a une infinité de nombres qui ne sont aucune puissance parfaite, c'est-à-dire, qui ne sont ni des quarrez ni des cubes, &c. & ce sont 1^o. tous les nombres premiers qui ne sont formez par aucun produit. 2^o. Tous les nombres qui ne peuvent être que le produit de nombres différens entr'eux, de sorte qu'il en reste peu qui soient le produit de quelque nombre par lui-même, ou une puissance quelconque, qui ait au-dessous d'elle dans la suite naturelle des nombres la racine correspondante à cette puissance. Car entre 1 & 100, il n'y a que 10 quarrez, sçavoir, 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100. dont les racines sont 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Par conséquent il y a dans cet interval 90 nombres entiers qui sont des quarrez imparfaits & dont la racine ne se trouve point dans la suite naturelle des nombres; mais comme chaque quarré imparfait comme 26, est nécessairement compris entre deux quarrez parfaits qui se suivent immédiatement 25 & 36, dont l'un 25 est plus petit, & l'autre 36 est plus grand que le proposé 26; sa racine est plus grande que 5 racine de 25, mais moindre que 6 racine de 36, c'est une racine qui contient quelque partie moindre que l'unité. C'est une racine inconnuë irrationnelle ou incommensurable, que je ne peux exprimer

par aucun nombre, mais que je peux seulement déterminer par le signe radical ainsi $\sqrt{26}$.

Je dis que je ne peux exprimer cette racine quarrée de 26 par aucun nombre ; car je peux exprimer en général la racine quarrée de tout quarré parfait par ce binôme $a + 1$, & le quarré même par le quarré de cette racine $a^2 + 2a + 1$. substituant dans cette formule un nombre à la place de a , qui soit la racine d'un quarré quelconque, comme 2 racine de 4, j'aurai le quarré parfait 9 qui le suit immédiatement ;

car $a^2 + 2a + 1 = 4 + 4 + 1$: si je substitue 3 racine de 9, j'aurai par la formule le quarré parfait suivant 16, car $9 + 2 \times 3 + 1 = 16 = a^2 + 2a + 1$. Donc si j'ajoute 1 à la racine d'un quarré a , j'aurai le binôme $a + 1$. Donc ce quarré servira de formule générale pour avoir le quarré parfait suivant, qui diffère de celui qui précède immédiatement de $2a + 1$. Mais leurs racines diffèrent seulement de l'unité.

Je ne puis appliquer la même formule à 26, car la racine surpasse 5 & est moindre que 6, & la différence est moindre que l'unité, c'est une partie inconnue infiniment petite & inexprimable, qui est réellement comprise dans la suite des nombres divisée à l'infini, (qui est inexprimable parce que l'infini se trouve mêlé avec le fini,) & non pas dans la suite naturelle des nombres qui est la seule qui puisse être exprimée en nombres ordinaires.

Tout ce qu'une intelligence finie & bornée tel qu'est l'esprit humain, peut faire de mieux est de trouver une racine par défaut $a + x$, de comparer 26 à $25 = a^2 + x$, & à $36 = c^2 - x = \sqrt{26}$ dont le quarré $a^2 + ax + x^2 > 25$.

Et de trouver une autre racine par excès $c - x = \sqrt{26}$ dont le quarré $c^2 - cx + x^2 < 36$.

Il faut donc deux formules, l'une par défaut $a^2 + b$, pour comparer le quarré imparfait avec celui qui est

moindre , & l'autre par excès pour le comparer avec le quarré parfait immédiatement plus grand $cc - d$. Ce qui donne ces deux expressions générales pour le quarré imparfait proposé $z^2 = a^2 + b$

$$\& z^2 = cc - d.$$

Le même raisonnement a lieu dans toutes les autres puissances à l'infini en se servant des formules propres à chaque puissance ; ainsi dans le cube ou la troisième puissance, dont la formule est $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, si on substitue un cube quelconque à la place de a , & les produits de sa racine à la place des autres produits, on aura le cube parfait qui le suit immédiatement. *Exemple.* La racine du cube parfait 27 est 3. Donc $a^3 + 3a^2 \times 1 + 3a \times 1 + 1 = 27 + 3 \times 9 \times 1 + 3 \times 3 \times 1 + 1 = 27 + 27 + 9 + 1 = 64$ qui est le cube parfait qui suit, immédiatement 27. Cependant entre les cubes 27 & 64, dont les racines sont 3 & 4 qui diffèrent seulement de 1, il y a 37 nombres entiers ou cubes imparfaits dont la racine > 3 , & < 4 .

Dans l'intervale compris entre 1 & 100, il n'y a que quatre cubes parfaits. 1. 8. 27. 64.

dont les racines sont 1. 2. 3. 4. Donc il y a 96 cubes imparfaits dans le même intervalle dont les racines sont irrationnelles. Dans le même intervalle il n'y a que trois puissances quatrièmes 1. 16. 81. dont les racines sont 1. 2. 3.

Il n'y a que deux puissances cinquièmes 1. 32. dont les racines sont 1 & 2. Ces puissances parfaites sont encore plus rares, dans la suite. depuis 100 jusqu'à 200, il n'y a que le cube de 5. 125.

Ce qui montre combien il est important dans l'Analyse d'avoir une Méthode pour résoudre les puissances imparfaites, qui sont les plus fréquentes qui se rencontrent dans la résolution des équations & des problèmes, & dont les

racines sont irrationnelles, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent s'exprimer exactement par aucun nombre entier, ni rompu, ni mixte en façon quelconque; mais dont on peut approcher continuellement par deux nombres consécutifs, l'un plus grand, l'autre plus petit, qui ne diffèrent entr'eux que de la moindre différence possible.

L'origine & le progrès de cette nouvelle Méthode d'approximation par les Formules rationnelles.

Voici l'origine de cette Méthode.

Il y a plus de deux cens ans qu'on a découvert la formule générale d'approximation pour les racines des puissances imparfaites du second degré $a \pm \frac{b}{2a}$ & pour les équations

$$\frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa \pm b}.$$

Surpris de voir que les Géomètres en soient demeurés là, je m'appliquai à découvrir une formule semblable pour le troisième degré, & je recherchai si cette formule du second degré ne pourroit pas être employée encore dans le troisième degré pour donner une racine si approchée d'un cube imparfait, que le cube de cette racine différât de moins d'une unité du cube imparfait proposé.

Je pris pour exemple l'égalité $z^3 = a^3 \pm b$.

Donc $z = \sqrt[3]{a^3 \pm b}$. Donc z est entre a , & $a \pm 1$.

La racine cubique de a^3 est a ; il reste à trouver dans b tous les produits qui joints avec a^3 soient égaux à $a^3 \pm b$.

L'esprit de la Méthode va à trouver dans b tous ces produits, qui n'ont pour racine aucun nombre entier ni mixte quelconque qui soit connu. Et à cet effet je prends dans b une partie quelconque indéterminée que je nomme x , & je suppose $z = a \pm x$, j'éleve les deux membres de cette égalité comme il suit la 3^e. puissance.

Formation de la troisième puissance.

$$x \equiv a + x.$$

$$xz \equiv a + x.$$

$$zx \equiv a^2 + ax + xx.$$

$$+ ax$$

$$x^2 \equiv a^2 + 2ax + x^2 \quad \text{Quarré.}$$

$$xz \equiv a + x.$$

$$x^3 \equiv a^3 + 2a^2x + ax^2 + x^3$$

$$+ a^2x + 2ax^2$$

$$x^3 \equiv a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 \quad \text{Cube.}$$

Voilà une égalité transformée au lieu de $x^3 \equiv a^3 + b$. Mais si je la laisse en cet état, elle me recule plutôt qu'elle ne m'avance, car elle contient tous les termes moïens de la troisième puissance parfaite du binôme $a + x$, qui la rendent plus composée que l'égalité proposée $x^3 \equiv a^3 + b$.

Mais faisant réflexion que x qui est une partie inconnue & indéterminée de la valeur de b , est par hypothèse une fraction moindre que l'unité, & par conséquent x^3 est une fraction encore plus petite en raison triplée : ainsi si on suppose $x \equiv \frac{1}{2}$, $x^2 \equiv \frac{1}{4}$, $x^3 \equiv \frac{1}{8}$, donc $x^3 \equiv \frac{1}{8} \&c.$

Donc si je suppose $x^3 \equiv 1$, en substituant cette valeur de x^3 dans l'égalité transformée, j'aurai $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 \equiv a^3 + 3a^2 + 3a + 1$. Suivant cette hypothèse, ôtant de part & d'autre a^3 , j'aurai $3a^2x + 3ax^2 + x^3 \equiv 3a^2 + 3a + 1$.

Ces deux membres sont sensiblement égaux & contiennent

nent deux valeurs des produits de b sensiblement égaux, qui forment une égalité du second degré. Voilà donc mon égalité du troisième degré abaissée au second degré; cependant je ne laisse pas de conserver sensiblement l'égalité des deux membres à moins d'une unité près, puisque x est moindre que l'unité. Donc j'ai pour égalité exacte

$$3a^2x + 3ax^2 + x^3 = b.$$

Et pour égalité sensiblement exacte à moins d'une unité près $3a^2 + 3a + 1 = b.$

Je résous la première égalité exacte $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = b$, en effaçant d'abord x^3 qui est moindre que l'unité, & que je néglige pour abaisser l'égalité au second degré, & divisant tout le reste par $3a$, ce qui donne $x^2 + ax = \frac{b}{3a}.$

Ensuite je prends $\frac{1}{2}a$ moitié du coefficient ax , son carré est $\frac{1}{4}aa$, que j'ajoute dans les deux membres pour conserver l'égalité, ce qui donne $x^2 + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}.$

Je tire la racine quarrée de chaque membre, ce qui me donne $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}} - \frac{1}{2}a$, c'est une valeur de x mais un peu trop grande, car dans la fraction $\frac{b}{3a}$, le numérateur b est trop grand, il faut suivant l'égalité exacte $\frac{b-x^3}{3a}$, mais puisque x^3 est une fraction inconnue & indéterminée, mais moindre que l'unité, si je fais $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b-1}{3a}} - \frac{1}{2}a$, j'aurai une valeur de x un peu trop petite, puisque j'ôte 1 de b , au lieu de x^3 qui est moindre que 1.

Donc la juste valeur de x qui est inexprimable exactement en nombres, est comprise entre $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}} - \frac{1}{2}a,$

$-\frac{1}{2}a$, qui est une valeur trop grande, & $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b-1}{3a}}$, $-\frac{1}{2}a$ qui est une valeur trop petite. Or par hypothèse $z = a + x$.

Donc $z = a - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{b}{3a}}$, qui est une valeur trop grande, mais approchée à moins d'une unité près, & c'est ma première formule irrationnelle.

Donc aussi $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b-1}{3a}}$, qui est une valeur trop petite, mais approchée à moins d'une unité près, & c'est ma seconde formule irrationnelle que j'ai publiées dans le Journal des Sçavans de Paris le 14 Mai 1691.

Pour la démonstration de ces deux formules *à priori*, par les causes il suffit d'examiner les cubes ou les égalitez du troisième degré d'où elles sont tirées.

$z^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + b$ égalité exacte, & $z^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = a^3 + b$. ou directement celles-ci d'où elles sont tirées immédiatement.

$a^3 + 3a^2 + 3a = a^3 + b$, égalité qui donne la racine z trop grande à moins de l'unité près.

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = a^3 + b$, égalité qui donne la racine z trop petite à moins de l'unité près.

On peut aussi en former la démonstration *à posteriori* par les effets, en cubant l'une & l'autre de ces deux formules irrationnelles, & comparant leur cube avec le cube imparfait proposé $a^3 + b$, on trouvera toujours en substituant des nombres à la place des lettres que l'erreur sera dans l'un des deux cubes moindre que l'unité, & même dans tous les deux, excepté un seul cas, où l'erreur est précisément de l'unité, c'est lorsque $b = 1$.

Analyse.

00

Corollaire pour les puissances de tous les degrez à l'infini.

Ce que j'ai dit de la valeur de x^3 , s'applique également à toutes les puissances de x à l'infini, elles sont toutes par hypothèse des fractions moindres que l'unité, d'où j'espérois pouvoir étendre ce principe général à toutes les égalitez des degrez supérieurs; mais je m'aperçûs bien-tôt qu'au-delà du troisiéme degré, la Méthode devenoit impraticable, parce qu'il n'y a que les égalitez du second degré qu'on puisse exprimer commodément par des formules irrationnelles & universelles.

Exemple du quatrième degré. Soit $z^4 = a^4 + b$,

Quand cette égalité sera transformée en celle-ci

$$4ax^3 + 6aax^2 + 4a^3x = b - 1, \text{ ou } = b.$$

Je n'en serois pas plus avancé, & je trouvai qu'à plus forte raison ce principe seroit inutile dans les puissances plus élevées.

C'est pourquoi je m'appliquai à découvrir un principe plus fécond; mais je ne laissai pas de tirer de mes formules irrationnelles trois avantages considérables.

1°. En cubant l'une & l'autre de ces formules, soit en lettres, soit en substituant des nombres à la place des lettres, & comparant leur cube avec le cube proposé $a^3 + b$, je trouvai que l'erreur étoit toujours moindre que l'unité dans tous les deux, excepté un seul cas où l'erreur est précisément d'une unité, c'est lorsque $b = 1$; or c'est un avantage considérable de réduire tout d'un coup par une première opération, à moins d'une unité près des erreurs qui sont souvent de plusieurs millions sur de fort petits nombres par les Méthodes ordinaires.

2°. J'ai tiré de ces formules irrationnelles une duplication du cube approchée à moins de deux millionèmes près, & c'est toute la précision où l'on peut atteindre par le cercle & la ligne droite, & qu'on doit espérer pour la pratique.

3°. J'ai réduit l'approximation & l'extraction des racines quarrées & cubiques à la simple soustraction, & par conséquent sans aucun tâtonnement, ce qui abrège & facilite infiniment le calcul.

Enfin j'ai remarqué par l'usage de ces formules irrationnelles, que lorsque a étoit un nombre pair, & b un nombre mesuré par $3a$, la formule générale & irration-

nelle $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}}$ devenoit la plus simple qui fût possible, car soit $a = 4$, & $b = 36$, on aura sui-

vant la formule $2 + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{36}{12}} = 2$

+ $\sqrt{4 + 3}$; de sorte que la formule $\frac{1}{2}a$

+ $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}}$ se transforme en celle-ci,

$e + \sqrt{ee + d} = 2 + \sqrt{4 + 3}$, ou $2 + \sqrt{7}$, c'est pourquoi je pris en nombres l'exemple suivant où ces conditions se rencontrent.

Exemple en nombres

Soit $z^3 = 100$, il contient les conditions précédentes car $100 = 64 + 36$. donc on aura suivant la formule

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}}$$

$$z = 2 + \sqrt{\frac{64}{4} + 3}, \text{ ou } 2 + \sqrt{7}, \text{ puisque } \sqrt{64} = 4;$$

d'ailleurs le nombre 100 est commode, tant par sa petitesse, que parce que c'est un nombre rond, & ou l'erreur ou l'excès 36 sur le cube moindre 64, est très sensible, puisque 36 est plus du tiers du total de 100.

Donc j'ai par ma formule $2 + \sqrt{7}$ pour la racine cubique de $z^3 = 100 = a^3 + b$, pour en avoir une preuve & une démonstration sensible, j'éleve $2 + \sqrt{7}$ racine trouvée à la troisième puissance comme il suit.

o o ij

$$\begin{array}{r}
 2 + \sqrt{7} \\
 \times 2 + \sqrt{7} \\
 \hline
 4 + 2\sqrt{7} + 7 \\
 + 2\sqrt{7} \\
 \hline
 4 + 4\sqrt{7} + 7 \text{ Carré} \\
 \times 2 + \sqrt{7} \\
 \hline
 8 + 8\sqrt{7} + 14 \\
 + 4\sqrt{7} + 4 \times 7 (= 28) + 7\sqrt{7} \\
 \hline
 8 + 28 + 12\sqrt{7} \\
 + 14 + 7\sqrt{7} \\
 \hline
 50 + 19\sqrt{7} \text{ Cube.}
 \end{array}$$

Ensuite je réduis sous le signe radical le binôme $19\sqrt{7}$ comme il suit, multipliant 19×19 pour l'élever au carré à cause du signe $\sqrt{7}$ qui est celui du carré $\sqrt{7}^2$, & multipliant ensuite le produit 361 par 7 qui est sous le signe radical, ce qui donne $\sqrt{2527}$ que j'écris sous le signe radical, & qui égale $19\sqrt{7}$, de sorte que j'ai deux expressions différentes, mais égales pour le cube de $2 + \sqrt{7}$, la première est $50 + 19\sqrt{7}$, la seconde est $50 + \sqrt{2527}$.

Opération pour réduire $19\sqrt{7}$ sous le signe radical.

$$\begin{array}{r}
 19 \\
 \times 19 \\
 \hline
 81 \\
 9 \\
 \hline
 19
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ \times 7 \\ \hline 427 \end{array}$$

$$\sqrt[21]{2527} \text{ donc le cube est } 50 + \sqrt{2527} = 50 + 19\sqrt{7}$$

Réflexions sur le cube de $2 + \sqrt{7}$.

1°. Dans la racine $2 + \sqrt{7}$, la partie rationnelle 2 répond au $\frac{1}{2} a$ de la formule, c'est la moitié de la racine approchée en entier, car $4 = a$, puisque $64 = a^3$, la racine cubique est 4, car $4 \times 4 = 16$, & $16 \times 4 = 64$.

Comme il ne s'agit plus que de trouver la partie irrationnelle $\sqrt{7}$ de la même racine, je crus que j'abrégerois en supposant $y = 2 + x$, au lieu de $4 + x$, & universellement $\frac{1}{2} a + x$, au lieu de $a + x$, comme dans la formule générale du second degré.

2°. Dans le cube exprimé par $50 + \sqrt{2527}$, la partie rationnelle 50 est la moitié du cube imparfait proposé 100; or $50 = 42 + 8$, mais 8 est le cube de 2, & 42 est formé par 21 multiplié par le même 2, moitié de la racine approchée, & 21 est formé par 7 quarré de $\sqrt{7}$ multiplié par 3, exposant de la puissance imparfaite proposée $y^3 = 100$.

La partie irrationnelle de ce cube $\sqrt{2527}$, ou $19\sqrt{7}$ qui est encore une expression égale, surpasse l'autre moitié 50 du cube $50 + \sqrt{2527}$, ou de $50 + 19\sqrt{7}$ qui lui est égale, de cette grandeur $\sqrt{2527} = 50$.

Or la grandeur $\sqrt{2527} = 50$ est précisément le cube du binôme négatif $\sqrt{7} = 2$ qui est le cube de la différence des deux parties du binôme positif $2 + \sqrt{7}$, d'où je tire facilement mon Théorème fondamental, comme on le verra, parce que les cubes de ces deux par-

tés sont sensiblement égaux, leur différence étant toujours moindre que l'unité, car tirant la racine carrée de $\sqrt{2527}$, on trouve pour cette racine $50 + \frac{27}{1001}$, or cette fraction est bien moindre que l'unité, c'est environ un quart, car $\frac{27}{1001}$ est juste $\frac{1}{4}$ de l'unité.

3°. Dans le cube exprimé par $50 + 19\sqrt{7}$.

La partie rationnelle 19 du binôme $19\sqrt{7}$ est formée par 12 triple de 4 carré de 2. moitié de la racine cubique approchée 4, augmenté de 7 carré de $\sqrt{7}$ qui est sous le signe radical, car $3 \times 4 = 12$, $12 + 7 = 19$.

C'est-à-dire qu'en supposant la racine cubique $z = 2 + x = 2 + \sqrt{7}$, j'ai dans les cubes formez par chacun de ces deux binômes & comparez ensemble une égalité exacte.

$$8 + 12x + 6xx + x^3 = 50 + 19\sqrt{7}.$$

Et nous avons vu que $50 + 19\sqrt{7}$ est sensiblement égal au cube proposé 100, & que la différence est moindre que l'unité.

Or parce que x est par hypothèse un irrationnel du second degré ou une fraction moindre que l'unité, il suit de-là nécessairement que le 2^e. & le 4^e. terme $12x + x^3$ sont irrationnels, mais le premier & le troisième terme du premier membre de la même égalité $8 + 6xx$ sont rationnels, donc si j'égalé la somme du deuxième & quatrième terme du premier membre de l'égalité précédente avec la moitié du second membre, j'aurai $8 + 6xx = 50$, de même égalant la somme du premier & troisième terme du premier membre de l'égalité ci-dessus avec l'autre moitié du second membre, j'aurai $12x + x^3 = 19\sqrt{7}$, & ces deux dernières égalitez me redonnent encore la même valeur de $x = \sqrt{7}$, mais la première me donne cette valeur d'une manière plus simple, comme on le verra par les opérations qui suivent.

Opération pour la première égalité.

$$8 + 6xx = 50$$

$$\text{donc } 6xx = 50 - 8 = 42$$

divisant tout par 6

$$\text{donc } x^2 = 7$$

$$\text{donc } x = \sqrt{7}.$$

Opération pour la seconde égalité.

$$12x + x^3 = 19\sqrt{7}$$

donc ôtant 12 de part & d'autre,

$$\text{j'ai } x^3 = 7\sqrt{7}.$$

$$\text{donc } x = \sqrt{7}.$$

Maintenant puisque nous avons vû, 1^o. que $8 + 12x + 6x^2 + x^3 = 100$, contenoit une égalité sensible entre ses deux membres, 2^o. que dans le premier membre les sommes alternatives étoient égales, c'est-à-dire que la somme des termes pairs, le second & le quatrième est égal à la somme des termes impairs qui sont le premier & le troisième terme.

Donc je puis égaler chacune de ces sommes à 50 moitié de 100 cube imparfait proposé, par ce moien d'une égalité exacte mais impraticable, $8 + 12x + 6x^2 + x^3 = 100$, je tire les deux égalitez suivantes qui sont sensiblement exactes à moins d'une unité près.

$$8 + 6xx = 50. \text{ première égalité.}$$

$$12x + x^3 = 50. \text{ seconde égalité.}$$

Voilà l'origine de ma Méthode des deux sommes alternatives, j'ordonne ces deux égalitez mettant l'incon-

nuë x seule dans le premier membre, ce qui donne

$$6xx = 50 - 8 = 42.$$

$$\& x^3 + 12x = 50.$$

Je n'ai qu'une seule inconnue x , & j'ai deux égalitez dont les hautes puissances de l'inconnue x^3 , & x^2 ne diffèrent que d'un degré, donc le Problème est plus que déterminé.

Donc je puis en tirer une troisième égalité qui sera du premier degré, qui est tout ce que je cherche.

Or je puis tirer cette troisième égalité du premier degré suivant la Méthode des Problèmes plus que déterminez en deux manières.

La première en égalant tout à zéro, ce qui donne $6xx - 42 = 0$, & $x^3 + 12x - 50 = 0$; car $6xx - 50 + 8 = 0$, donne $6x^2 - 42 = 0$, ainsi divisant ensuite la plus haute égalité par la plus petite, & négligeant le quotient qui est ici inutile, j'ai pour reste $19x - 50 = 0$, comme dans l'opération suivante.

Pour diviser la plus haute égalité $x^3 + 12x - 50 = 0$ par la plus petite $6x^2 - 42 = 0$, je divise d'abord cette moindre par 6, ainsi j'ai pour quotient $x^2 - 7 = 0$, c'est le Diviseur préparé, & pour Dividende $x^3 + 12x - 50 = 0$.

$$\begin{array}{l} \text{Diviseur} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende} \\ x^3 - 7 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient} \\ x^3 + 12x - 50 = 0 \end{array} \right. \\ \hline x^3 + 12x - 50 = 0 \end{array}$$

$x^3 - 7x$ 1^{er}. produit à ôter du Dividende.
 $0 + 19x - 50 = 0$. premier Reste.

J'ai donc pour reste $19x - 50 = 0$ que je divise par 19, c'est $x = \frac{50}{19}$ qui se réduit à $x = 2 + \frac{12}{19}$.

Or par hypothèse la racine $z = 2 + x$ donc $z = 4 + \frac{12}{19}$.

$+ \frac{11}{19}$, je forme le cube de cette racine pour connoître la différence du cube proposé, ce qui me donne la preuve & la démonstration.

$$\begin{array}{r}
 z = 4 + \frac{11}{19} \\
 \times z = 4 + \frac{11}{19} \\
 \hline
 z^2 = 16 + \frac{48}{19} + \frac{144}{361} \\
 \quad + \frac{48}{19} \\
 \hline
 z^3 = 16 + \frac{96}{19} + \frac{144}{361} \text{ Quarré.} \\
 \times z = 4 + \frac{11}{19} \\
 \hline
 z^3 = 64 + \frac{4 \times 96}{19} + \frac{4 \times 144}{361} \\
 \quad \text{ou } \frac{384}{19} + \text{ou } \frac{576}{361} \\
 \quad + \frac{12 \times 16}{19} + \frac{12 \times 96}{19 \times 19} + \frac{12 \times 144}{19 \times 361} \\
 \quad \text{ou } \frac{192}{19} + \text{ou } \frac{1152}{361} + \text{ou } \frac{1728}{6859} \\
 \hline
 \text{Cube } z^3 = 64 + \frac{576}{19} + \frac{1728}{361} + \frac{1728}{6859}
 \end{array}$$

Présentement il faut trouver la valeur de ce cube entier pour le comparer au cube proposé 100, ce qui se fait en divisant chaque fraction par son dénominateur, & réduisant tous les restes à un même dénominateur commun pour les ajouter ensemble, comme il suit.

Le premier terme est tout réduit, c'est l'entier 64, le second terme est la fraction $\frac{576}{19}$, divisant le numérateur 576 par le dénominateur 19, le quotient est 30 $+ \frac{6}{19}$.

$$\begin{array}{r}
 \text{Diviseur } \left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende} \\ 19 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient.} \\ 576 \end{array} \right\} 30 + \frac{6}{19} \\
 \hline
 3 \dots 57 \\
 \quad 06
 \end{array}$$

Analyse.

PP

Le troisième terme $\frac{1728}{361}$ donne au quotient $4 + \frac{284}{361}$.

$$\begin{array}{r} \text{Diviseur} \left\{ \begin{array}{l} 361 \\ 1728 \end{array} \right. \text{Dividende} \left\{ \begin{array}{l} 4 + \frac{284}{361} \end{array} \right. \text{Quotient.} \\ \hline \end{array}$$

$$4 \dots 1444$$

$$284$$

J'ai déjà deux restes $\frac{6}{19}$ & $\frac{284}{361}$, je les réduis au même dénominateur en multipliant en croix ce qui donne

$$\frac{6 \times 361 + 19 \times 284}{19 \times 361} = \frac{2166 + 5396}{6859} = \frac{7562}{6859}$$

Je les ajoute à la dernière fraction qui a un même dénominateur, (car il faut les réduire au même dénominateur du dernier terme) j'ai donc $\frac{7562 + 1728}{6859} = \frac{9290}{6859}$

or divisant le numérateur par le dénominateur, le quotient est $1 + \frac{2431}{6859}$.

J'ajoute dans une somme tous ces quotients en entiers avec le même reste.

$$\begin{array}{r} 64 \\ + 30 \\ + 4 \\ + 1 + \frac{2431}{6859} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{La somme est } \dots \dots \dots 99 + \frac{2431}{6859}$$

qui diffère de 100 cube proposé de moins d'un tiers, car divisant les deux termes de la fraction restante par 3, j'ai $\frac{810}{2286}$ qui est environ un tiers.

On peut aussi former le cube de $4 + \frac{12}{19}$ réduisant l'entier en fraction, en multipliant l'entier 4 par 19, dénominateur de la fraction, or $4 \times 19 = 76 + \frac{12}{19} = 88$, ce qui donne $z = \frac{88}{19}$, & formant séparément le cube de ces deux termes, on aura le cube du nu-

mérateur 88 \equiv 681472. & le cube du dénominateur
 19 \equiv 6859. & divisant ensuite le numérateur par le dénominateur, on trouvera le même quotient ci-dessus $99 + \frac{2431}{6859}$.

<i>Diviseur ou</i> <i>dénominateur</i>	{	<i>Dividende ou</i> <i>numérateur</i>	{	<i>Quotient.</i>
6859	{	681472	{	99 + $\frac{2431}{6859}$

9 . . . 61731. Premier produit.

64162 Premier reste.

9 . . . 61731 Second produit.

2431 Second Reste & dernier.

La seconde Manière commune aux Problèmes plus que déterminez pour tirer des deux égalitez précédentes une troisième égalité qui soit du premier degré, consiste à multiplier tout également, afin de rendre égaux entre eux le premier membre des deux égalitez, & de pouvoir par-là abaïsser d'un degré ces deux égalitez, en comparant seulement leur second membre ensemble.

Les deux égalitez sont

$$x^3 \equiv 50 - 12x$$

Et $6x^3 \equiv 42.$

Je multiplie la première par 6, coefficient de x dans la seconde, ce qui donne $6x^3 \equiv 300 - 72x.$

Je multiplie la seconde par x qui est l'excès de x^3 de la première sur x^2 de la seconde, ce qui donne $6x^3 \equiv 42x.$

J'ai donc $6x^3 \equiv 300 - 72x$

& $6x \equiv 42x$

Donc en négligeant le premier membre , & comparant le second membre de ces deux égalitez , j'ai une troisième égalité

$300 - 72x = 4$, $2x$ qui est du premier degré.
Il n'y a plus qu'à la résoudre comme il suit.

J'ai d'abord par transposition $300 = 114x$, ou $114x = 300$, qui donne $x = \frac{300}{114}$ en divisant tout par 114, qui donne $x = 2 + \frac{72}{114}$, & divisant les deux termes de cette fraction par leur commun diviseur 6, j'ai $x = 2 + \frac{12}{19}$ comme ci-dessus.

Or par l'hypothèse la racine $z = 2 + x$, donc $z = 4 + \frac{12}{19}$, dont le cube $= 99 + \frac{2432}{6859}$ qui diffère de moins d'environ un tiers du cube proposé 100, comme on le voit par la démonstration sensible de l'opération précédente.

Théorème premier fondamental.

Soit un binôme quelconque $a \pm b$, dans lequel je suppose que le binôme positif $a + b = c$, représente en général la racine exacte de toute puissance parfaite, & le binôme négatif $a - b = d$, représente en général la racine de toute puissance imparfaite.

Supposition. On sçait d'ailleurs que tous les nombres sont réellement & tout ensemble toute racine quelconque, & toute puissance quelconque à l'infini, ainsi il ne leur manque rien de leur part, ils ont réellement dans la division infinie tout ce qu'il leur faut, mais par rapport à nous nous distinguons ces puissances, & nous nommons puissance parfaite celle dont les racines nous sont connues, & peuvent être exprimées en nombres ordinaires tels sont les quatz 4, 9, 16, &c. dont les racines sont 2, 3, 4, & ainsi des autres puissances dont les racines s'expriment en nombres : mais nous appelons puissance imparfaite celle dont la racine quoique réelle

ne peut s'exprimer en nombres, quoiqu'elle soit réellement comprise dans l'intervalle d'une division poussée à l'infini, ce qui nous est impossible; ainsi la racine quar-
 tée de 2, de 3, de 5, de 7, de 8, &c. que nous ne pou-
 vons exprimer exactement en nombres, nous fait nom-
 mer ces nombres des quarez imparfaits, il en est de
 même des autres puissances à l'infini. De-là vient la
 difficulté qui se trouve dans l'Analyse pour tirer les ra-
 cines secondes ou troisièmes d'un nombre qui est un
 quarré ou un cube imparfait.

Ces nombres sont les plus fréquens, car entre 1 & 100, il
 n'y a que 10 quarez parfaits en y comprenant l'unité,
 il y a 90 quarez imparfaits, il n'y a que quatre cubes
 parfaits, donc il y a 96 cubes imparfaits, à mesure qu'on
 va à des puissances plus élevées, on trouve que le nom-
 bre des puissances parfaites décroît, & celui des puis-
 sances imparfaites augmente, ce qui montre la nécessité &
 l'importance d'une Méthode d'approximation, pour trou-
 ver ces racines approchées autant qu'il est possible, de
 l'exactitude à laquelle il est impossible de parvenir, par
 la nature de l'infini qui se mêle avec le fini dans ces puis-
 sances, ce qui empêche qu'on ne puisse exprimer leurs ra-
 cines exactement.

Présentement si on élève le binôme positif $a + b$
 $\equiv c$, & le binôme négatif $a - b \equiv d$ séparément à
 une puissance quelconque semblable, dont l'exposant en
 général soit p .

Je dis 1°. que chacun de ces deux binômes a tous
 les mêmes produits égaux & semblables chacun comparé
 à son correspondant, avec cette seule différence que tous
 les produits du premier sont positifs, & ceux du second
 binôme sont alternativement positifs & négatifs, d'où il
 suit que la somme totale du binôme positif sera plus
 grande que celle du binôme négatif, car tous les termes
 pairs sont négatifs, & les termes impairs sont positifs.

ce qui est évident par leur formation qui suit, puis-
qu'on retranche dans ce dernier & non pas dans le
premier.

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 \times a + b \\
 \hline
 a^2 + ab + bb \\
 + ab \\
 \hline
 a^2 + 2ab + bb. \text{ Quarré} \\
 \times a + \dots b \\
 \hline
 a^3 + 2a^2b + abb \\
 + \dots a^2b + 2abb + b^3 \\
 \hline
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
 \end{array}$$

En nombres.

$$\begin{array}{r}
 2 + 4 \\
 \times 2 + 4 \\
 \hline
 4 + 8 + 16 \\
 + 8 \\
 \hline
 4 + 16 + 16 = 36. \text{ Quarré} \\
 \times 2 + 4 \\
 \hline
 8 + 32 + 32 \\
 + 16 + 64 + 64 \\
 \hline
 8 + 48 + 96 + 64 = 216 \text{ Cube.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 a - b \\
 \times a - b \\
 \hline
 a^2 - ab + bb \\
 \quad - ab \\
 \hline
 a^2 - 2ab + bb \text{ Quarré} \\
 \times a - \dots b \\
 \hline
 a^3 - 2a^2b + abb \\
 \quad - \dots a^2b + 2abb - b^3 \\
 \hline
 a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ Cube}
 \end{array}$$

En nombres.

$$\begin{array}{r}
 2 - 4 \\
 \times 2 - 4 \\
 \hline
 4 - 8 + 16 \\
 \quad - 8 \\
 \hline
 4 - 16 + 16 = 20 - 16 \text{ Quarré} \\
 \times 2 - 4 \\
 \hline
 8 - 32 + 32 \\
 \quad - 16 + 64 - 64 \\
 \hline
 8 - 48 + 96 - 64 \text{ Cube } \frac{104}{112}.
 \end{array}$$

Je dis 1°. que si je range dans une colonne à part tous les termes pairs qui ont tous le signe — & sont négatifs de la puissance de $a - b$, sçavoir le second, le quatrième, le sixième, &c. & que je nomme leur somme, première somme alternative.

Si d'un autre côté je range dans une colonne tous

les termes impairs, le 1^{er}. le 3^e. le 5^e. le 7^e. &c. qui sont tous positifs, & que je nomme leur somme, seconde somme alternative.

Alors si de ces deux sommes alternatives, j'ôte la plus grande de la plus petite, l'excès ou la différence sera égale à la valeur de $a - b$, & pour abrégér je nomme cette valeur d^p , c'est à-dire la valeur de la puissance de $d^p = a - b^p$.

La démonstration est évidente par la formation précédente du cube de $d = a - b$, car ce cube a autant de produits que le cube du binôme positif $a + b$, & ils sont tous égaux chacun à son correspondant, la seule différence est que dans le cube de $a - b$, les termes pairs ont le signe — & sont négatifs, & les seuls termes impairs sont positifs, au lieu que dans le cube du binôme positif $a + b$, tous les termes sont positifs.

Ainsi si je substitué des nombres en la place des lettres, dans le cube $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Soit $a = 1$ & $b = 2$. J'aurai

$$1 - 6 + 12 - 8 = 13 - 14.$$

Or de — 14 ôtant + 13 reste — $\frac{1}{14}$.

Si $a = 2$ & $b = 3$, j'aurai

$$\begin{array}{r} 2 \times 2 \times 2 - 3 \times 4 \times 3 + 3 \times 2 \times 9 - 3 \times 3 \times 3 \\ 8 - 36 + 54 - 27 \end{array}$$

Ce qui donne 62 — 63, qui donne pour reste — $\frac{1}{63}$ tous ces restes sont négatifs, parce que b surpasse a .

Mais si $a = 3$ & $b = 2$. comme a surpasse b , on aura des restes positifs qui donneront une valeur positive du cube $d^3 = a - b^3$, car on aura

$$\begin{array}{r} 3 \times 3 \times 3 - 3 \times 9 \times 2 + 3 \times 3 \times 4 - 2 \times 2 \times 2 \\ 27 - 54 + 36 - 8 \end{array}$$

Les

Les termes impairs
sont

$$\begin{array}{r} + 27 \\ + 36 \\ \hline \end{array}$$

donc la 1^{re}. somme alterna-
tive est $+ 63$

de la 1^{re}. somme $+ 63$

j'ôte la 2^{de}. somme $- 62$

Les termes pairs
& négatifs sont

$$\begin{array}{r} - 54 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$$

donc la 2^{de}. somme alterna-
tive est $- 62$

Le reste est $\frac{1}{63}$

Ou bien je divise la plus grande somme 63 par la plus
petite, le quotient est $1 + \frac{1}{63}$. Je néglige l'entier 1 qui
est ici inutile, & j'ai $\frac{1}{63}$ pour la valeur positive de d^3
 $= a - b$.

Donc l'excès ou la différence des deux sommes alter-
natives est égale à la valeur de la puissance de d , ou du
binôme négatif $a - b$ son égal. Ce qu'il falloit démon-
trer.

Autrement. Soit $a - b = 2 - 4$, donc $a = 2$,
& $b = 4$, donc $a - b = \frac{1}{2}$.

J'ai dans le carré $a^2 + b^2 = 4 + 16 = 20$ &
 $- 2ab = - 16$, or divisant $+ 20$ par $- 16$,
le quotient est $1 + \frac{4}{16}$ ou $\frac{5}{4}$.

J'ai dans le cube $a^3 + 3ab^2 = 8 + 96 = 104$,
& $- 3a^2b - b^3 = - 48 - 64 = 112$.

Or divisant $- 112$ par $+ 104$, le quotient est $1 - \frac{8}{104}$, ensuite divisant 112 par 8, le quotient est 14.
& divisant 104 par 8, le quotient est 13, donc les deux
sommes alternatives 112 & 104 diffèrent de $\frac{1}{8}$ qui est le
cube de $\frac{1}{2}$.

Corollaire premier.

Puisque d est la valeur de la différence des deux par-
Analyse

ties du binôme négatif $a - b$, je dis que si $d = 1$, toutes les puissances à l'infini $d^1, d^2, d^3, d^4, \&c. = 1$. donc si la différence des deux parties du binôme $a - b = 1$, la différence des deux sommes alternatives sera toujours $= 1$ dans toutes les puissances.

Mais si d est moindre que l'unité, ce sera pour lors une fraction qui décroîtra continuellement dans toutes les puissances de d , & qui deviendra d'autant plus petite que l'unité, à mesure que sa puissance sera plus élevée, donc si $d = \frac{1}{2}$, $d^2 = \frac{1}{4}$, $d^3 = \frac{1}{8}$, $d^4 = \frac{1}{16}$, &c. donc dans ce cas la différence des sommes alternatives sera toujours moindre que l'unité.

Corollaire second.

Dans tout binôme, soit positif comme $a + b$, soit négatif comme $a - b$, si le premier terme a surpasse le second b , la première somme alternative composée des termes impairs surpasse la seconde somme alternative composée des seuls termes pairs, ce qui est évident parce que je viens de démontrer que l'excès de cette première somme sur la seconde est égal à la valeur positive de la puissance de d^n , ou du binôme négatif $a - b$ son égal.

Donc si $a > b$ on peut conclure dans le quarré, que $a^2 + b^2 > 2ab$.

Et de même dans le cube que $a^3 + 3ab^2 > 3a^2b + b^3$, mais c'est le contraire lorsque $a < b$.

P R O B L E M E I.

Trouver les formules par défaut pour résoudre les égalitez & les puissances imparfaites du second degré.

Pour résoudre ou trouver les racines des égalitez & des puissances imparfaites du second degré sans aucune extraction ni division, & par conséquent sans aucun tâ-

tonnement par une Méthode indéfiniment plus courte & plus approchée que la Méthode ordinaire, je me fers de la formule suivante.

Pour trouver ces formules d'approximation, soit une égalité ou une puissance imparfaite du second degré, $z^2 = a^2 + b$.

$$\text{Donc } z = \sqrt{a^2 + b}.$$

Règle générale.

1^o. Je suppose la valeur approchée de cette racine quarrée connue & égale à a , il faut connoître le reste contenu dans b , qui doit fournir deux produits & un quarré.

Je suppose $z = x + \frac{1}{2}a$, & j'éleve cette valeur à la seconde puissance.

$$\begin{array}{r} z = x + \frac{1}{2}a \\ \times z = x + \frac{1}{2}a \\ \hline z^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}aa \\ \quad + \frac{1}{2}ax \\ \hline z^2 = x^2 + ax + \frac{1}{4}aa. \end{array}$$

Je sépare les produits de ce quarré en deux sommes alternatives, la première somme contient les termes impairs le premier & le troisième, la seconde somme alternative contient les deux termes pairs, le second & le quatrième.

Première Colonne
des termes impairs.

1^{er}. terme $+ x^2$

3^e. terme $+ \frac{1}{4}aa$

1^{re}. somme $+ x^2 + \frac{1}{4}aa$

Seconde Colonne
des termes pairs.

2^d. terme $+ \frac{1}{2}ax$

4^e. terme $+ \frac{1}{2}ax$

2^{de}. somme $+ ax$.

qq ij

3°. Je substitue ce carré de la valeur de z , formé par l'opération précédente dans l'égalité proposée

$$z^2 = a^2 + b, \text{ ce qui donne } z^2 = x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = a^2 + b.$$

4°. J'égalé la seconde somme alternative, $+ax$, avec la moitié du second membre de l'égalité proposée, c'est

$$ax = \frac{a^2 + b}{2}, \text{ \& divisant tout par } a \text{ pour dégager l'in-}$$

$$\text{connu } x = \frac{a^2 + b}{2a}, \text{ or par l'hypothèse } z = x + \frac{1}{2}a,$$

$$\text{donc } z = \frac{1}{2}a + \frac{a^2 + b}{2a}, \text{ que je réduis à sa plus simple}$$

$$\text{expression, puisque } \frac{a^2 + b}{2a} = \frac{1}{2}a + \frac{b}{2a}, \text{ j'ai donc}$$

$$z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + \frac{b}{2a}, \text{ qui se réduit à } z = a + \frac{b}{2a};$$

voilà la 1^{re} formule rationnelle d'approximation trouvée.

5°. Si je veux une seconde formule encore plus approchée, je suppose la première formule rationnelle que je viens de trouver $a + \frac{b}{2a} = y$.

Je prépare y & sa valeur pour la substituer dans la première formule trouvée, comme il suit.

$$\text{Puisque } a + \frac{b}{2a} = y.$$

$$\text{donc } 2 \times y, \text{ ou } 2y = 2a + \frac{2b}{2a}$$

pour avoir la valeur de y^2 , je carre ici y & sa valeur.

$$\begin{array}{r} y = a + \frac{b}{2a} \\ \times y = a + \frac{b}{2a} \\ \hline y^2 = a^2 + \frac{ab}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \quad \quad \quad + \frac{ab}{2a} \end{array}$$

$$\text{donc } y^2 = a^2 + \frac{2ab}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Or le second terme du second membre $\frac{2ab}{2a} = b$.

donc $y^2 = a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}$ Quarré de y & de sa valeur, je compare ce quarré avec le proposé.

$x^2 = a^2 + b$, & je trouve, que le quarré de la valeur de y excède le proposé de $+\frac{b^2}{4a^2}$, je nomme cet excès la formule d'excès.

6°. Présentement je substitue y à la place de a , & je substitue la formule d'excès $+\frac{b^2}{4a^2}$ dans la première formule d'approximation trouvée $a + \frac{b}{2a}$, ce qui donne

$$y + \frac{\frac{b}{2a} \times \frac{b}{2a}}{2y}$$

Dans cette nouvelle expression, à la place de y , & de $2y$, je substitue leurs valeurs trouvées ci-dessus, ce qui donne $a + \frac{b}{2a} + \frac{\frac{b^2}{4a^2}}{2a + \frac{2b}{2a}}$

$$2a + \frac{2b}{2a}$$

Comme cette expression est fort composée, je la réduis à ses moindres termes, comme il suit.

1°. Je cherche d'abord le dénominateur commun, en commençant par la seconde fraction qui est la plus composée, je multiplie son premier dénominateur par son second $4aa \times 2a = 8a^3$, ce qui me donne cette fraction composée réduite à la fraction simple $+\frac{b^2}{8a^3}$.

Or $8a^3$ est le dénominateur commun trouvé.

2°. Je divise ce dénominateur par $2a$, dénominateur de la première fraction, le quotient est $+\frac{4aa}{8a^3}$, par lequel je multiplie les deux termes de la première fraction,

$$\text{or } +\frac{4aa}{8a^3} \times \frac{b}{2a} = \frac{4aab}{8a^3}.$$

J'ai donc déjà les deux premières fractions réduites à $\frac{4aab}{8a^3} + \frac{b^2}{8a^3}$, ainsi j'ai la première expression qui étoit composée réduite à $a + \frac{4aab}{8a^3} + \frac{b^2}{8a^3 + \frac{2b}{2a}}$

Pour réduire la dernière fraction, puisque $\frac{b^2}{\frac{2b}{2a}} = \frac{b}{2b \times \frac{1}{2a}}$

je multiplie le numérateur par le dénominateur $+ 2a$ ce qui donne $4ab$ que j'ajoute au dénominateur $8a^3$, ce qui me donne enfin $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$, c'est la seconde formule rationnelle d'approximation qui est encore plus approchée que la première.

Par la même Méthode on peut trouver de suite autant de formules qu'on voudra qui seront toujours plus approchées les unes que les autres & cela à l'infini.

Ainsi pour trouver une troisième formule rationnelle encore indéfiniment plus approchée que les deux formules précédentes.

1°. Je suppose la seconde formule rationnelle trouvée,

$$a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab} = y.$$

Je prépare les valeurs de y sur cette hypothèse pour les substituer dans la 2^{de}. formule comme nous le verrons,

$$\text{Ainsi } 2y = 2a + \frac{8a^2b + 2b^2}{8a^3 + 4ab}$$

Je quarre y & sa valeur pour comparer son carré avec le carré proposé $z^2 = a^2 + b$.

$$y = a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$$

$$xy = a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$$

$$y^2 = a^2 + \frac{4a^3b + ab^2}{8a^3 + 4ab} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2} + \frac{4a^3b + ab^2}{8a^3 + 4ab}$$

$$y^2 = a^2 + \frac{8a^3b + 2ab^2}{8a^3 + 4ab} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}$$

$$\text{ou } y^2 = a^2 + b + \frac{b}{2a} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}$$

Je forme le carré de la seconde formule d'approximation ou troisième racine approchée pour le comparer avec le carré proposé $a^2 + b$.

Numérateur.

$$\begin{array}{r} 4a^2b + b^2 \\ \times 4a^2b + b^2 \\ \hline 16a^4b^2 + 4a^2b^3 \\ + 4a^2b^3 \\ + b^4 \\ \hline 16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4. \end{array}$$

Dénominateur.

$$\begin{array}{r} 8a^3 + 4ab \\ \times 8a^3 + 4ab \\ \hline 64a^6 + 32a^4b + \\ + 32a^4b + 16a^2b^2 \\ \hline 64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab} \\ \times a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab} \end{array}$$

$$a^2 + \frac{4a^3b + ab^2}{8a^3 + 4ab}$$

$$+ \frac{4a^3b + ab^2}{8a^3 + 4ab}$$

Quarré.

$$a^2 + \frac{8a^3b + 2ab^2}{8a^3 + 4ab} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}.$$

qui réduit à moindres termes donne

$$a^2 + b + \frac{1b}{2a} + \frac{1b^2 + 1b^2 + b^2}{4a^2 + 8a^2 + 16a^2}$$

dont j'ôte $a^2 + b$ quarré proposé. Le reste est l'excès du quarré de la formule seconde.

Donc l'excès où la formule d'excès est

$$\frac{b}{2a} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}.$$

2°. Présentement je substitue y à la place de a , & la formule d'excès qui précède, à la place de b . Dans la

2^{de}. formule $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$, ce qui donne

$$y + 4yy \times \frac{b}{2a} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}$$

$$8y^3 + 4y \times \frac{b}{2a} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}.$$

Remarque 1. Cette expression est très-composée ; avant de la réduire à une expression plus simple , il faut substituer à la place de y , de y^2 & de y^3 leurs valeurs , ce qui augmente

augmente les termes & rend l'expression encore plus composée ; c'est pourquoi il vaut mieux continuer l'approximation par les nombres , puisqu'il s'agit de trouver en nombres une racine approchée. Et pour lors la première formule d'approximation suffit, car après avoir employé cette première formule dans une première opération , il suffit de substituer ces nombres aux lettres de la formule pour continuer indéfiniment l'approximation tant de fois qu'on voudra la réitérer , car chaque opération donnera toujours une racine de plus en plus approchée que la précédente. D'ailleurs comme il faudroit pousser l'approximation à l'infini, pour trouver la racine exacte, ce qui est impossible, il est inutile dans la pratique d'aller au-delà d'une seconde approximation , puisque dès la première , on est parvenu à des parties moindres que toute grandeur sensible.

PROBLEME II.

Trouver les Formules d'approximation par excès, pour résoudre les égalitez & les puissances imparfaites du second degré.

Toute égalité & puissance imparfaite du second degré peut s'exprimer en général par $z^2 = a^2 \pm b$. Ce qui renferme deux cas.

Le premier cas est , lorsque je compare z^2 avec un quarré moindre , ce que j'exprime ainsi , $z^2 = a^2 \pm b = 25 \pm 1 = 26$. Dans ce cas je cherche une racine approchée par défaut. C'est le sujet de ce Problème.

Le second cas est lorsque que je compare $z^2 = 26 = 36 - 10$ avec le quarré 36 qui est immédiatement plus grand. Et pour ôter tout équivoque au lieu de l'exprimer par $a^2 - b$, je me sers d'autres lettres , & j'écris $z^2 = c^2 - d = 36 - 10 = 26$; dans ce cas je cher-

Analyse.

rr

che une formule approchée par excès.

Comme 26. ne diffère de 25 que de 1, la formule par défaut est la plus prompte dans ce premier cas; mais lorsque j'ai $z^2 = cc - d = 36 - 1 = 35$. comme l'excès est 1 & le défaut où la différence de $25 + 10 = 35$ est plus grande; il faut dans ce second cas préférer la formule d'excès qui suit parce qu'elle est plus prompte & plus approchée.

On trouvera les formules d'excès comme on a trouvé cy-dessus les formules d'approximation par défaut, en changeant (si l'on veut conserver les mêmes lettres de la formule par défaut) seulement le signe + en -; ainsi on aura pour première formule approchée par excès, $z = a - \frac{b}{2a}$ & pour seconde formule $a - \frac{4aab + b^2}{8a^3 - 4ab}$ ou bien $z = c - \frac{d}{2c}$ & $c - \frac{4ccd + d^2}{8c^3 - 4cd}$ en se servant des lettres de la formule par excès $z^2 = cc - d$, dans laquelle cc représente le carré parfait plus grand, & d son excès.

PROBLEME III.

Trouver les limites d'approximation, ou déterminer la valeur de l'approximation dans chaque formule du second degré.

Il s'agit ici de déterminer l'erreur par excès ou par défaut dans chaque formule d'approximation du 2^d. degré.

1^o. Je la déterminerai dans la puissance. 2^o. Dans la racine; & la Méthode sera générale pour toutes les puissances imparfaites, & pour toutes les égalitez en général; car les égalitez affectées de termes moïens se réduisent aux formules des égalitez pures qui sont les mêmes que celles des puissances imparfaites.

Principe. Il faut remarquer que ce n'est ni par la plus grande ni par la plus petite erreur, que l'on doit juger de la valeur d'une Méthode ou d'une Formule d'approximation, de même que dans les jeux de hazard on juge de l'avantage ou du désavantage des joueurs par la somme des avantages & des désavantages de chaque coup, divisé par le nombre de tous les coups, & non point par le coup seul ou le plus favorable ou le plus contraire: ainsi pour juger sainement de la valeur d'une formule d'approximation, il faut diviser la somme des erreurs par le nombre des cas possibles.

Je me borne à déterminer l'excès ou le défaut dans les formules simples & primitives, comme $a + \frac{b}{2a}$, & $a - \frac{b}{2a}$, ou $c - \frac{d}{2c}$: mais comme je dirai quelque chose par occasion des formules dérivées, il faut expliquer d'abord en quoi elles consistent, si j'augmente ou je diminue de l'unité le numérateur $b \pm 1$, j'aurai $a + \frac{b+1}{2a}$, ou $a + \frac{b-1}{2a}$, ou $a + \frac{b}{2a-1}$, ou $a + \frac{b}{2a+1}$ qui sont des formules dérivées de la formule primitive $a + \frac{b}{2a}$.

On peut de même tirer des formules dérivées de toutes les autres formules primitives dans les cas où ces dérivées peuvent être plus exactes que les primitives, dont la simplicité est préférable à une plus grande exactitude que les dérivées peuvent avoir en certains cas.

1°. Pour déterminer l'erreur par excès ou par défaut dans le quarré ou la seconde puissance.

Premier Exemple. Soit le quarré imparfait $aa + b$, & la formule d'approximation $a + \frac{b}{2a}$ qui est la première racine approchée.

J'éleve au quaré

$$\begin{array}{r} a + \frac{b}{2a} \\ \times a + \frac{b}{2a} \\ \hline a^2 + \frac{ab}{2a} + \frac{bb}{4aa} \\ + \frac{ab}{2a} \\ \hline a^2 + \frac{2ab}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \text{ou } a^2 + b + \frac{b^2}{4aa} \text{ Carré} \end{array}$$

Ensuite je compare ce carré de la formule avec le carré proposé $a^2 + b$
0 0

ôtant le plus petit du plus grand, le reste est $+\frac{b^2}{4ac}$.

Donc le carré de cette première formule excède le carré
proposé $a^2 + b$, universellement de . . . $\frac{bb}{4a}$ que je
nomme formule d'excès.

Maintenant pour juger de la valeur de cette formule d'excès $\frac{b^2}{4a^2}$, j'examine toutes les valeurs possibles de b ; or, nous avons démontré que $a^2 + 2a + 1$ est la valeur du carré plus grand que a^2 qui le suit immédiatement, & que tous les carrés imparfaits contenus entre deux carrés qui se suivent immédiatement, étoient compris dans l'intervalle exprimé en général par $2a$, qui est le double de la racine du moindre des deux carrés que l'on compare; d'où il suit que b peut en général valoir successivement 1, 2, 3, 4, &c. jusques à $2a$, en sorte que dans le carré la somme des erreurs de tous les cas possibles est $\frac{1}{4aa} + \frac{4}{4aa} + \frac{9}{4aa}$, &c. jusqu'à $\frac{4aa}{4aa}$,

dont la racine est $\frac{2a}{1a}$.

Dans ces fractions, le dénominateur est constant c'est 444, le numérateur est le quarré de la suite naturelle des nombres, il n'y a donc qu'à trouver la somme de ces numérateurs quarez 1. 4. 9. 16. &c. jusques à 444 qui est le dernier.

Or, par ce qui a été démontré par Wallis & plusieurs autres, cette somme est égale à $\frac{8a^3 + 6aa + a}{3}$. Je divise cette somme par le nombre des cas possibles 444, ce qui se fait en multipliant le dénominateur 3×444 , & j'ai pour la somme des erreurs dans le quarré de cette première formule $\frac{8a^3 + 6aa + a}{12aa}$ & divisant tout par a pour avoir une expression plus simple, j'ai $\frac{8a^2 + 6a + 1}{12a}$.

Mais puisque le nombre des cas possibles est $\frac{2a}{1a}$, je divise encore cette fraction par $\frac{2a}{1a}$, en multipliant à cet effet son dénominateur par $\frac{2a}{1a}$, ce qui donne

$\frac{8a^2 + 6a + 1}{24aa}$, ou $\frac{1}{3} + \frac{6a + 1}{24aa}$ pour l'erreur moyenne ou d'estimation.

Mais comme la fraction $\frac{6a + 1}{24aa}$ diminue à l'infini à proportion que la valeur de a augmente; il suit encore de là que l'estimation générale & universelle de l'erreur, est seulement de $\frac{1}{3}$ dans le quarré de la première formule d'approximation.

Ce qui se concevra plus facilement par les nombres. *Exemple.* Entre les quarez 9 & 16, qui se suivent immédiatement, & dont les racines sont 3 & 4, il y a six quarez imparfaits; sçavoir, 10, 11, 12, 13, 14, 15, dont les racines approchées sont $3\frac{1}{6}$, $3\frac{2}{6}$, $3\frac{3}{6}$, $3\frac{4}{6}$, $3\frac{5}{6}$, $3\frac{6}{6}$, dont les quarez sont $10\frac{1}{6}$, $11\frac{4}{6}$, $12\frac{9}{6}$, $13\frac{16}{6}$, $14\frac{25}{6}$, $15\frac{36}{6}$.

lesquels surpassent les quarrés proposez imparfaits, 10, 11, 12, 13, 14, 15, de $\frac{1}{36}$, $\frac{4}{36}$, &c. La somme des numérateurs est 91, ce qui donne $\frac{91}{36}$ pour la somme des erreurs, le produit en fraction $\frac{91}{36}$.

Or, comme on peut également avoir besoin de tirer la racine quarrée des tous ces quarrés imparfaits; pour avoir l'erreur moyenne, je divise la somme des erreurs $\frac{91}{36}$ par le nombre des cas possibles, c'est $\frac{91}{36 \times 6} = \frac{91}{216}$ $= \frac{1}{3} + \frac{91}{216}$. Voilà l'erreur moyenne en nombres dans ce cas particulier pour la première formule primitive d'approximation $a + \frac{b}{2a}$.

Par la même Méthode, on trouvera que l'erreur moyenne de la formule primitive $a - \frac{b}{2a}$ qui est par excès, ou de la formule dérivée qui lui est égale, $a + \frac{b+1}{2a+2}$ est $\frac{8a^3 + 6a + 1}{24a^3 + 48a^2 + 24a}$, & par conséquent cette erreur est moindre que $\frac{1}{3}$, ainsi ces deux formules, la primitive & la dérivée sont un peu plus exactes que la première qui précède $a + \frac{b}{2a}$, mais elles sont un peu plus composées d'un autre côté, l'erreur est donc toujours moindre que l'unité dans le quarré.

Dans la première formule primitive $a + \frac{b}{2a}$, la plus grande erreur est, lorsque $b = 2a$, car alors le quarré de cette erreur est $\frac{4aa}{4aa} = 1$.

Et la plus petite erreur est lorsque $b = 1$, car alors le quarré de cette erreur est $\frac{b}{2a} \times b = \frac{1}{4aa}$.

Au contraire dans la formule dérivée $a + \frac{b+1}{2a+2}$, l'erreur la plus grande, est lorsque $b = 1$, ce qui donne pour l'erreur dans le quarré $\frac{4aa}{4aa + 8a + 4}$.

L'erreur la plus petite est lorsque $b = 2a$, ce qui donne pour l'erreur dans le quarré $\frac{1}{4aa+8a+4}$.

Si l'on se sert de la formule dérivée $a + \frac{b}{2a+b}$, l'erreur sera toujours en dessus & moindre que $\frac{1}{4}$.

La plus grande erreur est lorsque $b = a$, ou $b = a + 1$, alors l'erreur dans le quarré est $\frac{aa+a}{4aa+4a+1}$, & la petite erreur est lorsque $b = 1$, ou $b = 2a$, dans ce cas l'erreur dans le quarré est $\frac{2a}{4aa+4a+1}$ donc l'erreur moïenne dans cette formule dérivée est de $\frac{8a^3+12aa+4a}{48a^3+48aa+12a}$, elle est donc universellement de $\frac{1}{2}$.

Ainsi l'erreur moïenne dans cette dernière formule dérivée est précisément de la moitié plus petite que dans la formule primitive $a + \frac{b}{2a}$ où l'erreur moïenne est d'un tiers : elle a encore ceci de particulier, que l'erreur est égale & toujours par défaut dans les deux cas où le quarré imparfait est également éloigné de deux quarrés parfaits, l'un plus grand & l'autre plus petit, dans l'intervalle desquels il est compris.

Par exemple. La racine de 11 est $3\frac{1}{7}$, & la racine de 14 est $3\frac{1}{2}$; or 11 surpasse 9 de 2, & 14 est surpassé par 16 aussi de 2.

De même le quarré de $3\frac{1}{7}$ est $10\frac{12}{49}$, qui est surpassé par 11 de $\frac{10}{49}$, & le quarré de $3\frac{1}{2}$ est $13\frac{12}{49}$ qui est surpassé par 14 aussi de $\frac{10}{49}$, &c.

2°. Pour déterminer les limites dans la racine.

Il est plus difficile de déterminer l'erreur soit par défaut soit par excès dans la racine que dans le quarré, à cause de l'irrationalité qui se trouve dans la racine.

Voici la Méthode qui m'a paru la plus simple & la plus naturelle. Je considère en particulier chacune des racines trouvées par chacune des opérations, & je suppose que celle qui suit est exacte par rapport à celle qui la précède, & que la différence de ces deux racines est l'erreur de la première qui précède immédiatement.

Ainsi dans $a^2 + b$, la première racine approchée est a , la seconde est $a + \frac{b}{2a}$.

La troisième est $a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3 + 4ab}$.

La quatrième est $a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3 + 4ab}$

$$- \frac{b^4}{128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3}$$

La cinquième est, &c.

Je dis 1°. que l'erreur de la première racine est un peu moindre que $\frac{b}{2a}$ qui est l'excès de la seconde racine sur la première.

2°. L'erreur de la seconde est d'un peu plus de

$$\frac{b^2}{8a^3 + 4ab}.$$

3°. L'erreur de la troisième est un peu plus de

$$\frac{b^4}{128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3} \text{ \& ainsi de suite à l'infini.}$$

D'où il suit, 1°. que l'erreur de la première racine a , est précisément $\frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3 + 4ab} -$

$\frac{b^4}{128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3}$ en continuant cette progression à l'infini.

2°. Que l'erreur de la seconde racine $a + \frac{b}{2a}$, est précisément $\frac{b^2}{8a^3 + 4ab} - \frac{b^4}{128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3} -$ &c. en continuant de même la progression à l'infini.

Formation

Formation de la progression des formules des limites d'approximation, qui servent à trouver les formules d'approximation.

Chaque formule d'erreur par défaut ou par excès est une fraction.

Les numérateurs sont des puissances de b non pas prises de suite, mais en sautant toujours au quarré de la précédente $b, b^2, b^4, b^8, \&c.$ à l'infini, c'est la multiplication de l'excès b précédent, multiplié continuellement par lui-même, ce qui se fait en doublant toujours l'exposant de b .

Les dénominateurs viennent de la multiplication continue du double du numérateur de la racine précédente, réduite auparavant en fraction, & ensuite multipliée par le double du dénominateur.

Ces formules d'erreur servent à trouver les formules d'approximation suivantes, & réciproquement chaque formule d'approximation sert à trouver la formule d'erreur suivante.

Ainsi pour avoir la seconde racine $a + \frac{b}{2a}$, je le double, c'est $\frac{2a}{1}$, je multiplie ce double $2a$ par son dénominateur 1 , c'est $2a \times 1 = 2a$, c'est le dénominateur de la fraction qui a b pour numérateur $\frac{b}{2a}$, c'est la première formule d'erreur ou des limites.

J'ajoute cette fraction à la première racine a , j'ai pour seconde racine & seconde formule $a + \frac{b}{2a}$.

Pour avoir la troisième racine ou troisième formule d'approximation $a + \frac{b^2}{8a^3 + 4ab}$, ou son égale $a + \frac{4aa b + b^2}{8a^3 + 4ab}$, dont j'ai expliqué la formation dans le Pro-

Analyse. ss

blème premier; je peux encore la former de la manière qui suit, qui est plus simple & plus facile.

Je forme à cet effet la seconde formule d'erreur, comme il suit, son numérateur est b^2 , c'est le numérateur b de la première fraction multiplié par lui-même, $b \times b = b^2$.

Pour avoir le dénominateur, je réduis la seconde racine, $a + \frac{b}{2a}$ en fraction, multipliant l'entier a par le dénominateur $2a$, or $a \times 2a = 2aa$ que je joins à la fraction $\frac{b}{2a}$, c'est $\frac{2aa + b}{2a}$.

Je prends ensuite le double de ce dernier numérateur $2aa + b$, c'est $4aa + 2b$, que je multiplie par le premier dénominateur précédent $2a$, or $4aa + 2b \times 2a$, donne $8a^3 + 4ab$, c'est le dénominateur de la deuxième formule d'erreur $\frac{b^2}{8a^3 + 4ab}$.

Et $4aa + b \times a$ donne $4aab + b^2$ pour le numérateur de la troisième formule d'approximation qui a le même dénominateur de la troisième formule des limites; ainsi la troisième formule d'approximation est $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$.

$$+ \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}.$$

Pour avoir la quatrième racine approchée, & la troisième formule des limites ou d'erreur, le numérateur de celle-ci b^4 est le numérateur de la troisième formule précédente b^2 multiplié par b^2 , or $b^2 \times b^2 = b^4$.

Le dénominateur se trouve ainsi, je réduis la troisième formule d'approximation $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$ en une seule fraction, multipliant l'entier a par le dénominateur entier, or $a \times 8a^3 + 4ab = 8a^4 + 4a^2b$, je joins ce produit à la fraction entière $+ \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$ ce qui donne

$$\frac{8a^4 + 8aab + b^2}{8a^3 + 4ab}.$$

Je double ou je multiplie par 2 ce dernier dénominateur, j'ai $16a^4 + 16a^2b + 2b^2$ ensuite je le multiplie par le précédent dénominateur $8a^3 + 4ab$.

$$16a^4 + 16a^2b + 2b^2$$

$$\times 8a^3 + 4ab.$$

$$128a^7 + 128a^5b + 16a^3b^2.$$

$$+ 64a^4b + 64a^2b^2 + 8ab^3.$$

$$\text{Produit } 128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3.$$

c'est le dénominateur de la troisième formule des limites, ainsi la troisième formule des limites d'approximation est

$$\frac{b^4}{128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3}$$

Ensuite pour avoir la quatrième racine ou formule d'approximation, je lui donne le dénominateur trouvé, $128a^7$, &c.

Pour former le numérateur, je multiplie par b , le dénominateur précédent doublé $16a^4 + 16a^2b + 2b^2 \times b$, ce qui donne $16a^4b + 16a^2b^2 + 2b^3 + b^4$.

y ajoutant b^4 numérateur de la formule d'erreur

$$128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3.$$

& ajoutant a , j'ai la quatrième racine ou formule d'ap-

$$\text{proximation } a + \frac{16a^4b + 16a^2b^2 + 2b^3 + b^4}{128a^7 + 192a^5b + 80a^3b^2 + 8ab^3}.$$

Formation de la quatrième Racine.

$$\begin{array}{r}
 128 a^7 + 192 a^5 b + 80 a^3 b^2 + 8 a^4 b^3 \\
 \times 8 a^3 + 4 ab \\
 \hline
 64 + 16 a^2 b + 640 a^6 b^2 + 64 a^4 b^3 \\
 16 \quad 720 \\
 8. a^{10} + 800 \dots + \dots + \dots \\
 \hline
 + 32 a^2 b + \dots 8 a^6 b^2 + 320 a^4 b^3 + 32 a^2 b^4 \\
 48 \dots 360 \dots + \dots \\
 40 \\
 \hline
 1024 a^{10} + 548 a^8 b + 1408 a^6 b^2 + 384 a^4 b^3 \text{ dénomina.} \\
 + 32 a^2 b^4 \text{ Commun.} \\
 \hline
 8 a^3 + 4 ab. \\
 \times \quad b^4 \\
 \hline
 8 a^3 b^4 + 4 ab^5. \text{ 1}^{\text{e}}. \text{ numérateur.} \\
 \hline
 128 a^7 + 192 a^5 b + 80 a^3 b^2 + 8 ab^3 \\
 \times 4 a^2 b + b^2 \\
 \hline
 32. a^9 b + 8 a^7 b^2 + 320 a^5 b^3 + 32 a^3 b^4 \\
 8 \dots 36 \\
 4 \dots 4 \\
 + 128 a^7 b^2 + 192 a^5 b^3 + 80 a^3 b^4 + 8 ab^5. \\
 \hline
 512 a^9 b + 896 a^7 b^2 + 512 a^5 b^3 + 112 a^3 b^4 \text{ 2}^{\text{d}}. \text{ num.} \\
 + 8 ab^5 \dots + 8 a^3 b^4 + 4 ab^5. \text{ 1}^{\text{e}}. \text{ num.} \\
 \hline
 512 a^9 b + 896 a^7 b^2 + 512 a^5 b^3 + 120 a^3 b^4 + 12 ab^5.
 \end{array}$$

PROBLÈME IV.

Appliquer les Formules d'approximation du second degré à des Exemples en nombres.

Premier Exemple. Soit le côté du carré $\equiv 1$, le carré de la diagonale $\equiv 2$. Donc pour avoir la valeur

de la diagonale il faut tirer la racine quarrée de 2, qu'on ne peut trouver exactement, mais dont on peut approcher à l'infini par la formule $a + \frac{b}{2a}$

Dans ce cas j'ai $a = 1$, première racine approchée de $2 = a + b$. Donc $b = 1$.

Substituant la valeur de a & b dans la formule $a + \frac{b}{2a}$, j'ai $1 + \frac{1}{2}$ pour seconde racine approchée, ou $\frac{3}{2}$.

Ensuite je substitue les valeurs de $a + \frac{b}{2a} = 1 + \frac{1}{2}$ dans la seconde formule $a + \frac{4ab + bb}{8a^3 + 4ab}$, ce qui donne

$$1 + \frac{4 \times 1 \times 1 + 1}{8 \times 1 + 4 \times 1 \times 1} = 1 + \frac{4 + 1}{8 + 4} = 1 + \frac{5}{12} \text{ ou } \frac{17}{12}$$

c'est la troisième racine approchée, on en trouvera d'autres à l'infini par la même Méthode.

Autrement. Ayant trouvé la seconde racine $a + \frac{b}{2a} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = c$, je quarré $c = \frac{3}{2}$ son quarré est $\frac{9}{4}$ que j'ôte de $a^2 + b = 2$ quarré imparfait proposé, ôtant le plus petit nombre du plus grand, je suppose le reste $= + d$; c'est-à-dire, je prends pour seconde racine approchée $c - \frac{d}{2c}$ qui donne $2 = \frac{9}{4}$ qui ôté de $\frac{9}{4}$ le reste $= \frac{7}{4} = d$. Or $c - \frac{d}{2c}$ donne $\frac{3}{2} - \frac{7}{6} = \frac{17}{12}$, qui étant réduit à sa plus simple expression, donne $\frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}$, &c. à l'infini, & ainsi des autres.

Second Exemple. Soit proposé le quarré imparfait 200, dont on demande la racine approchée, pour trouver par exemple la corde du quart de cercle dont le rayon est 10, ou ce qui est la même chose pour trouver la grandeur de la diagonale, dont le quarré 200 est double du quarré 100, dont le côté 10 est donné.

J'ai donc $z^2 = a^2 + b = 200$.

or $a = 14$, $14 \times 14 = 196 = a^2$,

& $200 - 196 = 4$, donc $b = 4$.

1°. Substituant 14 à la place de a , & 4 à la place de b dans la première formule $a + \frac{b}{2a}$, j'ai pour seconde racine approchée $14 + \frac{4}{28}$ qui se réduit à $14 + \frac{1}{7}$, divisant les termes de la fraction par son commun diviseur 4.

2°. En me servant de la seconde formule d'approximation $a + \frac{4ab + b^2}{8a^3 + 4ab}$, j'ai une troisième racine encore

plus approchée $14 + \frac{4 \times 196 \times 4 + 16}{8 \times 2744 + 4 \times 56}$

$= 14 + \frac{3136 + 16}{21952 + 224} = 14 + \frac{3152}{22176} = 14 + \frac{197}{1386}$

en divisant les deux termes de la fraction par leur commun diviseur.

Il n'est pas nécessaire de pousser plus loin l'approximation, il suffit de quarrer cette racine pour la comparer avec le carré donné 200, comme il suit. 1°. En nombres. 2°. En lettres de la formule.

1°. Pour quarrer l'approximation trouvée en nombres, je réduis d'abord l'entier 14 en fraction en le multipliant par le dénominateur, & j'ajoute le produit au numérateur 197.

$$\begin{array}{r} 1404 \\ + 197 \\ \hline 19601 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 1386 \\ \hline 5544 \\ 1386 \\ \hline 19404 \end{array}$$

J'ai donc à élever au carré

la fraction $\frac{19601}{1386}$

$$\begin{array}{r} 19601 \\ \times 19601 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1386 \\ \times 1386 \\ \hline \end{array}$$

$ \begin{array}{r} 19601 \\ 117606 \dots \\ 176409 \dots \\ 19601 \dots \\ \hline 384199201 \end{array} $ <p><i>Quarré du numérateur.</i></p>	$ \begin{array}{r} 8316 \\ 11088 \\ 4158. \\ 1386 \dots \\ \hline 1920996. \end{array} $ <p><i>Quarré du dénominateur.</i></p>
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;">Diviseur.</div> <div style="font-size: 3em; margin-right: 10px;">}</div> <div>Dividende.</div> </div> $1920996 \left\{ 384199201 \right.$	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;">Quotient.</div> <div style="font-size: 3em; margin-right: 10px;">}</div> <div> $20:0 + \frac{1}{19.20.996}$ </div> </div>
$20 \dots 38419920. \quad \text{Premier produit.}$ $000000:1. \quad \text{Reste.}$ $20:0 \dots$	

D'où il suit que la racine trouvée par la seconde approximation $14 + \frac{197}{1386}$ est suffisante, & qu'il n'est pas nécessaire de pousser plus loin l'opération pour en approcher, puisque son quarré ne surpasse le quarré imparfait proposé que de $\frac{1}{192.09.96}$ qui est une grandeur plus petite qu'aucune grandeur sensible.

2°. Je forme aussi le quarré de la formule pour le comparer avec le quarré proposé pour avoir l'approximation exprimée en général par des lettres.

$$\begin{aligned}
 & a + \frac{4aab + bb}{8a^3 + 4ab} \\
 & \times a + \frac{4aab + bb}{8a^3 + 4ab} \\
 \hline
 & \text{Quarré } a^2 + \frac{8a^3b + 2ab^2}{8a^3 + 4ab} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2} \\
 & \text{ou } a^2 + b + \frac{b}{2a} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2} \\
 \hline
 & \begin{array}{cc}
 8a^3 + 4ab & \text{or } 4a^2b + b^2 \\
 \times 8a^3 + 4ab & \times 4a^2b + b^2
 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2. \quad 16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4.$$

Ce qui donne pour le quarré de la troisième formule.

$$a^2 + \frac{8a^3b + 4ab}{8a^3 + 4ab} + \frac{16a^4b^2 + 8a^2b^3 + b^4}{64a^6 + 64a^4b + 16a^2b^2}$$

$$\text{ou } a^2 + b + \frac{1}{2ab} + \frac{1b^2 + 1b^2 + b^2}{4a^2 + 16a^2 + 16a^2}$$

PROBLÈME V.

Trouver les formules d'approximation pour les racines des troisièmes puissances imparfaites.

C'est dans le cube imparfait, ou la troisième puissance imparfaite, que ma nouvelle Méthode commence à se développer dans toute son étendue, elle s'applique ensuite de la même sorte à toutes les puissances supérieures; au lieu que dans le quarré qui est la seconde puissance, l'égalité de la seconde somme alternative donne directement une valeur de x rationnelle, de sorte qu'il est inutile dans ce cas de comparer les deux égalitez pour en tirer une troisième qui seroit en même tems & moins simple & moins approchée.

Mais dans le cube imparfait, l'égalité de la seconde somme alternative donne une valeur & très-approchée, & très-utile pour certaines constructions géométriques, comme nous le verrons dans la suite, mais qui n'est pas commode pour le calcul Arithmétique, c'est pourquoi il faut suivant l'article second de la règle générale de ma Méthode, comparer les égalitez des deux sommes alternatives pour en tirer une troisième égalité du premier degré, ou simplement d'un degré commode, c'est pour cette raison que dans l'essai de ma Méthode, & dans l'abrégé que j'ai publié en 1661, je n'ai point donné d'exemples pour la seconde puissance, mais seulement pour la troisième, parce que c'est dans la troisième puissance où cette Méthode s'applique dans toute son étendue.

Soit

Soit en général , une troisième puissance imparfaite quelconque $z^3 = a^3 \pm b$. donc $z = \sqrt[3]{a^3 \pm b}$.

Règle générale.

Pour trouver les formules d'approximation , soit la puissance imparfaite $z^3 = a^3 \pm b$. dont a est la racine approchée en nombres entiers , donc z est entre a & $a + 1$ ou entre a & $a - 1$.

1^o. Je suppose $z = x \pm \frac{1}{2}a$.

Je substitue cette valeur de z dans l'égalité proposée, ce qui se fait en l'élevant d'abord à la troisième puissance, comme il suit.

$$\begin{array}{r}
 z = x \pm \frac{1}{2}a \\
 \times z = x \pm \frac{1}{2}a \\
 \hline
 z^2 = x^2 \pm \frac{1}{2}ax \pm \frac{1}{4}aa \\
 \text{ou } z^2 = x^2 \pm ax \pm \frac{1}{4}aa \\
 \times z = x \pm \frac{1}{2}a \\
 \hline
 z^3 = x^3 \pm \frac{1}{2}ax^2 \pm \frac{1}{4}a^2x \pm \frac{1}{8}a^3 \\
 \quad \pm \frac{1}{2}ax^2 \pm \frac{1}{2}a^2x \\
 \hline
 z^3 = x^3 \pm \frac{3}{2}ax^2 \pm \frac{3}{4}a^2x \pm \frac{1}{8}a^3.
 \end{array}$$

La substitution donne l'égalité transformée qui suit $x^3 \pm \frac{3}{2}ax^2 \pm \frac{3}{4}a^2x \pm \frac{1}{8}a^3 = a^3 \pm b$.

2^e. Je sépare le premier membre de cette égalité en deux sommes alternatives, que j'égalé à la moitié du second membre.

1^{re}. somme alternative composée du 1^{er}. & 3^e. termes.

$$x^3 \pm \frac{3}{4}a^2x = \frac{a^3 \pm b}{2}.$$

2^{de}. somme alternative composée du 2^d. & 4^e termes

$$ax^2 \pm \frac{1}{8}a^3 = \frac{a^3 \pm b}{2}$$

Analyse.

3^o. Pour tirer une valeur rationnelle de x , je compare ces deux égalitez selon la Méthode des Problèmes plus que déterminez, comme il suit.

D'abord j'ôte les fractions, ce qui donne

$$4x^3 + 3a^2x = 2a^3 + 2b.$$

ou transposant

$$4x^3 = 2a^3 + 2b - 3a^2x$$

$$\times 3a$$

$$12ax^3 = 6a^4 + 6ab''' - 9a^3x.$$

$$\text{Et } \frac{24}{1}ax^2 + 1a^3 = \frac{12a^3 + 12b}{2}$$

$$\text{ou } 12ax^2 = 6a^3 + 6b - 1a^3$$

$$\times x \quad \times a \quad \times 9x$$

$$12ax^3 = 6a^4 + 6ab''' - 9a^3x.$$

Je fais dans ces deux égalitez le premier terme égal, & dans les autres termes j'observe l'homogénéité, comme b est du troisième degré, je lui suppose un exposant en chiffres romains b''' , ainsi tous les termes seront de quatre dimensions.

A cet effet je multiplie dans la première égalité tous les termes par $3a$ qui est l'excès de $12ax^2$ sur $4x^3$; dans la seconde égalité je multiplie le premier terme par x qui est l'excès de x^3 sur x^2 , je multiplie le second & le troisième terme $\times a$, & le dernier terme par $9x$, par ce moyen j'ai deux égalitez entièrement égales & semblables ou plutôt la même égalité répétée.

Voilà la première manière de comparer les égalitez tirée des deux sommes alternatives, qui me donne la première égalité réduite $12ax^3 = 6a^4 + 6ab - 9a^3x$ qui donne une valeur de x trop petite; puisque selon mon Théorème je devrois égaler la première somme $x^3 + \frac{1}{4}a^2x$, à une somme plus grande que $\frac{a^3 + b}{2}$, mais je sçai aussi que l'erreur est moindre que l'unité, car par le premier corollaire si j'égalé la première somme alternative $x^3 + \frac{1}{4}$

$a^2 x$, avec $\frac{a^3 + b}{2} + \frac{1}{2}$, j'aurai une valeur de x un peu trop grande, mais si je l'égle avec $\frac{a^3 + b}{2}$, j'aurai une valeur de x un peu trop petite, mais toujours d'une fraction moindre que l'unité.

4°. Ainsi je compare la première somme alternative avec la moitié du second membre augmenté de $\frac{1}{2}$, c'est

$$x^3 + \frac{1}{2} a^2 x = \frac{a^3 + b}{2} + \frac{1}{2}$$

Je le multiplie $\times 12 a$ pour ôter les fractions, j'ai $12 a x^3 + 9 a^2 x = 6 a^4 + 6 a b''' + 6 a$, & transposant j'ai $12 a x^3 = 6 a^4 + 6 a b''' + 6 a - 9 a^2 x$, c'est la seconde égalité réduite, où x est trop grand.

5°. Dans les égalitez précédentes art. 3. négligeant $3 a^3 x$ comme une fraction infiniment petite,

j'ai $6 a^3 + 6 b - 6 = 1 a^3$. Second membre de la seconde égalité.

$= 5 a^3 + 6 b - 6$ dont j'ôte le second membre de la première égalité.

$\frac{2 a^3 + 2 b - 2}{\times x}$

donne $3 a^3 x + 4 b x - 4 x$.

C'est-à-dire de $5 a^3 + 6 b$, second membre de la 2°. égalité.

ôtant $2 a^3 + 2 b$, second membre de la 1°. égalité.

reste $3 a^3 + 4 b$

qui multiplié $\times x$

donne $3 a^3 x + 4 b x$ pour la troisième égalité réduite, où x est trop grand.

6°. Pour avoir la quatrième égalité réduite, $3 a^3 x + 4 b x - 4 x$, il suffit d'ôter un demi de la troisième égalité, ce qui se fait en ajoutant $- 4 x$, ce qui donne la quatrième égalité réduite.

$3 a^3 x + 4 b x - 4 x$, où x est trop petit.

ttij

7°. Voici les quatre égalitez réduites.

1^{re}. $12ax^3 = 6a^4 + 6ab - 9a^3x$, où x est trop petit.

2^{de}. $12ax^3 = 6a^4 + 6ab + 6a - 9a^3x$, où x est trop grand.

3^e. $12ax^3 = 3a^3x + 4bx$, où x est trop grand.

4^e. $12ax^3 = 3a^3x + 4bx - 4x$, où x est trop petit.

8°. Enfin pour avoir les formules d'approximation, je compare la première & la seconde égalité en négligeant le premier membre qui est par tout égal.

J'ai $6a^4 + 6ab - 9a^3x = 3a^3x + 4bx$,

donc $6a^4 + 6ab = 12a^3x + 4bx$, & dégagant

l'inconnue x , j'ai $x = \frac{6a^4 + 6ab}{12a^3 + 4b} = \frac{3a^4 + 3ab}{6a^3 + 2b}$

donc $x = \frac{1}{2}a + \frac{2ab}{6a^3 + 2b}$, car $\frac{6a^4}{12a^3} = \frac{1}{2}a$, & $2b \times \frac{1}{2}a$

$= 1ab$, or $3ab - 1ab = 2ab$ numérateur de la fraction, qui

réduite à moindres termes donne $x = \frac{1}{2}a + \frac{ab}{3a^3 + b}$

Voilà la première formule trouvée.

De même comparant la seconde & la quatrième égalité réduites, j'ai

$6a^4 + 6ab + 6a - 9a^3x = 3a^3x + 4bx - 4x$

ce qui donne par transposition

$6a^4 + 6ab + 6a = 12a^3x + 4bx - 4x$,

& dégagant x , j'ai

$x = \frac{6a^4 + 6ab + 6a}{12a^3 + 4b - 4} = \frac{3a^4 + 3ab + 3a}{6a^3 + 2b - 2}$, ou $x = \frac{3}{2}a$

$+ \frac{2ab + 2a}{6a^3 + 2b - 2}$,

car $2b \times \frac{1}{2}a = 1ab$, $3ab - 1ab = 2ab$, de même

$2 \times \frac{1}{2}a = 1a$, or $1a$, ôté de $3a$, reste $+ 2a$ qui sont les deux termes du numérateur.

Donc la seconde formule d'approximation pour les racines des troisièmes puissances imparfaites est $x = \frac{1}{2}a$

$+ \frac{2ab + 2a}{6a^3 + 2b - 2}$.

Remarque. La première formule est la plus simple & suffit seule dans la pratique, elle donne toujours une valeur de x trop petite, mais elle en approche indéfiniment, ce qui vient de ce que le dénominateur est trop grand, & le numérateur trop petit.

Mais si on compare la première formule avec la seconde, on trouve que la différence des deux valeurs

de x , est $\frac{6a^4 + 3ab}{9a^6 + 6a^3b + bb - 3a^3 - b}$,

donc l'erreur dans la racine est d'environ $\frac{2}{3} aa$ au plus, & cette détermination est plus exacte que celle qui se tire *à posteriori*, en élevant au cube la racine trouvée; cette Méthode est générale, il est facile de l'appliquer de même à toutes les autres formules d'une égalité quelconque pure ou affectée.

PROBLEME VI.

Usage de la première formule d'approximation pour les puissances imparfaites du troisième degré.

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{ab}{3a^3 + b}$$

Les règles précédentes s'éclairciront par les exemples en nombres qui suivent.

Soit $z^3 = 100 = 64 + 36 = a^3 + b$. Donc $a = 4$, & $b = 36$.

Première racine approchée, reste 36.

$$\text{Donc } z = \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{64 + 36} = \sqrt[3]{a^3 + b}.$$

$$\text{Donc } z = x + \frac{1}{2}a, \text{ or } a = 4. \text{ Donc } z = x + 2.$$

Dans la formule $x = \frac{1}{2}a + \frac{ab}{3a^3 + b}$ substituant les valeurs de a & de b , j'ai $x = 2 + \frac{4 \times 36}{3 \times 64 + 36}$.

$$\text{Donc } x = 2 + \frac{144}{192 + 36} = 2 + \frac{144}{228} = 2 + \frac{12}{19}.$$

$$\text{Donc } z = 4 + \frac{12}{19} = \frac{88}{19}; \text{ c'est la seconde racine ap-}$$

22 *iiij.*

Prochée ; je cube ces deux nombres, & j'ai $99 + \frac{343}{6859}$ qui diffère de 100 de moins d'une unité ; cette différence est $\frac{4428}{6859}$ environ de deux tiers.

Pour avoir une troisième racine encore plus approchée, je suppose la seconde racine trouvée $4 + \frac{12}{19} = a$, & la différence trouvée $\frac{4428}{6859} = b$; ensuite substituant ces valeurs dans la même formule $a + \frac{ab}{3a^2 + b}$ la substitution donne

$$4 + \frac{12}{19} + \frac{4 \frac{12}{19} \times \frac{4428}{6859}}{3 \times 4 \frac{12}{19} + \frac{4428}{6859}}, \text{ ou } \frac{88}{19} + \frac{\frac{88}{19} \times \frac{4428}{6859}}{3 \times \frac{88}{19} + \frac{4428}{6859}}.$$

Pour continuer après avoir trouvé la troisième racine approchée, je la suppose $= a$, & sa différence égale à b , & substituant leurs valeurs dans la même formule

$a + \frac{ab}{3a^2 + b}$, j'approcherai toujours à l'infini de la racine cherchée.

PROBLÈME VII.

Usage de la seconde formule pour les puissances imparfaites du troisième degré.

$$z^3 = a^3 - b.$$

Une puissance imparfaite du troisième degré peut être comparée ou avec une troisième puissance parfaite plus petite comme $100 = 64 + 36$, & dans ce cas je me sers de la formule $z = a + \frac{ab}{3a^2 + b}$, ou avec une troisième puissance plus grande comme $100 = 125 - 25$; & dans ce cas je me sers de la formule $z = a - \frac{ab}{3a^2 - b}$ semblable, mais dont les signes sont contraires.

Nous avons donné un exemple du premier cas, en voici un dans le second cas.

$$\text{Soit } z^3 = a^3 - b, \text{ ou } z^3 = 100 = 125 - 25.$$

Donc $z = a - \frac{ab}{3a^3 - b}$, soit $a = 5$. Donc $b = 25$, substituant ces valeurs dans la formule, j'ai

$5 - \frac{5 \times 25}{3 \times 125 - 25} \left(= \frac{125}{350} \right) = 5 - \frac{5}{14} = \frac{65}{14} = 4 \frac{9}{14}$
dont le cube est $100 - \frac{225}{1744}$ qui approche de 100 à moins d'une unité près.

Pour avoir une autre racine encore plus approchée, je suppose la racine trouvée $4 \frac{9}{14} = a$, & la différence $\frac{225}{1744} = b$, je substitue ces valeurs dans la formule $z = a - \frac{ab}{3a^3 - b}$, la substitution me donnera une racine plus approchée, & continuant de même on en approchera toujours de plus en plus à l'infini.

Examen de l'avantage des deux formules d'approximation du troisième degré, ou de la formule générale d'approximation du troisième degré.

$$z = a \pm \frac{ab}{3a^3 \pm b}$$

Pour comparer l'avantage des deux cas de la formule, dont le 1^{er}. a le signe $+$, & le second le signe $-$, je considère le rapport le plus simple que j'ai trouvé pour la racine cubique de 100, la formule $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$ m'a donné $\frac{88}{19}$ & la formule $a - \frac{ab}{3a^3 - b}$ m'a donné $\frac{65}{14}$ je réduis ces deux rapports en nombres de la dixme, ajoutant des zéros au dividende & par la division je trouve, comme il suit

$$\frac{88}{19} = 4 : \frac{63.15.8-}{1.00.00.0}$$

$$\& \frac{65}{14} = 4 : \frac{64.28.5+}{1.00.00.0}$$

Diviseur. { Dividende. { Quotient.
 19 { 88:0000 { 4: 63. 15. 8—

4 . . . 76
 12:0
 6 . . . 11 4
 6:0
 3 5 7
 3:0
 1 1 9
 1 1:0
 5 9 5
 1 5:0
 8 — 1 5 2
 — 2

Diviseur. { Dividende. { Quotient.
 14. { 65:0000 { 4: 64. 28. 5—+

4 . . . 56
 9:0
 6 . . . 8 4
 6:0
 4 5 6
 4:0
 2 2 8
 1 2:0
 8 1 1 2
 8:0
 5 —+ 7 0.
 —+ 1 0.

PROBLEME VIII.

*Trouver les limites dans chaque formule d'approximation
 du troisième degré.*

Première Méthode. Puisqu'en général deux cubes qui
 se

se suivent immédiatement sont a^3 , & $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, & que tout cube imparfait s'exprime en général par $z^3 = a^3 + b$. Il suit de là que b est l'excès ou la différence du cube a^3 & du cube imparfait $z^3 = a^3 + b$. Donc les valeurs de b dans $a^3 + b$ croissent. *Exemple.* Depuis le cube 27 au cube 64, les valeurs de b croissent depuis 1, jusques à $3aa + 3a$ inclusivement, car $3aa + 3a + 1$ donne précisément le cube suivant au-dessus; au contraire dans $a^3 - b$, les valeurs de b décroissent jusqu'à $3aa - 3a$ inclusivement, du cube 64 dont la racine est 4, au cube 27 dont la racine est 3, j'ai $a = 4$, $aa = 16$. Donc $3aa = 3 \times 16 = 48$, or $48 - 3a = 48 - 12 = 36$, or $64 - 36 = 28 = 27 + 1$.

En général, la véritable valeur de z dans $z^3 = a^3 + b$ est entre $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}}$, & $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b-1}{3a}}$; ainsi élevant à la troisième puissance chacune des racines trouvées, on trouve l'erreur en les comparant avec la troisième puissance proposée, ce qui donne les limites par excès ou par défaut.

Seconde Méthode, pour avoir les formules d'approximation des troisièmes puissances imparfaites.

Soit le cube imparfait $z^3 = a^3 + b$, dont la première racine approchée est a , pour avoir la seconde racine approchée, je cube la racine trouvée a , j'ôte son cube a^3 du cube imparfait proposé $a^3 + b$, & je suppose le reste $= c$.

Ensuite je prends la formule $c \pm \frac{cd}{c^2 + d}$ & substituant des nombres à la place des lettres, j'ai la seconde racine cubique approchée.

Continuant de même l'opération, j'approcherai toujours de plus en plus de la racine désirée.

Analyse.

##

Ensuite élevant à la troisième puissance la racine trouvée par approximation, & comparant cette troisième puissance avec la proposée, on connoîtra l'erreur par excès ou par défaut.

SECTION DEUXIÈME.

Méthode nouvelle & abrégée pour l'extraction des Racines des puissances imparfaites de tous les degrez à l'infini.

Définitions. 1^o. Une puissance parfaite est celle qui contient le produit d'un nombre par lui-même autant de fois moins une, que l'exposant de son degré contient d'unités; ainsi 4 est la seconde puissance de 2 multipliée une fois; c'est-à-dire deux fois moins une par lui-même, parce que 2 est l'exposant de la seconde puissance.

De même comme l'exposant de la troisième puissance est 3, 8 est la troisième puissance de 2, c'est le produit de 2 multiplié deux fois par lui-même ou 3 — 1 fois, &c.

2^o. Je nomme une puissance numérique *complète*; par exemple du second degré, celle qui est exprimée par un nombre de chiffres égal à l'exposant 2 du second degré, ou à quelqu'une des puissances de cet exposant 2, tels

1^{re}. 2^{de}. 3^e. 4^e. 5^e. 6^e. puissance.
que sont 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c.

Ainsi 49. carré rationnel & 51 irrationnel, sont des puissances complètes exprimées par deux chiffres; 1369 carré rationnel; & 13. 04. carré irrationnel sont des puissances complètes exprimées par quatre chiffres, de même 61. 66. 96. 09. carré irrationnel, est une seconde puissance complète exprimée par huit chiffres.

Pareillement dans la troisième puissance dont l'expo-

sant est 3, je nomme troisième puissance *complète* celle qui est exprimée ou par trois chiffres ou par un nombre de chiffres qui est une puissance de 3, comme

1^{re}. 2^{de}. 3^e. 4^e. puissance.

3. 9. 27. 81.

Ainsi 343 est une puissance parfaite ou rationnelle mais *complète*, exprimée par trois chiffres, & 453 est un troisième puissance imparfaite ou irrationnelle, mais *complète* exprimée par trois chiffres.

De même 151. 893. 679. est une troisième puissance *complète*, parce qu'elle est exprimée par neuf chiffres, & que 9 est une puissance de 3. & ainsi des autres.

3^o. Je nomme puissance *incomplète* celle qui est exprimée par un nombre de chiffres qui n'est pas égal à quelque puissance de l'exposant de son degré. Ainsi 834 est un quarré incomplet, parce qu'il est exprimé par trois chiffres, or 3 n'est pas une puissance de son exposant 2. De même 34332 est une seconde puissance incomplète, car elle est exprimée par cinq chiffres, & 5 n'est pas une puissance de l'exposant 2.

Première formation des Tranches de chiffres.

4^o. Je coupe les puissances complètes par des tranches de chiffres *proportionnelles* de gauche à droite, au lieu que dans la Méthode ordinaire on coupe les tranches des chiffres en commençant de droite à gauche; or ces tranches proportionnelles contiennent un nombre de chiffres qui sont dans la proportion géométrique de l'exposant du degré de la puissance

Dans le second degré où $p = 2$.

La première tranche qui est la plus à gauche aura deux chiffres, car $p = 2$.

La seconde tranche aura encore deux chiffres, suivant la formule $pp - p = 4 - 2 = 2$.

uu ij

La troisième tranche aura quatre chiffres , suivant la formule $p^3 - p^2 = 8 - 4 = 4$.

La quatrième tranche aura huit chiffres , suivant la formule $p^4 - p^3 = 16 - 8 = 8$.

La cinquième tranche aura seize chiffres , suivant la formule $p^5 - p^4 = 32 - 16 = 16$.

La sixième tranche aura trente-deux chiffres , suivant la formule $p^6 - p^5 = 64 - 32 = 32$.

La septième tranche aura soixante-quatre chiffres , suivant la formule $p^7 - p^6 = 128 - 64 = 64$, &c ainsi de suite à l'infini.

Ainsi si j'avois un nombre composé de soixante-quatre chiffres , au lieu de le couper en 32 tranches de deux chiffres chacune de droite à gauche comme dans la Méthode ordinaire , au contraire je le couperois en commençant de gauche à droite en six tranches seulement, suivant la progression suivante qui exprime le nombre des chiffres

1 ^{re} . tranche		2 ^{de} .		3 ^e .		4 ^e .		5 ^e .		6 ^e .		tranche.
2.		2.		3.		4.		5.		6.		= 64 chiffres.

Exemple. Soit proposé de trouver la racine quarrée du nombre qui suit, je le coupe par cinq tranches.

nombre 67 : 83 : 7173 : 9000 8151 : 3075. 9498. 9304.
tranches 1^{re}. 2^{de}. 3^e. 4^e. 5^e. tranche
chiffres 2 . 2 . . 4 . 8 16 chiffres.

Enfin la dernière tranche dans les puissances complètes aura le nombre de chiffres déterminé par cette formule $p^q - p^{q-1}$ dans laquelle je suppose , que p^q exprime la somme du nombre des chiffres proposé , c'est-à-dire que le nombre q est une puissance quelconque de l'exposant p de la puissance proposée.

En général dans les puissances complètes, j'observe dans la division des tranches la proportion géomé-

trique, ainsi dans le cube, la première tranche a trois chiffres, la seconde six chiffres, la troisième tranche a dix-huit chiffres; ainsi la première contient trois chiffres, les deux premières neuf chiffres, les trois premières vingt-sept chiffres; ce qui fait cette progression géométrique, 3. 9. 27. ce qu'il faut observer.

Dans le troisième degré ou la troisième puissance dont l'exposant est $3 = p$, je prends les puissances de 3 que je substitue dans la formule en la place des puissances de p .

Ainsi la première tranche à gauche aura trois chiffres puisque $p = 3$.

La seconde tranche aura six chiffres, suivant la formule $p^2 - p = 9 - 3 = 6$.

La troisième tranche aura dix-huit chiffres, suivant la formule $p^3 - p^2 = 27 - 9 = 18$.

La quatrième tranche aura cinquante-quatre chiffres, suivant la formule $p^4 - p^3 = 81 - 27 = 54$, &c.

Exemple. Dans le cube suivant j'ai les tranches comme il suit.

cube	711.	806.	345.	800.	374.	943.	812.	214.	503.
tranches	1 ^{re} .	. .	2 ^{de}	3 ^e .	tranche.			
nombre des									
chiffres.	3	6	18.	chiffres.			

Pareillement dans la quatrième puissance, dont l'exposant est $4 = p$.

1^{re}. tranche $p = 4$ chiffres.

2^{de}. tranche $p^2 - p = 16 - 4 = 12$ chiffres.

3^e. tranche $p^3 - p^2 = 64 - 16 = 48$ chiffres, &c.

De même dans la cinquième puissance dont l'exposant est $5 = p$, on substitue cette valeur & ses puissances dans la formule, ce qui donne pour le nombre des chiffres de chaque tranche; sçavoir,

La première tranche $p = 5$ chiffres.

La seconde tranche $p^2 \text{ --- } p \text{ --- } 25 \text{ --- } 5 \text{ --- } 20$ chiffres.

La troisième tranche $p^3 \text{ --- } p^2 \text{ --- } 125 \text{ --- } 25 \text{ --- } 100$ chiffres.

Total 125 chiffres partagez seulement en trois tranches, au lieu de 25 tranches de 5 chiffres chacune dans la Méthode ordinaire. •

Remarque. La dernière tranche qui est vers la droite contient beaucoup plus de chiffres que celles qui sont vers la gauche, & il est indéfiniment plus difficile d'en trouver la racine que des tranches précédentes à gauche par la Méthode ordinaire, mais dans celle-ci, il est plus facile d'en trouver la racine, & on peut même négliger cette dernière tranche toute entière, & c'est un vrai paradoxe, car elle est moindre que l'unité.

Division des tranches de chiffres pour les puissances imparfaites incomplètes.

5°. Dans les puissances incomplètes, qui sont celles qui sont exprimées par un nombre de chiffres qui n'est point une puissance de l'exposant du même degré, lorsque le nombre des chiffres surpasse une puissance de l'exposant du même degré, comme une seconde puissance 384, qui est exprimé par trois chiffres, or 3 surpasse l'exposant 2 de la seconde puissance; alors la première tranche contient ou autant de chiffres que cet exposant 2 contient d'unités, ou bien la première tranche contient autant de chiffres qu'il en reste après avoir divisé le nombre des chiffres de la puissance proposée par l'exposant même de cette puissance.

Les tranches suivantes contiennent autant de chiffres que dans les puissances complètes ci-dessus, excepté la dernière tranche qui en contient moins.

Par exemple, le carré 52. 38 53. 46. 86. 14. 59. est une seconde puissance incomplète, puisqu'elle est exprimée par 14 chiffres, & que 14 n'est pas une puis-

sance de l'exposant $2 = p$, qui est celui de la seconde puissance.

Sa première tranche proportionnelle est 52, de deux chiffres & les autres comme dans l'opération suivante.

Quarré incomplet	52.	38.	5346.	861459.
tranches . . .	1 ^{re} .	2 ^{de} .	3 ^e .	4 ^e . tranche.
chifres. . . .	2 . .	2.	4 . .	6 chifres.

Au lieu que dans les puissances complètes la quatrième tranche contient huit chiffres.

De même dans le quarré suivant exprimé par 13 chiffres.

Quarré incomplet	2.	38.	5346.	861459.
tranches . . .	1 ^{re} .	2 ^{de} .	3 ^e .	4 ^e . tranche.
chifres . . .	1. .	2. .	4. .	6 chifres.

Parce que 13 nombre des chiffres étant divisé par 2, exposant de la seconde puissance, il reste 1, & les autres sont comme dans l'exemple précédent.

Pareillement dans le cube incomplet 59. 985256. la première tranche 56 contient deux chiffres, & la seconde contient six chiffres.

En général dans toute puissance incomplète, c'est-à-dire dans laquelle le nombre des chiffres n'est pas une puissance exacte du même degré que la racine cherchée, il faut dans la division des tranches observer la proportion géométrique la plus approchante.

Par exemple, soit une troisième puissance proposée exprimée par 24 chiffres, comme 24 n'est pas une puissance de 3 qui est l'exposant de la troisième puissance, mais se trouve compris entre deux puissances consécutives de 3 qui sont 9 & 27, & que 24 approche plus de 27 que de 9, je divise le cube proposé en trois tranches comme s'il avoit 27 chiffres, alors la première aura trois chiffres, & la seconde tranche six chiffres, ainsi elles se-

ront complètes, mais la troisième tranche sera incomplète, & n'aura que les 15 chiffres suivans, au lieu qu'elle devoit avoir 18 chiffres pour être complète.

Si le cube proposé n'avoit que 12 ou 15 chiffres, je le diviserois seulement en deux tranches, comme s'il n'avoit que 9 chiffres, parce que 12 & 15 sont plus proches de 9 seconde puissance de 3, exposant de la troisième puissance, que de 27 qui est la troisième puissance, & dans ce cas je donne 6 chiffres à la première tranche, & la seconde tranche contient les autres derniers chiffres, six ou neuf restans; mais alors il faut suivre la Méthode ordinaire pour tirer la racine de la première tranche.

Enfin si le cube proposé contient 18 chiffres, je peux le diviser ou en deux tranches selon cette progression géométrique double 6. 12. ou en trois tranches selon celle-ci, 3. 6. 9. parce que 18 est également éloigné de 9, seconde puissance de 3, & de 27 qui est la troisième puissance.

La première division 6. 12 est plus commode & plus abrégée.

Mais si le nombre des chiffres de la puissance proposée n'est pas précisément un multiple de 3, il faut alors ou le rendre multiple en le multipliant par 9. 27. &c. ou prendre pour la première tranche, trois chiffres de plus, ce qui est plus commode que la multiplication, ce qui est général pour toutes les autres puissances supérieures.

Seconde Manière de diviser par tranches une puissance imparfaite & incomplète.

Il y a encore une autre manière de couper par tranches les puissances incomplètes, elle consiste à prendre la première tranche un peu plus grande, & à augmenter les autres dans la même proportion, en sorte que la dernière
tranche

tranche soit la plus grande qu'il soit possible, & qu'il y ait aussi le moins de tranches qu'il se peut.

Autrement. Dans le quarré, par exemple, au lieu de prendre la dernière moitié pour en trouver la valeur par simple division, on peut ne prendre que le dernier tiers, supposé que la première tranche soit plus petite que 25.

Ainsi dans $\sqrt[3]{3.00.00. \&c.}$ où la première tranche du quarré est seulement 3, qui est bien moindre que 25, après avoir trouvé les seize premiers chiffres, on trouvera les huit derniers suivant la formule $a \rightarrow \frac{b}{2a}$, & $a \rightarrow \frac{b-1}{2a}$.

6°. Je nomme *première tranche proportionnelle complète*, celle qui est telle, que la racine étant augmentée d'une unité, & élevée ensuite à la même puissance, il se trouve au moins une unité franche de plus dans le dernier chiffre de cette première tranche, par exemple, dans le cube 958. 585256.

La première tranche 958 est complète, parce que la racine de ce cube étant 986, si je l'augmente de l'unité j'aurai 987, dont le cube 961 : 504803, a pour sa première tranche 961 qui surpasse l'autre première tranche 958 de plus d'une unité franche, aiant égard aux chiffres suivans.

Mais dans le cube 64 : 964808, la première tranche 64 n'est pas complète, quoique dans le cube immédiatement suivant 65 : 450827, la première tranche 65 surpasse d'une unité l'autre première tranche 64, parce que les chiffres qui suivent 64 sont plus grands que ceux qui suivent 65.

On verra dans la suite l'usage de ces définitions.

Théorème second & fondamental.

Si on élève deux nombres consécutifs a & $a+1$ à une puissance quelconque dont l'exposant soit p , & que

Analyse.

xx

$$\frac{m^p}{p-1} \sqrt[p]{p^p}$$

soit égal ou plus petit que la première tranche proportionnelle de la puissance p ; je dis que la première tranche proportionnelle de a^p surpassera de plus d'une unité franche la première tranche proportionnelle de $a-1$.

Soit $m = 10$, & $p = 2$, on aura $\sqrt{\frac{m^2}{4}} = 5$. Je dis que dans tout nombre dont la première figure est 5, ou au-dessus, & par conséquent dans tout carré dont la première tranche est 25, ou au-dessus jusqu'à 99 inclusivement, la première moitié est surpassée au moins d'une unité franche par la première moitié du carré prochainement plus grand.

Par exemple. Le carré de 50 est 25. 00. celui de 51 est 26. 01, dont la première moitié des chiffres 26 surpassé d'une unité franche la première moitié 25 des chiffres dans 2500.

De même dans le carré de 5833, qui est 3402. 3839. & le carré de 5832, qui est 3401. 2224. La première moitié 3402 du premier carré, surpassé d'une unité franche la première moitié 3401. du second carré.

Mais les carrés du premier exemple de 50 & 51 sont les premiers & les plus petits nombres où cette différence se trouve, car le carré de 49 est 2401. & celui de 50 est 25. 00; il y a moins d'une unité franche à cause du dernier chiffre 1. qui est le quatrième dans 2401.

Dans la quatrième puissance, la formule est $\sqrt[4]{\frac{10}{4}}$

$$= \sqrt[4]{\frac{10.00}{4}} = \sqrt[4]{250} = 6.300-+ \text{ \& } 6301-.$$

La quatrième puissance de 6.300. est 1574-+, & celle de 6301 est 1575-—, tranche cherchée.

Dans la 3^e. puissance, soit encore $m = 10$, & $p = 3$,
l'on aura

$$\frac{m^p}{\sqrt[p]{p^p}} = \frac{10.00}{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[2]{370.37} = 192 + \text{ou } 193 -$$

$$= \sqrt[3]{33.33, \&c.} = 5.773503 -$$

ou $\sqrt[p-1]{\frac{m^{pp-1p}}{p^p}}$ Mais supposant $m = 7$, & $p = 2$

$= 3$, &c. l'on trouvera $\frac{100}{4} = \frac{49}{4} = 12 \frac{1}{4} = 15 \frac{1}{4}$, ou 16.

Dans le cube c'est $\frac{1000}{\sqrt[3]{27}} = \frac{343}{\sqrt[3]{36}} = \sqrt[2]{\frac{2000.000}{27}}$

quarré $= \sqrt{370.37} + = 192 + \& 193 -$, tranche
cherchée.

Je dis que dans tout cube, dont la première tranche
est 5 ou au-dessus jusqu'à 999 inclusivement, le premier
tiers est surpassé au moins d'une unité franche par le pre-
mier tiers du cube prochainement plus grand.

Par exemple. Le cube de 577 est 192. 100. 033. & le
cube de 578 est 193. 100. 552.

Le premier tiers à gauche du second cube 193 surpasse
le premier tiers 192 du premier cube d'une unité franche,
& ces deux cubes sont les premiers & plus petits nombres

où cette différence se trouve, puisque $\frac{10}{\sqrt[3]{3}} = 5.77 +$

ou 5.78 —, car le cube de 576 $= 191. 102. 976$. dans
lequel ce rapport ne se trouve point.

L E M M E.

Élever tout d'un coup un binôme quelconque $a \pm b$ à une puissance d'un degré quelconque dont l'exposant soit p .

Pour démontrer le Théorème précédent, j'ai besoin de ce Lemme.

Pour élever tout d'un coup un binôme quelconque $a \pm b$ à une puissance dont l'exposant est p . Sans passer par les puissances inférieures & sans le secours de la table des puissances, je me sers de cette forme générale,

$$a^p \pm p a^{p-1} b' + \frac{p p - p}{2} a^{p-2} b^2 \pm \frac{p^3 - 3 p p + 2 p}{6} a^{p-3} b^3.$$

&c. & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait trouvé la première moitié des termes dans les puissances impaires, ou la plus grande moitié dans les puissances paires, c'est-à-dire, jusqu'à ce que $a^{p-n} b^n$ soit égal à $a^{\frac{1}{2}p} b^{\frac{1}{2}p}$ dans les puissances paires, & $a^{\frac{p+1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}}$ dans les puissances impaires, car alors on reprend dans un ordre contraire les mêmes multiplicateurs pour les termes de la puissance de a qui sont également éloignés des deux extrêmes a^p , & b^p .

Exemple. Pour avoir la septième puissance de $a \pm b$, alors $p = 7$. Il y a huit termes dans cette puissance puisqu'il y en a toujours un de plus que son exposant 7. Il faut donc trouver seulement quatre termes dans lesquels, je substitue 7 à la place de p , & les puissances de 7 à la place des puissances de p , ce qui donne

1^e. 2^d. 3^e. 4^e.
 $1 a^7 \pm 7 a^6 b^1 \pm 21 a^4 b^2 \pm 35 a^4 b^3$. pour former les quatre derniers termes, j'écris les mêmes nombres dans un ordre contraire, en même tems je diminue de l'unité les puissances de a & j'augmente de l'unité les puissances de b , ce qui donne

5^e. 6^e. 7^e. 8^e. & dernier
 $\pm 35 a^3 b^4 \pm 21 a^2 b^5 \pm 7 a^1 b^6 \pm 1 b^7$. terme.

Voilà tous les termes de la septième puissance de $a + b$ que l'on peut ranger de suite.

Les puissances de a & de b se trouvent facilement, dans le premier terme l'exposant de a est seul & sans b , il est égal à l'exposant 7 de la puissance désirée; toutes les autres puissances de a décroissent de l'unité d'un terme à l'autre jusqu'au dernier terme où a ne se trouve plus.

Au contraire b ne se trouve point au premier terme, dans le second terme son exposant est 1, qui croît de l'unité d'un terme au suivant jusqu'au dernier terme où b se trouve seul & son exposant est égal à celui de la puissance.

La difficulté consiste à trouver les nombres qui multiplient les termes moïens, qui sont

$$\frac{p}{1}, \frac{pp-1p}{2}, \frac{p^3-3pp+2p}{6}, \frac{p^4-6p^3+11p^2-6p}{24}$$

Or ces numérateurs sont formez par la multiplication continuelle de $1 \times p = p$, de $p \times p - 1 = pp - 1p$, de $pp - 1 \times p - 2 = p^3 - 3pp + 2p$, de $p^3 - 3p^2 + 2p \times p - 3 = p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p$.

Ainsi les multiplicateurs $p-1, p-2, p-3, p-4$, &c. sont la suite des nombres naturels.

Le multiplié du terme suivant est toujours le terme précédent tout entier.

Les dénominateurs se forment par la multiplication des nombres pris dans la suite naturelle $1 \times 1 = 1$, $1 \times 2 = 2$, $1 \times 2 \times 3 = 6$, $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, &c. ou simplement 1. $1 \times 2 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $6 \times 4 = 24$, $24 \times 5 = 120$, &c.

Démonstration du second Théorème fondamental.

Si $b=1$, alors les termes moïens de la formule générale des puissances contenues dans le Lemme précédent n'aura plus de b , puisque l'unité ne multiplie point, & cette formule sera réduite à cette expression plus simple $pa^{p-1} + \frac{pp-1p}{2}$

a^{p-1} &c. Or, afin que la somme de ses termes moïens, c'est-à-dire, la différence des puissances de a & de $a+1$, fasse dans le cas le plus simple qui soit possible, une unité de différence dans la pénultième tranche proportionnelle de la puissance a^p . Il faut supposer a exprimé par une seule figure significative, suivie d'un nombre de zéros quelconque : car si dans ce cas la puissance de $a+1$ excède d'une unité dans la tranche pénultième la puissance semblable de a , il est évident que dans tous les nombres au-dessus, la différence étant plus grande, il y aura toujours plus d'une unité de différence. Il faut donc égaler la somme des termes moïens de $a+1$ avec 10, ou généralement avec m , & on aura l'égalité universelle à résoudre

$$pa^{p-1} + \frac{pp-1}{2} a^{p-2} \&c. = m. \text{ Ensuite négligeant}$$

tous les termes excepté le premier, parce que ce sont des infiniment petits qui n'ont aucun rapport sensible avec ce premier terme. Il suffit donc d'égaliser $pa^{p-1} = m$.

ce qui donne $a = \sqrt[p-1]{\frac{m}{p}}$ comme nous l'avons trouvé ci-dessus. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque. 1^o. Cette détermination de la valeur de a , est la seule qui puisse satisfaire universellement. Mais si on veut la déterminer en nombres rationaux, on trouvera que $a = 5$ dans le quarré, que $a = 6$ dans la troisième puissance, que $a = 7$ dans la quatrième puissance, &c. Ce qui revient au même, & ce qui est plus commode pour chaque cas particulier.

Remarque. 2^o. Comme la puissance est toujours donnée, & qu'il s'agit d'en trouver la racine, il sera plus utile & plus exact de trouver directement les limites de cette première tranche proportionnelle, car on la trouvera 1^o. par cette formule générale $\frac{100}{4} = 25$ dans la seconde puissance.

- 2°. Par celle-ci $\sqrt[p-1]{\frac{1000.000}{27}} = \sqrt[p-1]{3.7037 \dots}$
 $= 192 +$ ou $193 -$ dans la troisième puissance.
 3°. Par celle-ci $\sqrt[p-1]{\frac{10000.0000}{256}} = \sqrt[p-1]{3.906.250000}$
 $= 1574 +$, ou $1575 -$ dans la quatrième puissance.
 4°. Par celle-ci $\sqrt[p-1]{\frac{100000}{3125}} = 13374 +$, $13375 -$
 dans la cinquième puissance.

Enfin, on la trouvera généralement par cette formule

universelle $\sqrt[p-1]{\frac{m^{2p}}{p^p}}$, ou par celle-ci

$$\sqrt[p-1]{\frac{m^{pp-1p}}{p^p}} \quad \text{ou} \quad \frac{10^p}{\sqrt[p-1]{p^p}}$$

PROBLEME GENERAL.

Tirer la racine d'une puissance quelconque par une Méthode plus courte que la Méthode ordinaire.

1°. Je divise les chiffres de la puissance proposée en tranches proportionnelles, comme il est expliqué ci-dessus.

2°. Je tire la racine approchée de la première tranche seulement, par la Méthode des formules rationnelles expliquées dans la première section de ce livre.

3°. J'ajoute au numérateur de la fraction trouvée autant de zéros que la tranche suivante doit contenir de chiffres dans la racine, c'est-à-dire, autant que $p - 1$ contient d'unités, je divise ce numérateur par le dénominateur; la division simple donnera tout d'un coup tous les chiffres de la seconde tranche en entiers.

4°. Je tire la racine approchée des deux premières tranches, j'ajoute au numérateur de la fraction trouvée par cette opération, autant de zéros que la troisième tranche proportionnelle doit contenir de chiffres dans la racine, c'est-à-dire autant que $pp - p$ contient d'unités, ensuite je divise ce numérateur par le dénominateur & la division, donne tout d'un coup tous les chiffres de la troisième tranche, & ainsi de suite jusqu'au dernier.

Les plus grands nombres qui tombent dans la pratique, n'ont que trois ou quatre tranches dans le carré & dans la troisième puissance, & tout au plus deux tranches dans les puissances plus élevées.

Je suppose que la première tranche est complète, & que l'approximation soit telle que l'erreur, soit de moins d'une unité près dans la puissance; or il est toujours facile de donner cette forme à la puissance proposée, soit par une simple multiplication, soit en prenant un chiffre de plus pour racine de la première tranche, lorsqu'on ne veut point faire de multiplication; soit enfin en ajoutant ou en retranchant quelque unité dans le dernier chiffre, selon que l'approximation est en dessous ou en dessus.

Démonstration de cette Méthode.

Puisque la racine trouvée par les formules d'approximation contenues dans la première section, diffère par construction de moins d'une unité dans la puissance, d'avec la première tranche proportionnelle, & que selon l'hypothèse la puissance semblable d'un nombre prochainement

changement plus grand ou plus petit, diffère de plus d'une unité dans cette même tranche proportionnelle, il suit de-là évidemment que la valeur trouvée par la Méthode sera moyenne entre la racine exacte & celle qui est plus grande ou plus petite d'une unité, donc cette valeur différera de moins d'une unité, ce qu'il falloit démontrer.

Premier Exemple pour la racine quarrée.

Soit un nombre de seize chiffres, dont on demande la racine quarrée, 1°. Je divise ce nombre en quatre tranches proportionnelles, comme il suit.

1 ^{re} .	2 ^{de} .	3 ^e .	4 ^e . tranche.
31.	62.	2777.	00000000.

2°. Je me sers de la formule d'approximation $a + \frac{b}{2a}$ qui donne la racine trop grande, ou bien de celle-ci $a - \frac{b}{2a}$ qui donne la racine trop petite, ce qui sert à me régler pour les derniers chiffres du quotient.

3°. Je tire la racine approchée de la première tranche $31 \equiv aa + b$, c'est $5 \equiv a$, or $5 \times 5 \equiv 25 \equiv aa$, & $31 - 25$; reste $6 \equiv b$, j'ajoute zéro à 6, c'est $60 \equiv b$.

Je double $5 \equiv a$, c'est $10 \equiv 2a$ par lequel je divise 60, c'est $\frac{b}{2a}$ ou $\frac{60}{10}$, le quotient est 6 qui est la seconde partie de la racine renfermée dans la seconde tranche, ensuite je quarre 6, c'est $6 \times 6 \equiv 36 \equiv aa$ que j'ôte de la seconde tranche 62, reste $26 \equiv b$, jusqu'ici ma Méthode s'accorde avec l'ancienne: Voici ce qu'elle a de particulier.

5°. A ce reste 26 j'ajoute deux zéros, c'est 2600 que je divise par $112 \equiv 2a \equiv 56 \times 2$, le quotient est 23

Analyse.

yy

qui est la troisième partie de la racine , & il reste 24 que j'ajoute aux deux premiers chiffres de la troisième tranche 27 , ce qui donne pour cette troisième tranche 51 77 , dont j'ôte le carré de 23 qui est 529 , & il reste 4648 $\equiv b$, auquel j'ajoute quatre zéros , ce qui donne 4648. 00. 00. $\equiv b$.

6°. Je divise 4648 00 00. $\equiv b$ par 11246 $\equiv 24$, $\equiv 2 \times 5623$, & je prends le quotient 4132 pour la 4^{me} partie de la racine renfermée dans la 4^{me} tranche , & la ra-

1^{re}. 2^e. 3^e. 4^e.

cine cherchée est 5. 6. 23. 4132.

J'ai extrait par cette Méthode en une après dîner la racine carrée d'un nombre de 64 chiffres , & j'ai trouvé les trente-deux derniers par neuf additions simples , & 32 soustractions simples sans aucune extraction ni division , c'est un paradoxe , mais il est aisé d'en démontrer la vérité , j'en effaçai d'abord d'un coup de plume les 32 dernières figures comme inutiles , ce qui abrège beaucoup , & je divisai les trente-deux chiffres restans en six tranches proportionnelles.

Usage de cet Exemple. Il sert à trouver le Logarithme du nombre 9 , le Logarithme de l'unité étant 0. 0000. 0000. & celui de 10 , étant 10. 0000. 0000. il faut trouver vingt-six nombres moïens géométriques , dont les deux premiers extrêmes sont 1. 0000. 000. & 10. 0000. 000. & le premier moïen est 3. 1622. 777 qui est trop petit ; c'est pourquoi on continue l'opération dans la Méthode ordinaire , & on multiplie ce premier terme 3. 1622. 777. par 10. 0000. 000. & du produit 3. 1622. 777. 0000. 0000. il faut tirer la racine carrée , & c'est ce que nous venons de faire.

Second Exemple pour le cube.

Soit le cube proposé 819. 985256.

1°. Je le divise en deux tranches , la première a trois

chifres, & la seconde six chifres.

2°. Je cherche la racine de la première tranche par la formule d'approximation $a + \frac{ab}{3a^2 + b}$, or la racine cubique de 819 est $9 = a$, dont le cube est $729 = a^3$, qui ôté de 819, il reste $90 = b$.

3°. Je multiplie 90 par 9, a par b , ce qui donne $ab = 810$, auquel j'ajoute deux zéros, c'est 810.00, $= ab$ que je divise par $3a^2 + b = 2277$. le quotient 35 est la seconde partie de la racine contenue dans la seconde tranche, donc la racine approchée de ce cube imparfait est 9.35.

Il est facile de le vérifier par la multiplication en élevant au cube cette racine 935, car son cube est 817.400.375, qui étant ôté du cube proposé, il reste 2584.881.

Remarque. On doit toujours faire la preuve d'une tranche avant de passer à celle qui suit, mais on peut négliger la preuve dans la dernière tranche, parce qu'elle est inutile dans les puissances imparfaites ou irrationnelles qui sont les plus fréquentes, & dans lesquelles il suffit d'avoir la racine à moins de l'unité près, & c'est ce que l'on trouve toujours par les premières tranches en se servant de la première formule d'approximation.

Troisième Exemple. Soit le cube proposé 696.536483.31864.003507.3641037. qui a 27 chifres, & dont la racine doit avoir neuf chifres.

1°. Je le divise en trois tranches proportionnelles, la première contient les trois premiers chifres de gauche à droite, la seconde contient six chifres, & la troisième contient dix-huit chifres, lesquels je néglige entièrement comme inutiles dans ma Méthode.

2°. Je tire la racine cubique approchée des deux premières tranches comme dans l'exemple précédent, suivant la formule $a + \frac{ab}{3a^2 + b}$, ce qui donne pour les deux

premières parties de la racine les trois chiffres 8. 86.

$$\begin{array}{r} + \quad 912. 603. 922. \\ \hline 20. 87. 549. 395. \end{array}$$

3°. Pour trouver les six derniers chiffres de cette racine approchée, j'ajoute six zéros au numérateur de la fraction restante 912. 603. 922. 000. 000. & je le divise par son dénominateur 2087. 549. 395, je trouve le quotient 437. 166 pour la troisième partie de la racine que j'écris après les trois premiers chiffres trouvez 8. 86, ce qui donne pour la racine cubique du nombre proposé 8. 86. 437. 166. en nombres entiers.

J'ai pris ce nombre au hasard, il est un des moins favorables qu'on puisse choisir sur un pareil nombre de chiffres, on peut comparer dans cet exemple ma Méthode avec la méthode ordinaire, & l'expérience fera juger quelle est celle qui mérite la préférence; je pourrois encore apporter pour exemple l'extraction de la racine cubique d'un nombre exprimé par 81 chiffres, où je néglige entièrement la quatrième tranche qui contient les 54 derniers chiffres, où l'avantage de ma Méthode paroîtra encore plus grand; mais l'exemple précédent suffit pour juger de ses avantages.

SECTION TROISIÈME.

Résolution des équations irrationnelles par les formules rationnelles

LEs équations rationnelles de sont qu'une partie infiniment petite dans la série infinie des équations possibles dans chaque cas particulier, car entre deux homogènes quelconques de deux équations consécutives, il y a toujours en nombres entiers autant d'homogènes possibles qu'il y a d'unités dans la différence de ces deux homo-

gènes. Par exemple, entre les deux homogènes consécutifs 204 & 309, dont le premier est l'homogène de $z^2 = 100z + 204$, qui est une équation du second degré, dont la racine positive est $+102$, & la racine négative -2 , & le second qui est l'homogène de l'équation prochaine $z^2 = 100z + 309$, dont les racines sont $+103$, & -3 , il y a 105 homogènes en nombres entiers compris entre les deux, parce que c'est la différence (sans parler des fractions) de 204 à 309; or ces 105 homogènes ont leurs racines plus grandes que $+102$ & -2 , mais moindres que $+103$, & -3 , lesquelles racines ne diffèrent que de l'unité, par conséquent les deux racines de ces 105 homogènes sont irrationnelles, c'est-à-dire, qu'elles ne peuvent s'exprimer exactement par aucun nombre, soit entier soit rompu ou mixte, il s'agit d'en approcher par excès & par défaut à l'infini, il est évident qu'on peut trouver une série infinie de nombres qui donnent cette racine approchée de plus en plus par défaut, & une autre série de nombres qui donnent cette racine approchée de plus en plus par excès, de telle sorte que le dernier terme dans l'une & l'autre de ces séries, qui est l'infinièmes terme auquel il est impossible d'arriver, donneroit exactement cette racine, s'il étoit possible de le trouver, parce qu'alors le défaut ou l'excès seroit nul.

Ainsi comme il est impossible à l'esprit humain de trouver l'infinièmes terme de ces séries, ce qu'on peut faire de mieux est d'en approcher continuellement par une loi constante & égale fondée en démonstration, & de pousser cette approximation aussi loin qu'on voudra afin que l'erreur soit insensible; c'est tout ce que l'on peut désirer sur cette matière, mais aussi on ne doit pas se contenter de moins.

Résolution des équations irrationnelles pures & simples dans le second degré.

Les équations irrationnelles pures & simples, sont celles qui n'ont que deux termes, & dont l'homogène est un quarré irrationnel, ou le produit de deux racines irrationnelles, comme ces équations sont assez semblables aux secondes puissances irrationnelles ou imparfaites du même degré, leur résolution se fait de la même manière & par les mêmes formules expliquées ci-dessus; ce qui est général pour toutes les équations irrationnelles pures & simples de tous les degrés supérieurs à l'infini.

1^{er}. Exemple pour la formule d'approximation par défaut.

Soit une équation irrationnelle pure & simple du second degré $z^2 = 200$.

1^o. Par la première formule d'approximation par défaut, j'ai $z^2 = a^2 + b = 196 + 4 = 200$.

2^o. Je trouve que $196 = aa$ est le quarré moindre contenu dans 200, sa première racine est $a = 14$, & ôtant 196 de 200, le reste est $4 = b$.

3^o. Je substitué $14 = a$, & $4 = b$, à la place de ces lettres dans la première formule d'approximation $a + \frac{b}{2a}$, ce qui donne $14 + \frac{4}{28}$, qui se réduit à $14 + \frac{1}{7}$ en divisant les deux termes de la fraction par leur commun diviseur 4. Voilà la racine approchée.

4^o. Pour avoir une troisième racine plus approchée, je me sers de la seconde formule d'approximation $a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$ dans la quelle je substitué en nombres les valeurs des lettres, j'ai une troisième racine plus appro-

$$\text{chée } 14 + \frac{4 \times 196 \times 4 + 16}{8 \times 2744 + 4 \times 56} = 14 + \frac{3136 + 16}{21952 + 224}$$

$\frac{3152}{22176} = 14 + \frac{197}{1386} = z$, en divisant les deux termes de la fraction par leur commun diviseur 16. comme cette approximation est immense, & que l'erreur est moindre qu'aucune grandeur sensible, il est inutile de la pousser plus loin, il suffit de quarrer cette valeur de z , & de substituer cette valeur dans l'équation proposée, pour la comparer avec le second membre 200.

5°. Pour quarrer cette valeur de z , $= 14 + \frac{197}{1386}$,

$$\begin{array}{r}
 14 + \frac{197}{1386} \\
 \times 14 + \frac{197}{1386} \\
 \hline
 196 + \frac{38809}{1914996} \\
 + \frac{55^6}{1386} \left(4 - \frac{28}{44} \right) \\
 \hline
 200 - \frac{28}{44} + \frac{38809}{1914996}
 \end{array}$$

ou bien, il faut ajouter en une somme l'entier avec la fraction, ainsi je réduis d'abord l'entier 14 en fraction qui ait le même dénominateur, en multipliant 14 par 1386, ce qui donne au produit 19 404, auquel j'ajoute le numérateur 197, la somme donne pour le numérateur 19601.

Ainsi j'ai la fraction $\frac{19601}{1386}$ à élever à la seconde puissance.

$$\begin{array}{r}
 14 \\
 \times 1386 \\
 \hline
 5544 \\
 1386 \\
 \hline
 19404 \\
 + 197 \\
 \hline
 19601
 \end{array}$$

5°. Je quarre la valeur trouvée de z , & je la substitue dans l'équation proposée, $z^2 = 200$.

$$\begin{array}{r}
 14 + \frac{197}{1386} \\
 \times 14 + \frac{197}{1386} \\
 \hline
 196 + \frac{2758}{1386} + \frac{38809}{1914996} \\
 + \frac{2758}{1386} \\
 \hline
 196 + \frac{5516}{1386} + \frac{38809}{1914996}
 \end{array}$$

ou $196 + 4 = 200$, je néglige la dernière fraction qui est insensible, ainsi j'ai $z^2 = 200$. à très-peu de chose près.

Autrement. Pour élever à la seconde puissance la racine approchée $14 + \frac{197}{1386}$ que nous venons de trouver par l'opération précédente sur la première formule d'approximation par défaut, je réduis l'entier en fraction, en le multipliant par ce dénominateur; or 14×1386 donne 19404, auquel j'ajoute le numérateur 196, ce qui donne la fraction $\frac{19601}{1386}$ dont le carré $= \frac{384199201}{1910996}$, ensuite je divise le carré du numérateur par le carré du dénominateur.

$$\begin{array}{r}
 \text{Diviseur} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dividende} \\ 19. 20. 99 \ 6 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Quotient} \\ 200 + \frac{1}{19. 20. 996} \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$20 \dots 38. 41. 99. 20.$$

$$0 \dots \text{reste } 0 : 1$$

$$\text{Le Quotient est } 200 + \frac{1}{1920996}$$

Ainsi

Ainsi substituant ce quotient qui est la valeur du carré zz dans l'équation proposée $zz = 200$.

La fraction insensible $+ \frac{1}{1920996}$

est la différence des deux membres de l'équation, donc la racine trouvée $14\frac{97}{1346}$ est très-approchée.

Second Exemple. Sur la formule d'approximation par excès $aa - b$.

Soit encore $z^2 = 200 = aa - b$.

1°. Pour me servir de la formule d'approximation par excès $aa - b$, je prends le carré prochain $225 = aa$ plus grand que l'homogène 200, sa racine est $15 = a$, or $225 = 200$ reste $-25 = b$, donc la première racine approchée est $15 = a$.

2°. Pour avoir une seconde racine plus approchée, je substitue les valeurs trouvées $15 = a$, & $25 = b$ dans la première formule d'approximation par excès $a - \frac{b}{2a}$, ce qui donne $15 - \frac{25}{30}$, c'est la seconde racine approchée; je l'éleve à la seconde puissance pour la comparer à l'équation proposée, en la substituant à la place de z^2 .

$$\begin{array}{rcl}
 15 & - & \frac{25}{30} \\
 \times 15 & - & \frac{25}{30} \\
 \hline
 225 & - & \frac{375}{30} + \frac{625}{900} \\
 & & \frac{375}{30} \\
 \hline
 225 & - & \frac{750}{30} + \frac{625}{900} \\
 \text{ou } 225 & - & 25 + \frac{1}{3} = 200 + \frac{2}{3}.
 \end{array}$$

Analyse.

zz

Substitution.

$z z = 200 = 200 - \frac{1}{2}$, or la différence des deux membres de cette équation est d'environ $\frac{1}{2}$.

3°. Pour avoir une troisième racine encore plus approchée, je me sers de la seconde formule d'approximation $a = \frac{4aab - bb}{8a^3 - 4ab}$, dans laquelle je substitue à la place

des lettres leurs valeurs, j'ai $15 = \frac{4 \times 225 \times 25 - 625}{8 \times 3375 - 4 \times 15 \times 25}$,

qui donne $15 = \frac{900 \times 25 - 625}{27135 - 60 \times 25} = 15 = \frac{21500 - 625}{27135 - 1500}$

qui se réduit à $15 = \frac{21875}{25635} = 15 = \frac{875}{1025} = z$, c'est la troisième racine approchée.

Présentement j'élève au carré cette valeur, & je substitue son carré dans l'équation $z^2 = 200$ pour connaître la différence.

$$\left\{ 1025 \left\{ 26250 \left\{ 25 \frac{875}{1025} \left(\frac{1}{2} \right) \right. \right. \right. \text{Division.}$$

$$\begin{array}{r} 2 \dots 2050 \\ 575 : 0 \\ 5 \dots 512 \\ 62 \end{array}$$

$$\left\{ 76562 \left\{ 1050665 \right.$$

$$\begin{array}{r} 1 \dots \dots 7756 \\ 0 \dots \dots 2950 : 6 : 5 \end{array}$$

$$15 = \frac{875}{1025} \quad \text{Multiplication.}$$

$$\times 15 = \frac{875}{1025}$$

$$\begin{array}{r}
 225 \text{ --- } \frac{13125}{1025} \text{ + } \\
 \text{ --- } \frac{13125}{1025} \\
 \hline
 225 \text{ --- } \frac{26250}{1025} \text{ + } \frac{765625}{1050665}
 \end{array}$$

ou $225 \text{ --- } 25 \frac{1}{2} = 200 \text{ --- } \frac{1}{2}$, l'erreur par excès est de $\frac{1}{2}$, & le carré du numérateur & du dénominateur est d'environ moins d'une unité, ainsi l'erreur n'est pas dans le carré de $\frac{1}{2}$, par conséquent il est insensible dans la racine.

On peut trouver une quatrième racine encore plus approchée en continuant sur une troisième formule d'approximation, & ainsi de suite à l'infini.

Résolution des Equations irrationnelles du second degré, composées, ou affectées de termes moïens.

Je réduis toutes les équations composées, ou affectées de termes moïens aux trois formules suivantes,

$$\begin{array}{l}
 1^{\circ}. \dots z^2 \text{ + } mz \text{ --- } b'' = 0 \\
 2^{\circ}. \dots z^2 \text{ --- } mz \text{ --- } b'' = 0 \\
 3^{\circ}. \dots z^2 \text{ --- } mz \text{ + } b'' = 0
 \end{array}$$

dans lesquelles l'inconnue est z .

m est le nombre qui multiplie l'inconnue linéaire, qui se nomme improprement le coefficient.

b'' est l'homogène, ou le dernier terme de l'équation, son exposant en chiffre romain marque ses deux dimensions & non pas une seconde puissance.

J'emploie deux Méthodes pour résoudre ces équations.

La première consiste à transformer d'abord l'équation proposée dans une équation pure & simple $y^2 = b''$, en faisant évanouir le second terme, pour la résoudre comme les autres équations pures & simples par les formules

$$z \pm ij$$

générales pour trouver la valeur de y , que l'on substitue ensuite dans la valeur de z , ce qui donne la valeur désirée.

La seconde Méthode consiste dans des formules particulières pour opérer directement sur l'équation proposée.

PREMIÈRE MÉTHODE.

Résoudre par transformation & substitution les Equations irrationnelles du second degré qui sont composées, ou affectées de termes moïens.

Premier Exemple. Dans la première formule du second degré $z^2 + mz - h'' = 0$. Soit l'équation proposée $z^2 + 100z - 300 = 0$.

Préparation. D'abord pour faire évanouir le second terme, je suppose $z = y - \frac{100}{1}$ & $zz = y^2 - \frac{200y}{2} + \frac{100.00}{4}$, & substituant ces valeurs à la place de z & de zz dans l'équation proposée, je trouve une équation pure & simple qui n'a plus de second terme comme il suit.

Substitution.

$$\begin{array}{rcl} z^2 & = & y^2 - \frac{200y}{2} + \frac{100.00}{4} \\ + 100z & = & \dots + 100y - \frac{100}{2} \\ - 300 & = & \dots - 300 \\ = & 0 & \dots = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Transformée } y^2 & - & 100y - \frac{100.00}{4} = 0 \\ & & - 300 \end{array}$$

ce qui donne $y^2 = 25.00 + 300$, ou $y^2 = 28.00$. C'est l'équation transformée où il n'y a point de second terme. L'homogène 28.00 est un carré irrationnel com-

pris entre les deux quarrez prochains, ſçavoir, le moindre 2704 dont la racine eſt 52, & le plus grand 2809 dont la racine eſt 53.

Donc la racine irrationnelle de 2800 eſt plus grande que 52, mais plus petite que 53. Si je prends la moindre racine 52 qui eſt trop petite, je me ſervirai de la formule d'approximation par défaut $aa + b$; mais ſi je prends la racine 53 qui eſt trop grande, je me ſervirai de la formule d'approximation par excès $aa - b$.

Première opération par la formule d'approximation par défaut $aa + b$.

1°. J'ai ſuivant cette formule $y^2 = 28.00 = aa + b = 27.04 + 96$. Donc $b = 96$ & $a = 52$. C'eſt la racine par défaut approchée à moins d'une unité près.

2°. Pour trouver une ſeconde racine plus approchée, je me ſers de la première formule d'approximation par défaut $a + \frac{b}{2a}$, & ſubſtituant à la place des lettres leurs valeurs trouvées, j'ai $52 + \frac{96}{104}$ qui ſe réduit à $52 + \frac{12}{13}$ (en diviſant les termes de la fraction par leur diviſeur commun 8) Voilà la ſeconde racine plus approchée.

Je l'éleve à la ſeconde puissance pour la comparer par ſubſtitution dans l'équation propoſée.

$$\begin{array}{rcl}
 z & = & 52 + \frac{12}{13} \\
 xz & = & \times 52 + \frac{12}{13} \\
 \hline
 & & 2704 + \frac{624}{13} + \frac{144}{169} \\
 & & + \frac{624}{13} \\
 \hline
 xz & = & 2704 + \frac{1248}{13} + \frac{144}{169} = 2704 + 96 + \frac{144}{169} = 2800 + \frac{144}{169}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \left\{ \begin{array}{l} 13 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 1258 \\ 9 \dots 117 \\ 7:8 \\ 78 \\ 00 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Donc la différence entre les deux membres de l'égalité
zz iij

est $+\frac{144}{169}$ dans le carré, qui est leur différence par excès. Donc l'erreur dans la racine est de moins de $\frac{1}{144}$.

3°. Pour avoir une troisième racine plus approchée, je substitue les valeurs des lettres dans la seconde formule d'approximation par défaut $a + \frac{4ab + b^2}{8a^3 + 4ab}$ ce qui donne

$$52 + \frac{4 \times 2704 \times 96 + 96 \times 96}{8 \times 140608 + 4 \times 52 \times 96} \text{ qui donne } 52 + \frac{10.38.336 + 9216}{11.24.64 + 4992} = 52 + \frac{10.47.552}{11.29.856} \text{ ou } 52 + \frac{4092}{4413}, \text{ qui donne enfin } 52 + \frac{256}{276}. \text{ C'est la troisième racine approchée ou troisième valeur de } y \text{ que j'élève au carré pour la substituer dans l'équation transformée comme il suit.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 276 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 26.624 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 96 \end{array} \right\} \frac{128}{276} \text{ Division.}$$

$$\begin{array}{r} 9 \dots\dots 2484 \\ 178 : 4 \\ 6 \dots\dots 1656 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y = 52 + \frac{256}{276} \\ xy = \times 52 + \frac{256}{276} \end{array} \text{ Multiplication}$$

$$yy = 2704 + \frac{13312}{276} + \frac{65536}{76176} + \frac{13312}{276}$$

$$yy = 2704 + \frac{26624}{276} + \frac{65536}{76176}$$

Donc $y^2 = 2704 + 96 = 28.000$. Mais il y a le carré de la fraction qui est l'excédent, $\frac{65536}{76176}$ qui est la

différence des deux membres de l'équation, que l'on peut diminuer à l'infini en continuant les approximations.

• 4°. Puisque la troisième valeur de y est $52 + \frac{256}{276}$, je substitue cette valeur dans l'égalité $z = y - \frac{100}{2}$ pour trouver la valeur de z , & la substitution me donne $z = 52 + \frac{256}{276} - \frac{100}{2}$ ce qui donne $z = -50 + 52 + \frac{256}{276} = 2 + \frac{256}{276}$ & substituant cette valeur & son carré dans l'équation proposée $z^2 + 100z - 300 = 0$.

Substitution.

$$z = 2 + \frac{256}{276}$$

$$\times z = 2 + \frac{256}{276}$$

$$z^2 = 4 + \frac{1024}{276} + \frac{65536}{76176}$$

$$\text{ou } z = 4 + 3 + 1 = 8.$$

$$+ 100z = 2 + \frac{256}{276} \times 100 = 200 + 92 = 292.$$

$$\text{Donc } zz = + 8$$

$$+ 100z = + 292$$

$$- 300 = - 300.$$

$$= 0 = 0. \text{ Les deux membres de}$$

l'équation sont égaux, donc la racine est trouvée; c'est la petite racine dans cette opération.

Seconde Opération. Suivant la formule d'approximation par excès $aa - b$, 1°. je prends dans l'équation transformée $y^2 = 28.00$, la racine $53 = a$ du carré prochain plus grand, $28.09 = aa$; donc le reste $9 = b$, suivant la formule $aa - b$. J'ai ainsi pour première racine approchée par excès $53 = a$.

2°. Pour avoir une seconde racine, je substitue les valeurs trouvées des lettres dans la première formule d'ap-

proximation $a = \frac{b}{2a}$, ce qui donne $53 = \frac{9}{106}$. C'est la seconde racine approchée, dont le carré est $28.09 - 9 + \frac{81}{112.36} = 28.00 - \frac{1}{138}$. Donc l'erreur par excès est de $\frac{1}{138}$ dans le carré, & par conséquent bien moindre dans la racine.

3°. Pour avoir une troisième racine encore plus approchée, je substitue encore la valeur des lettres dans la troisième formule d'approximation par excès $a = \frac{4ab + b^2}{8a^2 + 4ab}$,

ce qui donne $y = 53 - \frac{4 \times 2809 \times 9 + 9 \times 9}{8 \times 148877 + 4 \times 53 \times 9}$ qui se ré-

duit à $53 - \frac{101124 + 81}{1191016 + 1908} = 53 - \frac{10.1205}{1192924}$ qui se

réduit enfin à $y = 53 - \frac{42}{4137}$ ou $53 - \frac{6}{691}$; c'est la

troisième racine approchée, que j'éleve au carré pour le substituer dans l'équation transformée, c'est $28.09 - \frac{4412}{4137} + \frac{1764}{17114769}$ qui donne 28.09 , ou 10 environ à cause de la deuxième fraction qui est positive; c'est donc $28.09 - 9 +$, ou $28.09 - 10 -$. Donc l'erreur dans le carré de la racine est à moins de l'unité près, & on peut encore en approcher à l'infini.

4°. Substituant ensuite cette valeur de y dans l'égalité $z = y - \frac{100}{z}$, on trouvera $z = -50 + 53 - \frac{42}{4137}$ ou $z = 3 - \frac{42}{4137}$, ou $z = 3 - \frac{6}{691}$; & par la substitution la valeur de z , qui étant substituée avec son carré dans l'équation proposée $z^2 + 100z - 300 = 0$, on trouvera quelle est la différence entre les deux membres de l'équation.

$$zz = -100z + 300$$

$$9 - \frac{36}{691} + \frac{6}{8} = -300 - \frac{600}{691} + 300$$

ou enfin $9 + 300 - 9 = 300$.

$z^2 + 100z$
différence qui n'est pas sensible.

Les fractions étant évaluées donnent la

Second

Second Exemple. Dans la seconde formule du second degré $z^2 - mz - h'' = 0$.

Soit l'équation dans la seconde formule du second degré $z^2 - 100z - 300 = 0$.

Préparation. D'abord je fais évanouir le second terme en supposant $z = y + \frac{100}{2}$, & son quarré $zz = y^2 + 100y + \frac{100.00}{4}$, & substituant ces valeurs à la place de z & de zz , dans l'équation proposée, je trouve l'équation transformée pure & simple sans second terme, comme il suit.

$$\begin{array}{rcl}
 zz & = & y^2 + 100y + \frac{100.00}{4} \\
 - 100z & = & \dots - 100y - \frac{100}{2} \\
 - 300 & = & \dots - 300 \\
 = & 0 & \dots = 0
 \end{array}$$

Transformée	y^2	$0y$	$-\frac{100.00}{4}$	$= 0$
			$- 300$	

qui donne $y^2 - 25.00 - 300 = 0$

ou $y^2 = 25.00 + 300 = 28.00$.

Voilà l'équation transformée qui n'a point de second terme & dans laquelle il faut trouver la racine quarrée de 28.00 qui est compris entre les deux quarrés parfaits & rationels; sçavoir, le moindre 2704 dont la racine est 52, & le plus grand prochain 2809 dont la racine est 53.

Première opération. Par la formule d'approximation par défaut $aa + b$, 1°. j'ai suivant cette formule $y^2 = 28.00 = aa + b$, $= 2704 + 96$. Donc $b = 96$ $a = 52$; c'est la première racine approchée à moins d'une unité près.

2°. Pour trouver une seconde racine encore plus approchée, je me fers de la première formule d'approximation

Analyse.

aaa

$a + \frac{b}{2a}$ dans laquelle je substitue les valeurs trouvées de a & b , ce qui donne $52 + \frac{96}{174}$ qui se réduit en divisant les termes de la fraction par leur commun diviseur 8, à $52 + \frac{12}{13}$. C'est la seconde racine approchée. Je l'éleve à la seconde puissance pour la substituer dans l'équation proposée, & j'ai

$$\begin{array}{r} 52 + \frac{12}{13} \\ \times 52 + \frac{12}{13} \\ \hline \end{array}$$

$$2704 + \frac{1248}{13} + \frac{144}{169} \text{ ou } 2704 + 96 + \frac{144}{169} = zz.$$

Or $zz = 28.00$. Donc l'erreur par excès est de $\frac{144}{169}$ dans le carré. Donc l'erreur dans la racine est de moins de $\frac{1}{144}$ par excès.

3°. Pour trouver une troisième racine plus approchée, je me sers de la seconde formule d'approximation

$$a + \frac{4aab + b^2}{8a^3 + 4ab}$$

dans laquelle substituant à la place des lettres leurs valeurs, j'ai $52 + \frac{4 \times 2704 \times 96 + 96 \times 96}{8 \times 140608 + 4 \times 52 \times 96}$ qui

$$\text{donne } 52 + \frac{10.38.336 + 9216}{112464 + 4992} = 52 + \frac{1047552}{1129856} \text{ ou } 52 + \frac{40.92}{4413} = 52 + \frac{256}{276} \text{ c'est la troisième racine encore}$$

plus approchée, que j'éleve à la seconde puissance pour la comparer avec l'équation proposée.

$$\left\{ \begin{array}{l} 276 \\ \left\{ \begin{array}{l} 26624 \\ \left\{ \begin{array}{l} 96 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{Division.}$$

$$9 \dots 2484$$

$$178 : 4$$

$$6 \dots 165 : 6$$

$$\text{reste } 12 \quad 8$$

$$\begin{array}{r}
 52 + \frac{256}{276} \quad \text{Multiplication.} \\
 \times 52 + \frac{256}{276} \\
 \hline
 2704 + \frac{13312}{276} + \frac{65536}{76176} \\
 + \frac{13312}{76176} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$2704 + \frac{26624}{276} + \frac{65536}{76176}$$

$$\text{ou } 2704 + 96 - \frac{1}{10640} = zz = 2800 - \frac{1}{10640}$$

4°. Je remarque dans $52 + \frac{1047552}{11129859}$ que les deux termes de la fraction se peuvent réduire à $\frac{12}{13}$, car l'antécédent a pour diviseur exact 12, & le conséquent ou dénominateur se divise aussi exactement par 13, ainsi j'ai $y = 52 + \frac{12}{13}$.

D'abord je substitué cette valeur dans l'équation simple $z = y + \frac{100}{1}$, ce qui donne $z = 102 + \frac{12}{13}$, dont le quarré $zz = 104.04 + \frac{2448}{13} + \frac{144}{169}$, qui se réduit à $104.04 + 188 + \frac{144}{169}$, en divisant la seconde fraction par son dénominateur 13, ce qui me donne $105.92 + \frac{144}{169}$.

5°. Je substitué ces valeurs en nombres de z & de zz en leurs places dans l'équation proposée $zz = 100z + 300$, ce qui donne

$$105.92 + \frac{144}{169} = 100z + 300 = 102.92 + 300 = 105.92.$$

$$\left\{ 13 \left\{ 2448 \left\{ 188 + \right. \right. \right.$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 13 \\
 11:4 \\
 8 \quad 10 \quad 4 \\
 1 \quad 4:8 \\
 8 \quad 1 \quad 0 \quad 4
 \end{array}$$

La différence des deux membres de cette équation est donc $+\frac{144}{169}$, c'est l'erreur dans le carré, donc l'erreur dans la racine approchée est moindre que $\frac{1}{144}$ par excès.

Opération

$$100z = 102 + \frac{12}{13}$$

$$\times 100$$

$$102.00. + \frac{1200}{13} (= 92 +)$$

$$+ 92$$

donc

$$100z = 102.92$$

{	<i>Diviseur</i>	{		{	<i>Quotient</i>
{	13	{	1200	{	92 +

$$9 \dots 117$$

$$3:0$$

$$2 \dots \dots 26$$

$$4$$

$$z = 102 + \frac{12}{13}$$

$$\times z = 102 + \frac{12}{13}$$

$$z^2 = 104.04 + \frac{1224}{13} + \frac{144}{169}$$

$$+ \frac{1224}{13}$$

$$z^2 = 104.04 + \frac{2448}{13} (= 188 +) + \frac{144}{169}$$

$$\text{donc } z^2 = 105.92 + \frac{144}{169}$$

On peut encore continuer l'approximation à l'infini, en se servant d'autres formules d'approximation tirées des principes que nous avons établi dans la première Section de ce livre.

Seconde opération. Suivant la formule d'approximation par excès $a - b$, 10. j'ai suivent cette formule dans l'équation proposée réduite $y^2 = 28.00$, $= aa - b$ $= 2809$, où $b = 9$. donc $a = 53$. C'est la première racine approchée par excès à moins d'une unité près.

2°. Pour avoir une seconde racine plus approchée, je me sers de la première formule d'approximation par excès $a - \frac{b}{2a}$ & substituant à la place des lettres leurs valeurs, j'ai $53 - \frac{9}{106}$, c'est la seconde racine approchée.

Je l'éleve au carré pour la comparer avec l'équation pure & simple réduite.

$$\begin{array}{r} 53 - \frac{9}{106} \\ \times 53 - \frac{9}{106} \\ \hline 28.09 - \frac{477}{106} + \frac{81}{11236} \\ \quad - \frac{477}{106} \\ \hline 28.09 - \frac{214}{106} + \frac{81}{11236} \end{array}$$

ou $2809 - 9 = 2800 - \frac{1}{112}$, voilà l'erreur par excès dans le carré.

$$\begin{array}{r} \{ 106 \quad \{ 954 \quad \{ 9 \\ \hline 9 \quad 954 \\ \{ 81 \quad \{ 11236 \quad \{ 138 \\ \hline 1 \dots 81 \\ \quad 31:3 \\ 3 \dots 24 \quad 3 \\ \quad 70:6 \\ 8 \dots 94 \quad 8 \\ \quad 4 \end{array}$$

3°. Présentement pour avoir une troisième racine encore plus approchée, que les deux précédentes, je me sers de la seconde formule d'approximation par excès,

$x = \frac{4ab + b^2}{8a^3 + 4ab}$, dans laquelle je substitue les valeurs

& des lettres a & b & de leur puissances trouvées dans les opérations précédentes, & la substitution de leurs

valeurs donne $53 = \frac{4 \times 2809 \times 9 + 9 \times 9}{8 \times 148877 + 4 \times 53 \times 9}$,

qui donne $53 = \frac{101124 + 81}{1191016 + 1908} = 53 = \frac{101205}{1192924}$

$= 53 = \frac{506}{59646} = 53 = \frac{253}{24823} = 53 = \frac{42}{4137}$, c'est

la troisième racine approchée, que j'éleve au quarré pour la comparer par substitution dans l'équation $y^2 = 2800$.

$$\begin{array}{r} 53 = \frac{42}{4137} \\ \times 53 = \frac{42}{4137} \\ \hline 28.09 = \frac{2226}{4137} + \frac{1764}{17114769} \\ \quad \quad \quad \frac{2226}{4137} \end{array}$$

$$28.09 = \frac{4452}{4137} + \frac{1764}{17114769}$$

ou $2809 = 10 +$ ou $2809 = 9 + = y$, c'est la troisième racine approchée.

4°. Ensuite pour avoir la valeur de x & de x^2 dans l'équation je substitue d'abord cette valeur de y que je viens de trouver dans l'égalité simple $x = y = \frac{100}{2}$, ce qui donne $x = 50 + 53 = \frac{42}{4137}$, ou $x = 103 = \frac{6}{691}$.

Pareillement pour substituer cette valeur en la place de x^2 dans l'équation proposée, j'éleve au quarré cette valeur trouvée, comme il suit:

$$\begin{aligned}
 z &= 103 - \frac{6}{691} \\
 xz &= 103 - \frac{6}{691} \\
 \hline
 z^2 &= 10609 - \frac{1236}{691} + \frac{36}{477481}, \text{ ou } z = 10609 - 106 \\
 &\quad + \frac{6}{8} \text{ environ.} \\
 \text{or } z^2 &= 10609 - 108 + \frac{6}{8}, \text{ donc } z^2 = 105.01. \\
 &\quad + \frac{6}{8}. \\
 100z &= 100 \times 103 - \frac{6}{691} = 102.00 - \frac{600}{691} (100) \\
 &= 102.00; \text{ or } 102.00 + 300 = 10500.
 \end{aligned}$$

Substitution.

$$\begin{aligned}
 zz &= 100z + 300 \\
 \text{ou } 105.01 + \frac{6}{8} &= 102.00 + 300 = 105.00.
 \end{aligned}$$

La différence dans le quarré est $1 + \frac{6}{8}$ environ, mais on peut la diminuer en continuant l'approximation à l'infini.

Dans la troisième formule des équations du second degré.
 $z^2 + 100z - 300 = 0$, ou $z^2 = 100z - 300$,
 comme elle est presque semblable à la première formule,
 cela me dispense d'entrer dans le détail de l'opération
 qui est la même.

J'ai par les formules d'approximation par défaut

$$\begin{aligned}
 zz &= 100z - 300 \\
 8 &= 292 - 300
 \end{aligned}$$

Et par les formules d'approximation par excès je trouve

$$\begin{aligned}
 z^2 &= 100z - 300 \\
 9 &= 291 - 300. \text{ avec une différence insensible qui} \\
 &\text{résulte de l'évaluation des fractions, que je néglige} \\
 &\text{pour abréger.}
 \end{aligned}$$

*Parallele de l'approximation sur un même exemple dans
 les trois formules des équations du second degré.*

Dans le résultat je néglige les fractions qui sont insensibles.

1°. Dans la première formule $z^2 + 100z = 300$,
la première opération donne $8 + 292 = 300$.
la seconde opération donne $9 + 291 = 300$.

2°. Dans la seconde formule $z^2 = 100z + 300$.
la première opération donne $10592 = 10292 + 300$
la seconde opération donne $105.01 + \frac{6}{5} = 102.00$
 $+ 300$.

3°. Dans la troisième formule $-z^2 = 100z - 300$.
la première opération donne $-8 = 292 - 300$
la seconde opération donne $-9 = 291 - 300$.

Ces équations irrationnelles sont contenues dans l'intervalle des deux équations rationnelles; sçavoir, l'équation $z^2 + 100z = 204$, dont les racines sont $z + 102 = 0$, & $z - 2 = 0$, & l'équation $z^2 + 100z = 309$ dont les racines sont $z + 103 = 0$, $z - 3 = 0$.

$$\begin{array}{r} z + 102 = 0 \\ \times z - 2 = 0 \\ \hline z^2 + 102z - 204 = 0 \\ \quad - 2z \end{array}$$

$$\hline z^2 + 100z - 204 = 0$$

$$\begin{array}{r} z + 103 = 0 \\ \times z - 3 = 0 \\ \hline z^2 + 103z - 309 = 0 \\ \quad - 3z \end{array}$$

$$\hline z^2 + 100z - 309 = 0$$

$$\begin{array}{r} z - 102 = 0 \\ \times z + 2 = 0 \\ \hline z^2 - 102z - 204 = 0 \\ \quad + 2z \end{array}$$

$$\hline z^2 - 100z - 204 = 0$$

$z -$

$$\begin{array}{r}
 z - 103 = 0 \\
 \times z + 3 = 0 \\
 \hline
 zx - 103z - 309 = 0 \\
 + 3z \\
 \hline
 z^2 - 100z - 309 = 0 \\
 \\
 z + 102 = 0 \\
 \times z + 2 = 0 \\
 \hline
 z^2 + 102z + 204 = 0 \\
 + 2z + 204 = 0 \\
 \hline
 z^2 + 104z + 204 = 0 \\
 \hline
 \\
 z + 103 = 0 \\
 \times z + 3 = 0 \\
 \hline
 z^2 + 103z + 309 = 0 \\
 + 3z \\
 \hline
 z^2 + 106z + 309 = 0.
 \end{array}$$

Résolution des équations irrationnelles du troisième degré pures & simples, par les formules d'approximation.

Dans les équations pures & simples du troisième degré, comme $z^3 = 100.000 = a^3 + b$, dont l'homogène n'est pas un cube parfait, mais imparfait compris entre les deux cubes parfaits prochains; sçavoir, le moindre $97336 = a^3$ dont la racine est $46 = a$, qui étant ôtée de l'homogène proposée $= a^3 + b$, il reste $+ b = 2664$; & entre le cube plus grand $103.823 = a^3$, dont la racine est $47 = a$, dont ayant ôté l'homogène, la différence est $3.823 = -b$.

Donc la racine z du cube imparfait proposé est plus grande que 46 , & plus petite que 47 .

Soit $z^3 = 100$. donc $z > 4$, dont le cube $= 64$,

Analyse.

bbb

qui est trop petit de 36, mais soit $z = 5$, son cube $= 125$ qui excède 100 de 25.

Première opération par la formule d'approximation par défaut pour la racine $a + \frac{ab}{3a^2 + b}$.

1°. Suivant cette formule, soit $z^3 = 100 = a^3 + b$
 $= 64 + 36$.

La première racine cubique approchée par défaut est $4 = a$ & $b = 36$.

2°. Substituant ces valeurs dans la première formule d'approximation $a + \frac{ab}{3a^2 + b}$, j'ai $4 + \frac{4 \times 36}{3 \times 64 + 36}$ qui donne $4 + \frac{144}{192 + 36}$, ou $4 + \frac{144}{228}$, & réduisant les deux termes de la fraction à leur plus simple expression, j'ai $4 + \frac{12}{19}$, c'est la seconde racine plus approchée.

2°. J'élève cette racine à la troisième puissance pour la substituer dans l'équation proposée, & la comparer comme il suit, d'abord je réduis l'entier avec la fraction $4 + \frac{12}{19}$ dans une seule fraction $\frac{88}{19}$, multipliant l'entier par le dénominateur 19, & ajoutant le numérateur 12 au produit.

Or le cube de $\frac{88}{19} = \frac{681472}{6859} = 99 + \frac{2431}{6859}$, lequel ne diffère du cube proposé 100, que de $\frac{2431}{6859}$, ce qui donne une racine très-approchée.

3°. Mais si l'on veut une troisième racine encore plus approchée, il faut substituer les valeurs trouvées ci-dessus en la place des lettres dans la seconde formule sui-

vante, $\frac{2a^3b^3 + b^3}{3a^3 + b} = d$ qui donne $\frac{2 \times 64 \times 36^3 + 36^4}{3 \times 64 + 36} = d$,

ce qui donne $\frac{128 \times 1296 + 46656}{192 + 1296} = \frac{161888 + 46656}{192 + 1296} = \frac{512544}{1488}$

$= d = \frac{3}{2}$, ensuite supposer la seconde racine trouvée

$a + \frac{ab}{3a^2 + b} = c$, & substituer ces valeurs dans la

Seconde formule d'approximation du troisième degré par défaut $c + \frac{cd}{3c^2 + d}$, qui peut aussi être exprimée d'une manière abrégée par les seules lettres a & b , en réduisant le numérateur & le dénominateur à leur plus simple expression.

On peut de même continuer l'approximation à l'infini, mais cette seconde est immense, ainsi elle suffit dans la pratique.

Seconde opération, suivant la formule d'approximation

$$\text{par excès } a = \frac{ab}{3a^2 + b}.$$

1°. Soit $z^3 = 100 = a^3 - b = 125 - 25$, donc $a = 5$, c'est la première racine approchée par excès, & $b = 25$.

2°. Pour avoir une seconde racine plus approchée, je substitue les valeurs trouvées de a & b dans la première formule d'approximation par excès $a = \frac{ab}{3a^2 + b}$, c'est

$$5 = \frac{5 \times 25}{3 \times 125 + 25} = 5 = \frac{125}{375 + 25} = 5 = \frac{125}{400} = 5 = \frac{1}{14}, \text{ qui se réduit enfin à } 4 + \frac{2}{14}, \text{ c'est la seconde racine plus approchée.}$$

3°. Je cube cette racine $4 + \frac{2}{14}$, son cube est 100, $+ \frac{225}{1744}$, qui approche davantage par excès que l'approximation par défaut $4 + \frac{12}{19}$ trouvée dans la première opération.

Parallèle des deux approximations.

L'approximation par défaut $4 + \frac{12}{19}$ donne $\frac{6318}{19}$, qui étant réduite en partie décimales par l'opération suivante donne au quotient $z = 4 : \frac{6318}{10000}$

L'approximation par excès $4 + \frac{2}{14}$ donne $\frac{64}{14}$ qui étant

bbb ij

réduite en parties décimales comme il suit, donne

$$z = 4 + \frac{64285}{10000}$$

$$\begin{array}{l} \text{Diviseur.} \left\{ \begin{array}{l} 19 \end{array} \right. \quad \text{Dividende.} \left\{ \begin{array}{l} 88:0000 \end{array} \right. \quad \text{Quotient.} \left\{ \begin{array}{l} 4:63.15.8 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot \cdot \cdot 76 \\ \quad \quad 12:0 \\ 6 \cdot \cdot \cdot 114 \\ \quad \quad 6:0 \\ 3 \cdot \cdot \cdot 57 \\ \quad \quad 3:0 \\ 1 \cdot \cdot \cdot 19 \\ \quad \quad 11:0 \\ 5 \cdot \cdot \cdot 95 \\ \quad \quad 15:0 \\ 8 \text{ — } \cdot \cdot \cdot 152 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Diviseur.} \left\{ \begin{array}{l} 14. \end{array} \right. \quad \text{Dividende.} \left\{ \begin{array}{l} 65:0000 \end{array} \right. \quad \text{Quotient.} \left\{ \begin{array}{l} 4:64.28.5 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot \cdot \cdot 56 \\ \quad \quad 9:0 \\ 6 \cdot \cdot \cdot 84 \\ \quad \quad 6:0 \\ 4 \cdot \cdot \cdot 56 \\ \quad \quad 4:0 \\ 2 \cdot \cdot \cdot 28 \\ \quad \quad 12:0 \\ 8 \cdot \cdot \cdot 112 \\ \quad \quad 8:0 \\ 5 \text{ — } \cdot \cdot \cdot 70 \end{array}$$

Or cette dernière donne un quotient $z = 4 + \frac{1}{10}$, &c. qui est beaucoup plus approché par excès que le précédent $z = 4 + \frac{64285}{10000}$, &c. n'est approché par défaut.

Résolution des équations irrationelles du troisième degré affectées de termes moïens.

Règle générale. Par la différence des deux sommes alternatives.

Exemple. 1°. Soit $x^3 = 3.00.00x - 1.000.000$, j'ai par transposition $3.00.00x = 1.000.000 - x^3$, donc $3.00.00x > 1.000.000$.

D'ailleurs $x > 33$, car $33^3 = 35.937$, qui est moindre que $1.000.000$, la différence est $96.40.63$.

De même $x > 34$, car $34^3 = 39.304$, mais $x < 35$, car $35^3 = 42.875$ qui surpasse $3.00.00x$.

C'est pourquoi suivant la règle générale expliquée dans la première Section de ce livre, je suppose $x = 17\frac{3}{4} + y$, c'est-à-dire, $= 17 + y$, je substitue cette valeur à la place de x , & son cube à la place de x^3 dans l'équation proposée, ce qui donne la transformée $y^3 + 51yy + 867y + 4913 = 3.00.00y - 49.00.00$.

Je fais deux équations des deux sommes alternatives, la première composée des termes impairs, la seconde composée des termes pairs, & j'ai

$$1^\circ. y^3 + 867y = 15000y - 245.000.$$

$$2^\circ. 51yy + 4913 = 15000y - 245.000.$$

dans lesquelles le second membre est la moitié du second membre de l'équation transformée $3.00.000y - 49.00.00$.

3°. Pour trouver la valeur de y , je peux me servir de l'une ou l'autre de ces deux égalitez. Je me fers ici de la première, $y^3 + 867y = 15000y - 245.000$, j'ai par transposition $y^3 = 15000y - 867y - 245.000$, qui donne par soustraction $y^3 - 14133y = 245.000$.

D'où je tire la valeur de $y = 17\frac{53.35.14.3}{73.12.27}$ donc $x = 34$

$\frac{5.33.51.43}{73.12.27}$ suivant la Méthode des Problèmes plus que dé-

bbb iij

terminez, ensuite je substitue cette valeur & son cube dans l'équation proposée, la substitution donne l'homogène proposé à moins d'une unité près.

Substitution.

$$300.00x = 1.041.888. + \frac{330.2352}{731.2271}$$

$$- x^3 = - 41.888. + \frac{223.0295}{731.2252}$$

$$= 1.000.000$$

Au lieu qu'en supposant

$$x = 34, \text{ je trouve}$$

$$3.00.00x = 1.020.000.$$

$$- x^3 = - 39.304$$

$$\text{La différence est } - 19304$$

par défaut.

$$\text{Et } x = 35$$

$$. 3.00.00x = 1.050.000.$$

$$- x^3 = - 42.875$$

$$\text{La différence est } + 07.125.$$

par excès.

Remarque première. Il est facile de résoudre toutes les équations du troisième degré & des autres plus élevées, lorsqu'elles sont affectées de termes moïens en les transformant d'abord dans des équations pures & simples, $x^3 = a^3 \pm b$ pour faire évanouir le second terme, & substituant ensuite la valeur de la nouvelle inconnue & de ses puissances dans l'équation proposée, pourvu qu'elles ne renferment point d'imaginaires. Mais lorsqu'il y a des imaginaires, on se servira de la Remarque troisième.

Remarque seconde. Dans l'Exemple précédent on peut tirer de l'égalité de la seconde somme alternative $5177 + 4913 = 3.00007 - 49.00.00$. Une valeur irrationnelle de y du second degré, qui pourra être exprimée par le cercle & la ligne droite, dont on peut tirer des constructions très-approchées & commodes pour la pratique, pour la trisection de l'angle, la duplication du cube, par une Méthode très-générale.

Remarque troisième. Dans les Equations fort élevées & =

affectées de termes moïens ; il est toujours plus commode de se servir de la formule générale , que des formules particulières. Cependant nous mettrons ici quelques formules particulières qui se tirent facilement de la formule générale ci-dessus.

Pour l'équation $z^3 = pz - q$, la formule irrati-
nelle pour la racine est $z = \frac{1}{2} a + \frac{p}{6a}$

$$- \sqrt{\frac{pp}{36a} - \frac{4q + a^3 - 2pa}{12a}}, \text{ ou bien } z = \frac{1}{2} a$$

$$+ \frac{p - \sqrt{pp - 3ad.}}{6a}$$

Mais la formule rationnelle de la racine est ,

$$z = \frac{1}{2} a + \frac{5a^3 p + 2pq - ap^2 - 9a^2 q}{12a^4 + 2pp - 6a^2 p - 6aq}$$

Cette formule est générale & s'étend même au cas irréductible , & renferme les équations qui ont des racines réelles & celles qui ont des racines imaginaires.

Pour l'équation $z^3 = ppz + q$, dans le cas irréduc-
tible , la première racine est $z = \frac{2}{3} p + \sqrt{\frac{1}{9} pp + \frac{q^3}{3p}}$
qui approche par excès à $\frac{1}{1000}$ ou environ dans les cas
les moins favorables.

$$\text{La seconde racine est } z = \frac{2}{3} p + \sqrt{\frac{1}{9} pp + \frac{q^3 - y^3}{3p}}$$

qui approche à $\frac{1}{1.00.00}$, ou environ par défaut , & on
peut continuer de même pour en approcher à l'infini.

Exemple. Soit $z^3 = 7569z + 240903$, ou p racine
approchée $= 87$, on trouve $z = 58 + \sqrt{\frac{1}{9} 1764} = 100$,
qui est un peu trop grande ; mais c'est le nombre entier
qui en approche le plus , ce qui suffit pour la pratique.

Mais si on veut en approcher indéfiniment plus , on
trouve par la seconde formule d'approximation $z = 58$
 $+ \sqrt{\frac{1}{9} 1755 \frac{118}{261}}$, de telle sorte que si on se sert de ces der-

nières formules pour avoir les racines approchées en nombres entiers, & des formules d'approximation précédentes pour approcher en fraction, il n'y a point d'équation qu'on ne puisse résoudre avec toute la précision possible.

Formules générales pour le troisième degré.

Soit l'égalité ou l'équation $z^3 = a^3 \pm b$, la formule générale rationnelle de la première racine est $a \pm \frac{ab}{3a^2 \pm b}$.

Formules générales pour le quatrième degré.

Soit l'équation $z^4 = a^4 \pm b$, & soit $8a^4 + 3b = c$, soit aussi $c \pm 3b = d$, on trouvera pour la formule rationnelle de la première racine $z = a \pm \frac{abc}{4a^2d \pm 2bb}$.

Formules générales pour le cinquième degré.

Soit l'équation $z^5 = a^5 \pm b$, & soit $5a^5 = c$, on trouvera pour la formule rationnelle de la première racine $z = a \pm \frac{abcc + 4abbc + 2ab^2}{c^3 \pm 6bcc + 8bb \pm b^3}$, & pour la racine irrationnelle

$$z = \frac{1}{5} a \pm \sqrt[5]{\frac{b}{5a} - \frac{1}{5} aa}.$$

Remarque quatrième. Par l'égalité de la seconde somme alternative, on pourra réduire toutes les égalitez pures & simples du septième degré au troisième, & celles du onzième au cinquième, &c.

Remarque cinquième. Les formules du troisième degré sont plus composées que celles du second, & celles du quatrième degré plus composées que celles du troisième, & ainsi de suite, car il est impossible que cela soit autrement; mais aussi elles approchent toujours davantage à mesure

mesure qu'elles sont plus élevées, par le premier corollaire du Théorème fondamental.

Remarque sixième. Il est évident que dès qu'une racine est exprimée universellement par une formule d'un degré inférieur à l'exposant du degré de son équation, & dont les exposans sont des nombres premiers entr'eux; on peut toujours exprimer cette même racine d'une manière approchée par une égalité du premier degré, comme dans l'exemple précédent, l'équation du 3^{me}. degré se réduit à une formule du second degré, ou composée du second degré; c'est pourquoi elle pourra toujours être réduite, à une formule universelle du premier degré moins approchée; mais les puissances de p & q , montent si haut qu'elle n'est pas praticable. Ainsi cette vérité qui réduiroit les égalitez aux premier degré & à la simple division, n'est belle que dans la théorie, & ne peut s'étendre universellement à la pratique, comme on pourra s'en convaincre par l'expérience.

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

Pour continuer à l'infini l'approximation des Racines irrationnelles des Equations & des puissances imparfaites de tous les degrez.

En général. Dans toute équation d'un degré quelconque qui a des racines irrationnelles; après avoir trouvé deux valeurs approchées en nombres entiers pour chacune des racines, l'une par défaut & l'autre par excès; on pourra transformer cette racine irrationnelle en quatre séries infinies primitives & fondamentales fondées sur deux formules exemplaires tirées, l'une de la racine approchée par excès & l'autre par défaut; chacune de ces séries contient la valeur approchée de la racine irrationnelle cherchée; mais la meilleure de ces quatre séries donne toujours une approximation plus prompte & plus

Analyse.

ccc

grande. Comme ces séries demandent un grand détail, j'en fais le sujet de la Section suivante. On y trouvera le moyen de transformer en séries rationnelles infinies les racines.

SECTION QUATRIÈME.

Seconde Méthode nouvelle.

Pour résoudre les Equations irrationnelles & les puissances imparfaites de tous les degrez à l'infini, par des séries rationnelles infinies, les plus promptes & les plus convergentes qui soit possible.

Ou nouveau calcul différentiel & intégral réduit à l'expression sensible des nombres naturels.

L'Usage de cette Méthode s'étend dans toute l'Analyse générale, & dans tout ce qui regarde les lignes courbes, puisqu'elle renferme tous les problèmes où l'inconnue a des valeurs irrationnelles qui ne peuvent s'exprimer exactement en nombres, & sur toutes les équations & les puissances dont les racines sont irrationnelles; ce qui comprend les équations affectées de termes moyens, comme celles qui sont pures & simples, car on peut toujours réduire ou transformer les équations affectées à des équations pures & simples en faisant évanouir le second terme par les Méthodes connues, en supposant l'inconnue $x = y \pm \frac{a}{p}$, où je suppose $a =$ au coefficient du second terme, & l'exposant p égal à celui de l'équation donnée; ce qui est général pour les équations de tous les degrez où il n'y a que trois termes; le signe \pm est toujours contraire à celui qui précède le coefficient de l'équation proposée, que je suppose égale à zéro, car la substitution fait évanouir le second terme.

Après cette préparation on trouvera les racines irrationnelles de ces équations pures & simples, comme celles des puissances imparfaites & par la même Méthode.

Cette Méthode consiste à exprimer toute racine irrationnelle proposée ou par deux séries, l'une par excès l'autre par défaut ou par une seule série infinie de termes qui expriment sa valeur alternativement par excès & par défaut, c'est-à-dire par une suite de fractions qui approchent continuellement de la valeur désirée à l'infini avec la plus petite différence qui soit possible, soit par excès soit par défaut; en sorte que dans l'infinitième terme la différence soit nulle, & que la somme intégrale de cette série donne exactement, quoique d'une manière inexprimable, la valeur entière & exacte de la racine irrationnelle proposée.

C'est-à-dire que dans le quarré irrationnel, comme il est impossible d'exprimer exactement sa valeur en nombres entiers ni en fraction, on ne peut lui substituer qu'une série de fractions rationnelles telles que le quarré du numérateur, ait au quarré du dénominateur un rapport continuellement approchant & le plus approchant qui soit possible & le plus promptement. C'est-à-dire que si le quarré irrationnel est 2, ou 3, ou 13, &c. il faut trouver une suite qui soit rationnelle & par la Méthode la plus prompte, la plus courte & la plus simple qui soit possible. Il faut aussi pour la perfection la Méthode, que les termes de la série soient alternativement par excès & par défaut, & qu'on puisse trouver les limites de chaque terme en l'élevant à la puissance proposée; ou bien il faut que l'on puisse former deux séries, l'une dont tous les termes soient par excès & dans l'autre par défaut; si l'une de ces deux séries manquoit, ce ne seroit que la moitié de l'ouvrage de fait, l'on ne doit rien souhaiter de plus; mais aussi on ne peut pas se contenter de moins pour trouver la valeur des nombres irrationnels qui sont inexprimables en nombres par leur nature.

On peut comparer cette Méthode des séries rationnelles comme celle du triangle des rapports au calcul différentiel parce qu'il y a une division continuée à l'infini, car chaque terme des séries donne toujours infailliblement la racine ou le rapport cherché avec une différence toujours décroissante d'un terme au suivant, soit par excès soit par défaut.

De même je compare au calcul intégral ; la manière dont je compare ici les quatre séries primitives pour faire choix de la meilleure, & entre les termes de la meilleure ceux qui donnent le plus exactement le rapport cherché ; à la rigueur l'intégration de la série est un vrai calcul intégral, nous en donnerons l'intégration qui est ici toujours possible, parce que la série est décroissante à l'infini.

D'ailleurs le quotient d'un seul terme est le calcul intégral du même rapport.

Or dans le choix des quatre séries primitives, quoiqu'il faille toujours préférer la plus convergente, il y a cependant des cas dans lesquels il faut s'écarter de cette règle, lorsque les termes des autres séries étant réduits à leur plus simple expression, donnent un rapport plus simple & très-approché.

SECONDE MÉTHODE GÉNÉRALE,

Pour trouver les Racines irrationnelles par des Formules rationnelles.

AVIS. Cette Méthode est générale pour les racines de toutes les puissances imparfaites & pour les racines irrationnelles des équations de tous les degrez à l'infini. Comme elle demande un grand détail nous nous contenterons de l'expliquer pour le second degré seulement. Mais on peut l'appliquer de même au troisièm

degré, au quatrième degré & à tous les degrez supérieurs, car la règle est générale.

Dans les deux formules exemplaires pour tous les degrez, a est en général la racine de l'irrationnel proposé, & b représente l'unité constante, x est la valeur de la racine proposée par excès ou par défaut, & y est toujours le nombre irrationnel proposé.

En supposant p l'exposant d'une puissance d'un degré quelconque, les formules exemplaires générales sont $\frac{a}{b}$

pour le premier terme, & $\frac{ax + a^p + b \times y}{1x + ay}$ pour le se-

cond terme. Ainsi pour le second degré j'ai $\frac{a}{b}$ &

$$\frac{ax + aa + q \times y}{1x + ay}.$$

Des Séries rationnelles en général.

Définition. Les séries rationnelles sont des suites de fractions réglées par une loi constante fondée sur les racines rationnelles de deux nombres rationaux, dont l'un est moindre, & l'autre immédiatement plus grand que le nombre irrationnel donné; dans ces séries rationnelles, il est encore de leur essence que la série des dénominateurs croisse toujours en raison plus grande que celle des numérateurs, afin que chaque fraction diminue de valeur d'un terme à l'autre à l'infini, de telle sorte que sa valeur devienne plus petite qu'aucune grandeur finie donnée, quand même le premier numérateur seroit supposé plus grand à discrétion dans le premier terme, que le dénominateur donné.

D'où il suit que quelque valeur qu'on suppose pour le numérateur & le dénominateur du premier terme, la série formée sur l'hypothèse la plus éloignée prise à volonté,

ne laissera pas d'approcher dans la suite de la valeur du nombre irrationnel donné, & en poussant la série à l'infini elle donneroit exactement la valeur désirée en vertu des formules que nous donnerons dans ce traité.

L'usage des séries rationnelles est très-étendu, puisqu'on rencontre bien plus souvent des nombres irrationaux que d'autres, lesquels se rencontrent très-rarement, au lieu que les premiers se présentent naturellement par tout. Ainsi ces séries servent,

- 1^o. pour trouver les racines des puissances imparfaites.
- 2^o. Les racines des équations de tous les degrez à l'infini.
- 3^o. Le rapport de tous les nombres irrationaux.
- 4^o. Enfin, ces séries servent généralement dans la résolution de tous les Problèmes de géométrie & de toutes les sciences Physico-Mathématiques; c'est une Méthode universelle pour résoudre en nombres entiers avec facilité & sans aucun tâtonnement tous les Problèmes qu'on peut former sur les grandeurs.

Deux Méthodes pour former les Séries en général.

J'emploie deux Méthodes pour former les séries rationnelles.

La première Méthode est celle des formules générales, qui est la seconde de ce Traité.

La seconde est celle du triangle des rapports, qui est la troisième de ce Traité.

Ces deux Méthodes concourent ensemble à former la série la plus parfaite & la plus exacte qui est la seule que j'ai en vûë, & ces deux Méthodes se prêtent un secours mutuel pour y parvenir.

La seconde Méthode qui est celle du triangle des rapports donne directement la série la plus exacte, mais elle a besoin de la première Méthode pour lui fournir des matériaux. Il y a même des cas où la série la plus parfaite & la plus exacte ne donne pas toujours le rapport le plus

simple ; & dans ce cas il faut préférer la série trouvée par les formules quoique moins exacte, mais plus simple à la série trouvée par le triangle des rapports, lorsqu'elle donne un rapport plus composé.

Du nombre des Formules & des Séries pour exprimer chaque nombre irrationnel.

Chacun des nombres irrationaux peut s'exprimer en général, (dans le second degré, par exemple,) par $xx \pm y = 41$. Il en est de même des irrationaux de tous les autres degrés. xx est un quarré parfait immédiatement ou plus petit ou plus grand que le nombre proposé, supposé $= 41$. Donc $xx \pm y = 41 = 36 + 5$, ou $= 49 - 8$. Donc $x = 6$, ou $x = 7$.

La première valeur de $x = 6$, donne $xx = 36$. Donc $xx + y = 36 + 5 = 41$.

La seconde valeur de $x = 7$, donne $xx = 49$. Donc $xx - y = 49 - 8 = 41$.

Chacune de ces deux valeurs substituée dans la formule générale, me donne une formule particulière pour cet irrationnel 41 ; & substituant dans chaque formule particulière l'une de ces deux valeurs, puis l'autre ; la substitution donne quatre formules qui servent à former quatre séries primitives & fondamentales, dont on peut tirer une infinité d'autres séries.

D'ailleurs si on prend arbitrairement d'autres valeurs pour x , l'une moindre & l'autre plus grande à discrétion. On pourra former d'autres séries à l'infini, mais elle ne seront pas les plus promptes ni les plus simples.

Moïen de trouver promptement des termes fort éloignez dans les Séries.

Comme chaque terme de la série exprime la racine cherchée par approximation, ou par excès ou par défaut, qui

décroissent dans les termes de la série à mesure qu'ils sont plus éloignés du premier terme. Il est donc important d'avoir un grand nombre de termes, ou d'en avoir de fort éloignés; c'est ce qui m'a engagé d'employer trois genres de progression dans la formation des termes de chaque série.

Le premier genre de progression que j'emploie dans la formation des termes de la série, est la progression naturelle des nombres. 1. 2. 3. 4. 5, &c.

Je me sers de cette progression pour trouver de suite l'un après l'autre tous les termes de la série en réitérant toujours l'opération sur une même formule.

Le second genre qui est un abrégé du premier genre, renferme toutes les autres progressions arithmétiques, dont le nombre est infini; elle sert à sauter un ou plusieurs termes tout d'un coup sans passer par les termes moyens comme du premier au 4^e. ou du 2^e. au 6^e. ou du 2^e. au 15^e. &c. Et continuant ainsi à sauter des termes selon la progression qu'on aura choisi, on arrivera en peu de tems par deux ou trois opérations à un terme très-éloigné sans passer par les termes moyens qu'on ne pourroit trouver que par un très-grand nombre d'opérations réitérées de suite selon la progression naturelle des nombres.

Le troisième genre qui est encore un chemin plus abrégé que le second, consiste à sauter d'un terme quelconque trouvé à un terme éloigné en progression géométrique quelconque, double, triple, quadruple, &c.

Axiôme 1. Tout nombre entier comme 4, qui est une seconde puissance parfaite dont la racine est 2, est encore réellement & sans fiction toute puissance quelconque à l'infini, dont les racines sont irrationnelles, mais ne se trouvent que par la division infinie.

Axiôme 2. Tout nombre entier ou mixte, quelque petit qu'il soit, pourvu qu'il soit plus grand que l'unité, peut

peut être élevé à une puissance d'un degré déterminé , telle que cette puissance surpassera tout nombre donné , quelque grand qu'il soit , par exemple la fraction $\frac{1}{2}$ peut être élevée à une puissance d'un tel degré que cette puissance sera plus grande que 10. 00. 00. que 10000 0000 , &c.

Axiôme 3. Dans toute série de fractions , si la série des dénominateurs croît en raison géométrique continue plus grande que les numérateurs , la fraction diminue de valeur à l'infini , & deviendra plus petite qu'aucune grandeur finie donnée , quand même le premier numérateur seroit supposé plus grand à discrétion que le dénominateur , c'est une conséquence nécessaire de l'axiôme précédent.

Axiôme 4. En général toute puissance est parfaite ou imparfaite , & pour expliquer plus clairement ce qui convient à toutes les puissances , je prends pour exemple le quarré qui est la seconde puissance.

Tout quarré proposé en nombre entiers est ou un quarré parfait , dont la racine peut être exprimée exactement en nombres entiers , ou un nombre compris entre deux quarrés parfaits , d'où on le nomme quarré imparfait , dont la racine ne peut être exprimée exactement , ni par un nombre , ni par une fraction , ni par un nombre mixte quelconque , ainsi 4 est un quarré parfait dont la racine est 2 , 9 est aussi un quarré parfait dont la racine est 3 : mais entre ces deux quarrés 4 & 9 , il y a 5 , 6 , 7 , 8 , qui sont quatre quarrés imparfaits , dont la racine est plus grande que 2 & plus petite que 3.

Cette racine est irrationnelle , on détermine sa valeur en général par le signe radical , ainsi $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, &c.

On ne peut exprimer cette valeur que par une division poussée à l'infini , ce qui est impossible : mais on y supplée par une série infinie de fractions , dont l'inf-

Analyse.

d d d

nitième terme est lui-même la racine désirée, & d'ailleurs chacun des termes de la série approche de cette valeur alternativement par excès & par défaut.

Tout ce qu'une intelligence bornée, telle qu'est l'esprit humain peut faire de mieux pour approcher de la valeur exacte de cette racine (qui ne peut être exprimée exactement que par l'infinièmesime terme de cette série infinie) consiste à former régulièrement, ou une seule série, ou deux séries de fractions qui expriment cette racine alternativement par excès ou par défaut dans les plus petits nombres, & le plus exactement qu'il est possible par approximation ; sçavoir, l'une des séries qui donne la racine par excès, & l'autre qui donne la même racine par défaut, dont la différence soit toujours moindre que l'unité, & même la plus petite qui soit possible avec des limites précises & simples.

Or les limites d'approximation les plus simples qu'on puisse donner, soit pour l'excès, soit pour le défaut, est lorsque leur différence dans ces deux cas est une partie aliquote de l'unité entre les deux termes de la série qui ne diffèrent entre eux que de l'unité au dénominateur, par exemple, lorsque les limites d'approximation sont entre $\frac{1}{16}$ & $\frac{1}{17}$, ou entre $\frac{1}{408}$ & $\frac{1}{409}$, &c.

Ainsi la perfection de la Méthode d'approximation des racines irrationnelles demande deux conditions.

1^o. Qu'il y ait deux séries, l'une qui approche par excès, l'autre qui approche par défaut de la racine désirée.

Une série seule & unique par excès ou par défaut ne suffit pas, car puisqu'on ne peut trouver exactement la racine irrationnelle, on peut également désirer ou avoir besoin d'approcher par excès ou par défaut ; on ne doit pas se contenter de moins, mais aussi on ne peut rien demander de plus.

2^o. Que chacune des séries soit formée régulièrement.

Usage de cette Méthode d'approximation.

Cette Méthode nouvelle sert généralement,

1^o. Pour trouver les racines irrationnelles de toutes les puissances à l'infini, c'est-à-dire les racines de tous les nombres irrationaux possibles.

2^o. Pour trouver les racines irrationnelles de toute équation numérique quelconque.

La préparation consiste à trouver pour chaque racine deux valeurs approchées en nombres entiers, l'une par excès, & l'autre par défaut, qui donnera deux formules exemplaires tirées de l'équation proposée, ensuite substituant dans chacune de ces deux formules exemplaires les deux valeurs approchées en entiers de la racine, alors on aura quatre séries rationnelles dans lesquelles la racine sera transformée, & au moyen de cette transformation, la différence de la racine cherchée deviendra moindre qu'aucune grandeur finie, & cela sans aucun tâtonnement ce qui mérite attention.

Il y a un choix à faire entre ces quatre séries primitives, & une infinité d'autres séries qui en peuvent être dérivées, comme nous le verrons dans la suite; pour préférer la plus parfaite de toutes, qui est celle qui se trouve directement par le triangle des rapports, & qui concourt avec celle des formules dans un seul cas, c'est lorsque $b = 1$.

Remarque. Dans ce Traité je ne parle que des nombres entiers qui sont irrationaux; mais la Méthode s'étend également à tout autre nombre rompu ou mixte quelconque, il faut seulement le préparer en le réduisant en une fraction unique, & tirant séparément la racine approchée du numérateur & celle du dénominateur.

Ou bien par une Méthode plus simple & plus élégante, dans cette fraction je multiplie le numérateur par le dé-

ddd ij

numérateur ; ensuite je tire la racine approchée du produit, & je divise cette racine par le dénominateur, & le quotient me donne la racine désirée par approximation.

En quoi consiste cette Méthode.

Soit un nombre irrationnel quelconque, dont on demande la racine quarrée, par exemple, il s'agit de trouver une série infinie de nombres quarrés en entiers pris deux à deux comme une fraction, tels que le quarré du plus grand qui est le numérateur de la fraction, qui compose chaque terme de la série, ait au quarré du dénominateur de la même fraction qui est le plus petit, un rapport continuellement approchant & le plus approchant qu'il soit possible.

En général, je suppose tout quarré irrationnel exprimé en nombres entiers $= aa \pm y = c$.

Je suppose a la valeur approchée de la racine en entiers à moins d'une unité près, soit par excès, soit par défaut, d'où il suit que y est toujours entre 1 qui est la plus petite valeur possible, & $2a$ qui est sa plus grande valeur, car si $y = 2a + 1$, le quarré donné $aa \pm y = aa \pm 2a + 1$, dont la racine exacte en entiers est $a \pm 1$, & par conséquent le quarré donné ne seroit pas irrationnel, mais un quarré parfait, ce qui est contre l'hypothèse.

La formule générale exemplaire qui doit servir de Modèle pour trouver la racine quarrée de tous les nombres irrationaux est $\frac{x}{b}$ 1^{er}. terme. Et $\frac{ax + cb}{1x + ab}$ pour le second terme, dans lesquels $x = a$, racine en entiers ou par excès ou par défaut, $b = 1$, & $c =$ le nombre irrationnel donné, ces deux valeurs donnent la série la plus prompte, & toute autre valeur substituée dans la formule ne donne point la série la plus prompte.

Exemple. Soit $aa \pm y = 41$.

1°. Si je prends le quarré moindre 36, j'ai $41 = 36 + 5$, qui donne $a = 6$, mais si je prends le quarré plus grand 49, j'ai $41 = 49 - 8$, ou $a = 7$, la première formule exemplaire tirée de la racine 6 du quarré 36 moindre que 41. est $\frac{a}{b} \& \frac{6a + 41b}{1a + 6b}$.

1°. Supposant $a = 6 \& b = 1$, substituant ces valeurs dans la formule, j'ai par substitution $\frac{a}{b} = \frac{6}{1} \&$

$$\frac{6a + 41b}{1a + 6b} = \frac{6 \times 6 + 41 \times 1}{1 \times 6 + 6 \times 1} = \frac{36 + 41}{6 + 6} = \frac{77}{12}, \text{ c'est la première série } \frac{6}{1}, \frac{77}{12}.$$

2°. Supposant $a = 7 \& b = 1$, la substitution donne $\frac{a}{b} = \frac{7}{1} \& \frac{6a + 41b}{1a + 6b} = \frac{6 \times 7 + 41 \times 1}{1 \times 7 + 6 \times 1} = \frac{42 + 41}{7 + 6} = \frac{83}{13}$, c'est la seconde série $\frac{7}{1}, \frac{83}{13}$.

La seconde formule exemplaire tirée de la racine 7 du quarré 49 qui surpasse 41, est $\frac{a}{b} \& \frac{7a + 41b}{1a + 7b}$ dans laquelle je substitue les deux valeurs de a qui donneront deux autres séries primitives.

3°. Supposant $a = 6 \& b = 1$, & substituant ces valeurs dans la seconde formule, j'ai $\frac{a}{b} = \frac{6}{1}$, &

$$\frac{7a + 41b}{1a + 7b} = \frac{7 \times 6 + 41 \times 1}{1 \times 6 + 7 \times 1} = \frac{42 + 41}{6 + 7} = \frac{83}{13}, \text{ ce qui donne la troisième série } \frac{6}{1}, \frac{83}{13}.$$

4°. Supposant $a = 7 \& b = 1$, substituant ces valeurs dans la formule exemplaire $\frac{a}{b}$, & $\frac{7a + 41b}{1a + 7b}$, j'ai $\frac{7}{1}$,

$$\frac{7 \times 7 + 41 \times 1}{1 \times 7 + 7 \times 1} = \frac{49 + 41}{7 + 7} = \frac{90}{14}, \text{ c'est la quatrième série.}$$

Paradoxe. Quelques nombres qu'on prenne pour x & y , pourvu que le premier surpasse le second, la formule donnera toujours nécessairement la racine désirée, mais ce n'est pas le plus court chemin, & c'est un

ddd iij

vrai Paradoxe; c'est-à-dire qu'en continuant la formule sur des nombres pris arbitrairement, on aura toujours une série approchée de la racine désirée, & l'infinièmes terme sera égal à cette racine désirée.

Il y a une parfaite analogie dans la série des formules rationnelles des nombres irrationaux, comme on le verra dans la table qui suit, que l'on peut continuer à l'infini; cette table comprend également les nombres rationaux & les nombres irrationaux, ce qui démontre l'universalité, l'excellence & la justesse de la Méthode.

La construction des formules est facile pour tous les irrationaux.

Le premier terme est toujours $\frac{a}{b}$, le second terme contient au numérateur & au dénominateur $a \pm b$, avec des coefficients qu'on détermine comme il suit; dans le numérateur le coefficient de a est la racine approchée par défaut dans la première formule, c'est la racine du carré parfait moindre que l'irrationnel donné; le coefficient de b est le nombre irrationnel donné; dans le dénominateur, le coefficient de a est toujours l'unité constante, & le coefficient de b est le même que le coefficient de a dans le numérateur, qui est la racine approchée par défaut dans la première formule.

Dans la seconde formule le coefficient de a dans le numérateur, & de b dans le dénominateur sont la racine approchée par excès, c'est-à-dire, la racine en entier du carré parfait plus grand que le nombre irrationnel donné, le reste est de même comme dans la première formule, d'où il suit que les carrés parfaits n'ont qu'une seule formule qui sert à former celles des irrationaux plus grands ou plus petits.

*Table générale de la formation des formules rationnelles
pour trouver la racine quarrée des nombres rationaux
& irrationaux.*

Quarrez.

1°. $\sqrt{1}$ rationnel $= a^2 = 1$.

Sa formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{1a+b}{1a+1b}$ il n'y a qu'une formule unique, ce qui est général pour tous les quarrez parfaits, & pour toutes les puissances parfaites supérieures.

2°. $\sqrt{2}$ irrationnel $= a^2 + b = 1 + 1$, ou $= 4 - 2$, il y a par conséquent deux formules, la seconde s'éloigne trop, la 1^{re}. & la meilleure est $\frac{a}{b}$ & $\frac{1a+b}{1a+1b}$ qui donne la série $\frac{1+}{1}$, $\frac{3-}{2}$, $\frac{7+}{5}$, $\frac{17-}{12}$, $\frac{41+}{29}$, $\frac{99-}{70}$, $\frac{239+}{169}$,

&c. l'excès & le défaut dans les quarrez des termes sont alternativement — 1 & + 1.

3°. $\sqrt{3}$ $= a^2 + b = 1 + 2$ ou $= 4 - 1$
Ses formules sont.

La première $\frac{a}{b}$ & $\frac{1a+3b}{1a+1b}$ qui donne $\frac{1+}{1}$, $\frac{2-}{2}$, $\frac{5+}{3}$, $\frac{7-}{5}$, $\frac{19+}{11}$, $\frac{26-}{15}$, dont l'excès & le défaut dans les quarrez sont alternativement — 2, + 1.

La seconde & la meilleure est $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+3b}{1a+2b}$, qui donne $\frac{2-}{1}$, $\frac{7-}{4}$, $\frac{26-}{15}$, $\frac{97-}{56}$, $\frac{362-}{209}$, $\frac{1331-}{780}$, dont l'excès & le défaut dans les quarrez sont alternativement &c.

4°. $\sqrt{4}$ rationnel. $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+4b}{1a+2b}$, qui donne $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{16}{9}$, $\frac{32}{16}$, & le quotient de chaque terme est toujours 2 $=$ la racine de 4.

5°. $\sqrt{5}$ irrationnel $= aa \pm b = 4 \pm 1$, ou $= 9 - 4$.

La première formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+5b}{2a+2b}$ qui donne $\frac{1+}{1}$,
 $\frac{9-}{4}$, $\frac{38+}{17}$, $\frac{161-}{72}$.

La seconde formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+5b}{1a+3b}$ qui donne &c.

6°. $\sqrt{6}$ irrationnel $= aa \pm b = 4 \pm 2$, ou $= 9 - 3$.

La première formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+6b}{1a+2b}$ qui donne $\frac{2+}{1}$,
 $\frac{3-}{2}$, $\frac{22+}{9}$, $\frac{49-}{20}$, $\frac{218+}{89}$ alternativement $= 2$ & $+1$.

La seconde formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+6b}{1a+3b}$ qui donne &c.

7°. $\sqrt{7}$ irrationnel $= aa \pm b = 4 \pm 3$, ou $= 9 - 2$.

La première formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+7b}{1a+7b}$ qui donne $\frac{2+}{1}$,
 $\frac{11-}{4}$, $\frac{50+}{19}$, $\frac{233-}{88}$, alternativement $= 3$, $+9$, -27 ,
 $+81$.

La seconde formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+7b}{1a+3b}$ c'est la meilleure,
 qui donne $\frac{3-}{1}$, $\frac{8+}{3}$, $\frac{45-}{17}$, $\frac{127+}{48}$, alternativement
 $+2$, -1 .

8°. $\sqrt{8}$ irrationnel $= aa \pm b = 4 \pm 4$, ou $= 9 - 1$.

La première formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a+8b}{1a+2b}$ qui donne $\frac{1+}{1}$,
 $\frac{3-}{2}$, $\frac{14+}{5}$, $\frac{17-}{6}$, $\frac{82+}{29}$, $\frac{99-}{35}$ alternativement $= 4$
 & $+1$.

La seconde formule la meilleure $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+8b}{1a+3b}$ qui
 donne $\frac{3-}{1}$, $\frac{17-}{6}$, $\frac{99-}{35}$ excès 1.

9°. $\sqrt{9}$ rationnel $= aa \pm b = 4 \pm 5$, ou $= 9 = 3 \times 3$.

La formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+9b}{1a+3b}$ qui donne $\frac{3}{1}$, $\frac{18}{6}$, $\frac{108}{36}$, $\frac{648}{216}$, &c.

11°. $\sqrt{10}$. irrationnel $= aa \pm b = 9 + 1$, ou $= 16 - 6$.

La première formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+10b}{1a+3b}$, c'est la meilleure qui donne $\frac{3}{1}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{117}{37}$ alternativement -1 & $+1$.

La seconde formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a+10b}{1a+4b}$ qui donne, &c.

11°. $\sqrt{11}$. irrationnel $= aa \pm b = 9 + 2$, ou $= 16 - 5$.

La première formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+11b}{1a+3b}$, c'est la meilleure qui donne $\frac{3}{1}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{63}{19}$, $\frac{199}{60}$, $\frac{1257}{379}$ alternativement -1 , & $+2$ comme dans $\sqrt{3}$.

La seconde formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a+11b}{1a+4b}$ qui donne, &c.

12°. $\sqrt{12}$. irrationnel $= aa \pm b = 9 + 3$, ou $= 16 - 4$.

La première formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+12b}{1a+3b}$ qui donne, &c.

La seconde formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a+12b}{1a+4b}$ qui donne, &c.

13°. $\sqrt{13}$ irrationnel $= aa \pm b = 9 + 4$, ou $= 16 - 3$.

Ce nombre irrationnel 13, est le premier & le plus petit nombre où l'on peut appliquer la Méthode dans toute son étendue & former les quatre séries primitives & fondamentales, parce que c'est le premier & le plus petit des nombres premiers qui surpasse & qui est surpassé de même par les deux quarrés parfaits immédiates 9 & 16 entre lesquels il se trouve compris; car 13 surpasse 9 de 4, & est surpassé de 3. par 16.

Donc $\sqrt{13} = 4 -$, ou $3 +$, & substituant ces deux valeurs à la place de a & 1 à la place de b dans les deux formules primitives, on formera les quatre séries primitives suivantes.

Analyse.

ccc

La première formule pour $\sqrt{13}$ est $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+13b}{1a+3b}$ qui donne la première série $\frac{3+}{1}$, $\frac{11-}{3}$, $\frac{18+}{5}$, $\frac{119-}{33}$, $\frac{649+}{180}$, &c. supposant $\frac{a}{b} = \frac{3}{1}$.

Et la même 1^{re} formule supposant $\frac{a}{b} = \frac{4}{1}$ donne la seconde série, $\frac{4-}{1}$, $\frac{25+}{7}$, $\frac{83+}{23}$, $\frac{137+}{38}$, $\frac{905-}{251}$, $\frac{2989+}{829}$, &c.

La seconde formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a+13b}{1a+4b}$ qui donne (supposant $\frac{a}{b} = \frac{3}{1}$) la troisième série toute par excès $\frac{3+}{1}$, $\frac{25+}{7}$, $\frac{191+}{53}$, $\frac{1453+}{403}$, &c.

Et supposant $\frac{a}{b} = \frac{4}{1}$, on aura la quatrième série toute par défaut $\frac{4-}{1}$, $\frac{29-}{8}$, $\frac{220-}{61}$, $\frac{1673-}{464}$, &c.

14°. $\sqrt{14}$ irrationnel $= aa + b = 9 + 5$, ou $= 16 - 2$.

La première formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+14b}{1a+3b}$

La seconde formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a+14b}{1a+4b}$

15°. $\sqrt{15}$ irrationnel $= aa + b = 9 + 6$, ou $= 16 - 1$.

La première formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{3a+15b}{1a+3b}$

La seconde formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a+15b}{1a+4b}$

16°. $\sqrt{16}$ rationnel $= aa = 4 \times 4 = 16$.

17°. $\sqrt{17}$ irrationnel $= aa + b = 16 + 1$, ou $= 25 - 9$.

La première formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{4a+17b}{1a+4b}$

La seconde formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{5a+17b}{1a+5b}$

&c.

&c.

17°. $\sqrt{25}$. rationel $= aa = 5 \times 5 = 25$.

18°. $\sqrt{29}$ irrationel $= aa + b = 25 + 4$, ou $= 36 - 7$.

La première formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{5a+29b}{1a+5b}$ différence -4
 $+ 16 - 64$. qui donne $\frac{5}{1}$, $\frac{34}{10}$, $\frac{560}{105}$, &c.

La seconde formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a+29b}{1a+6b}$

19°. $\sqrt{31}$ irrationel $= aa + b = 25 + 6$, ou $= 36 - 5$.

La première formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{5a+31b}{1a+5b}$
 qui donne $\frac{1}{1}$, $\frac{16}{10}$, $\frac{190}{106}$.

La seconde formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a+31b}{1a+6b}$ c'est la meilleure
 qui donne $\frac{6}{1}$, $\frac{67}{12}$.

20°. $\sqrt{36}$ rationel $= aa + b =$ supposant $b = 2a + 1$
 $= 5 + 5 + 1$. ce qui donne $= 25 + 2 \times 5 + 1 = 36$,
 ou $aa - b = 49 - 2 \times 6 + 1 = 49 - 13 = 36$.

20°. $\sqrt{41}$ irrationel $= aa + b = 36 + 5$, ou $49 - 8$.

La première formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a+41b}{1a+6b}$

La cinquième formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{7a+41b}{1a+7b}$ supposant

$\frac{a}{b} = \frac{6}{1}$, la première formule donne la première série

$\frac{6}{1}$, $\frac{77}{12}$, $\frac{954}{149}$, $\frac{11833}{1848}$, $\frac{146766}{22921}$ supposant

$\frac{a}{b} = \frac{7}{1}$ la première formule donne la seconde série $\frac{7}{1}$,

$\frac{83}{13}$, $\frac{1031}{161}$, $\frac{12787}{1997}$, $\frac{158599}{24769}$.

En supposant $\frac{a}{b} = \frac{6}{1}$, la 2^{de}. formule donne la
 troisième série $\frac{6}{1}$, $\frac{83}{13}$, $\frac{1114}{174}$, $\frac{14931}{23311}$.

ccc ij

En supposant $\frac{a}{b} = \frac{7}{1}$, la seconde formule donne la quatrième série $\frac{7}{1}$, $\frac{20}{14}$, $\frac{1204}{188}$, $\frac{16136}{2520}$, &c.

On peut continuer cette Table générale à l'infini; car tous les nombres pris dans la suite naturelle, sont, ou des secondes puissances parfaites comme 1.4.9.16.25.36. &c. ou des secondes puissances imparfaites.

Dans toutes les secondes puissances parfaites, il n'y a qu'une seule formule laquelle donne une racine exacte à chaque terme de la série, parce que toute puissance parfaite a sa racine exacte. Cette formule n'est pas nécessaire, pour avoir la racine exacte de la puissance parfaite puisqu'elle se trouve plus facilement par l'extraction ordinaire; mais elle sert à conserver l'analogie & à former les coefficients dans les formules des nombres irrationaux.

Par exemple, dans $\sqrt{36}$, puisque 36 est un carré parfait dont la racine est 6, la formule est $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a+36b}{1a+6b}$.

Or la racine de 36 est 6 qui est une racine exacte & non pas approchée, d'où il suit nécessairement qu'en substituant cette valeur dans la formule, on aura $\frac{a}{b}$

$= \frac{a}{1}$. premier terme qui donne la racine exacte. De même la substitution donne dans le 2^e. terme $\frac{6a+36b}{1a+6b}$

$= \frac{36+36}{6+6}$ Or chaque partie de ce second terme donne encore la même racine exacte & en continuant la série à l'infini, on trouvera toujours le même rapport: mais ce rapport ne se conserve pas de même dans les nombres irrationaux, parce qu'il est impossible de trouver exactement leur racine.

Formation des Formules.

Les irrationaux ont toujours deux formules, l'une par

excès, formée sur le modèle de celle du nombre rationnel plus grand, & l'autre formule par défaut formée sur celle du carré rationnel plus petit; par exemple 41 est un irrationnel compris entre deux carrés parfaits, sçavoir entre 36 dont la racine est $6 = a$, & entre 49 dont la racine est $7 = a$.

La formule universelle est $\frac{1x}{1b}$ pour le premier terme, & pour le second terme $\frac{ax+cb}{1x+ab}$, je substitue la première valeur $a = 6$, & $b = 1$, & $c = 41$, carré proposé impair, j'ai $\frac{6x+41y}{1x+6y}$, enfin substituant a en la place de x , & b au lieu de y , j'ai $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a+41b}{1a+6b}$, qui donne $\frac{6}{1} = \frac{a}{b}$ Premier terme.

Et $\frac{6 \times 6 + 41b}{1 \times 6 + 6b} = \frac{6a + 41b}{1a + 6b} = \frac{36 + 41}{6 + 6}$. Second terme.

Ainsi les deux premiers termes de la série sont $\frac{6}{1}$, $\frac{77}{12}$, si je suppose le second terme $\frac{77}{12}$ égal à la première formule du premier terme $\frac{a}{b}$ & substituant sa valeur dans la

formule du second terme $\frac{6a+41b}{1a+6b}$, j'ai pour le troisième

terme de la série $\frac{6 \times 77 + 12 \times 41}{1 \times 77 + 6 \times 12} = \frac{462 + 492}{77 + 72} = \frac{954}{149}$.

Supposant ensuite ce troisième terme $\frac{954}{149} = \frac{a}{b}$ pour avoir le quatrième terme en substituant toujours sa valeur $= \frac{a}{b}$ dans la formule du second terme $\frac{6a+41b}{1a+6b}$,

j'aurai le quatrième terme $\frac{11833}{1848}$.

Et continuant toujours de même, on trouvera autant de termes de la première série qu'on voudra.

Exemple. Pour trouver la racine de 41, qui est un car-

ré imparfait compris entre le carré parfait 36 dont la racine est 6, & le carré parfait 49 dont la racine est 7. Donc la racine carrée de 41 est plus grande que 6 & plus petite que 7.

Ce qui s'exprime ainsi $41 = aa + y : = 36 + 5$, ou $= 49 - 8$.

Donc $\sqrt{aa+y} = a + \sqrt{y} = 6 + \sqrt{5}$. 1^e. valeur de $a = 6$.

Donc $\sqrt{aa-y} = a - \sqrt{y} = 7 - \sqrt{8}$. 2^de. valeur de $a = 7$.

La première valeur de $a = 6$, donne la première formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a+41b}{1a+6b}$.

La seconde valeur de $a = 7$, donne la seconde formule $\frac{a}{b}$ & $\frac{7a+41b}{1a+7b}$.

$\frac{a}{b}$ est la formule universelle du premier terme, constante & invariable dans son expression, parce qu'elle n'a point de coefficient si ce n'est l'unité qui est toujours sous-entendue.

La formule du second terme a toujours $\frac{a+b}{1a+6b}$ tant au numérateur qu'au dénominateur avec des coefficients particuliers dans chaque irrationnel.

Le coefficient de a au numérateur & de b au dénominateur, est toujours le même; c'est dans la première formule la racine approchée par défaut, c'est-à-dire, la racine exacte du carré moindre que le nombre irrationnel donné, c'est 6 racine de 36.

Dans la seconde formule c'est la racine approchée par excès, c'est-à-dire, la racine exacte du carré immédiatement plus grand 49, que le nombre irrationnel donné, ici cette racine est 7 racine de 49.

Le coefficient de b au numérateur, est le nombre irrationnel donné.

Le coefficient de a au dénominateur est toujours l'unité.

Dans chacune de ces deux formules je substituai les deux valeurs de $a = 6 = 7$, ce qui me donne quatre séries.

Substituant $a = 6$ dans la première formule, j'ai la première série $\frac{6}{1}, \frac{77}{12}, \frac{954}{49}, \frac{11833}{1848}, \frac{146766}{21911}, \&c.$

Substituant $a = 7$ dans la première formule, j'ai la seconde série $\frac{7}{1}, \frac{83}{13}, \frac{1031}{161}, \frac{12787}{1997}, \frac{159599}{24769}, \&c.$

Pareillement substituant $a = 7$ dans la 2^d. formule, j'ai la troisième série $\frac{7}{1}, \frac{90}{14}, \frac{1294}{188}, \frac{16136}{2512}, \frac{216272}{33776}, \&c.$

Enfin substituant $a = 6$ dans la seconde formule, j'ai la quatrième série $\frac{6}{1}, \frac{83}{13}, \frac{1114}{174}, \frac{14932}{2332}, \frac{200136}{31219}, \&c.$

Remarque première & Paradoxe. Sur la propriété des formules, on peut former sur chacune de ces deux formules $\frac{6a+41b}{14+6b}$ & $\frac{7a+41b}{14+7b}$, une infinité de séries primitives qui approcheront toutes & chacune en particulier de la valeur de la racine de 41, en supposant a & b égaux à tel nombre qu'on voudra avec cette seule condition ou restriction que a soit plus grand que b , par exemple, on peut supposer $a = 100$, & supposer $b = 7$, ou 13, ou 91, &c. ou 99. L'excellence de la formule est telle qu'on approchera toujours indéfiniment de la valeur cherchée soit par excès, comme de $\frac{100}{7} = \sqrt{41}$, soit par défaut comme de $\frac{100}{99} = \sqrt{41}$, quelque extravagante que paroisse d'abord la supposition.

Remarque seconde. Il y a évidemment un choix à faire de la meilleure des séries possibles à l'infini; la plus simple & la meilleure de toutes est la série formée par le triangle des rapports, comme nous le verrons dans la suite; mais auparavant il faut expliquer tout ce qui concerne ces séries, leur formation & leurs genres ou espèces différentes.

1^o. Dans chaque nombre irrationnel donné, il y a deux formules générales; sur chaque formule on trouve deux séries primitives ou fondamentales, & sur chaque série primitive ou fondamentale on peut former plusieurs séries dérivées à l'infini.

La série primitive & fondamentale est celle qui contient de suite tous les termes qu'on a trouvé par la formule propre.

Les séries dérivées sont celles qui sont tirées d'une série fondamentale, & dans lesquelles les termes ne suivent pas l'ordre naturel comme dans la série primitive, mais ils suivent un nouvel ordre d'exposans, ou en progression arithmétique, ou en progression géométrique, ou en progression quelconque composée de ces deux progressions.

Ainsi il y a des séries dérivées de deux genres différens, le premier genre contient les termes de la série primitive & fondamentale, selon une progression arithmétique quelconque; c'est à-dire, dont les exposans sont pris non pas de suite, mais en sautant ou un, ou deux termes, ou trois ou quatre, &c. selon une progression arithmétique quelconque, 1. 3. 5. &c. ou 1. 5. 9. &c; & comme on peut prendre les termes de la série primitive suivant toutes les progressions arithmétiques possibles qui sont infinies, & d'une infinité d'espèces; cela donne autant d'espèces différentes de séries dérivées selon la progression arithmétique.

Le second genre contient la progression géométrique des exposans des termes de la série fondamentale, & comme il y a une infinité de progressions géométriques à l'infini, cela donne une infinité d'espèces de séries dérivées en progression géométrique.

L'usage de tous ces genres de séries en progression arithmétique & géométrique, consiste à abrégier & donner promptement la perfection à la série la plus parfaite lorsqu'on l'a trouvée, par exemple, s'il faut trouver le centième terme de la série primitive, comme il seroit trop long de réitérer cent fois la substitution & les opérations sur la formule, j'ai recours aux formules des séries dérivées en progression géométrique qui donnent facilement & prom-

tement

rement le nonante-sixième terme, car si l'on prend le troisième terme de la série primitive pour le premier de la série dérivée, & que l'on employe la formule de la progression géométrique double, on aura le 3^e. le 6^e. le 12^e. le 24^e. le 48^e. le 96^e terme.

Ensuite ajoutant à la formule de 96 la formule de la progression arithmétique pour sauter trois termes, j'ai $96 + 4 = 100^{\text{e}}$. terme cherché.

Ainsi toutes les séries dérivées servent pour abréger l'opération de la série primitive & fondamentale, & pour avoir une approximation plus prompte, de telle sorte qu'on trouve en peu de tems par leur moïen une série dérivée de trois ou quatre termes extrêmement convergente, & réduisant ces termes à la plus simple expression, lorsque le numérateur & le dénominateur d'un même terme ont un diviseur commun, on trouve par ce moïen la série la plus simple, & en même tems la plus convergente; or c'est par la Méthode du triangle des rapports que cette série se trouve infailliblement, de sorte que tout ce que nous dirons ici sur les formules rationnelles, n'est qu'une préparation qui sert à trouver les matériaux nécessaires pour former le triangle des rapports qui donne la plus simple, la plus convergente & la plus parfaite de toutes les séries.

Mais les séries dérivées soit en progression arithmétique continuë, soit en progression géométrique continuë, ou dans une progression quelconque composée de toutes les deux, fournissent un moïen court & facile de continuer à pas de géans cette série qui est la plus parfaite de toutes, & qui exprime le plus exactement & le plus promptement qu'il est possible en nombres entiers la racine quarrée désirée: les mêmes termes de séries s'étendent également pour trouver les racines des équations & des puissances de tous les degrez à l'infini, en observant ce qui leur est propre comme nous le verrons.

Analyse.

fff

Un point essentiel qu'il ne faut pas perdre de vûe, sont les limites d'erreur dans chaque terme des séries, je les donne dans le quarré & dans la racine, soit dans les séries qui donnent l'approximation par excès, soit dans les séries qui donnent l'approximation par défaut, de sorte qu'on trouve à chaque terme l'excès ou le défaut qui manque à l'exactitude géométrique qu'il est impossible de trouver par la nature des irrationaux.

Enfin je compare toutes les séries pour choisir la plus parfaite, qui est toujours celle que le triangle des rapports donne directement; mais pour former cette série, il faut pousser les autres séries assez loin pour avoir au moins quatre ou cinq quotients générateurs, comme nous le verrons, qui serviront de matériaux pour former le triangle des rapports.

Pour expliquer cette Méthode, on pourra en faire l'application à la racine quarrée de trois irrationaux qui sont importants dans la géométrie.

Le premier exemple est $\sqrt{2}$, qui exprime le rapport de la diagonale du quarré à son côté $\equiv 1$.

Le second exemple est $\sqrt{3}$, qui exprime le rapport du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle au rayon du même cercle, & c'est de ce rapport de $\sqrt{3}$, à 1, que dépend la quadrature du cercle.

Le troisième exemple est $\sqrt{41}$, qui est un exemple choisi à dessein d'expliquer cette nouvelle Méthode dans toute son étendue dans les séries primitives, car c'est le plus petit & le plus simple des nombres premiers où les valeurs soient différentes.

Car $41 \equiv aa + y$, ou pour mieux distinguer les valeurs des lettres $\equiv aa + y \equiv 36 + 5 \equiv 41$, & $\equiv cc - d \equiv 49 - 8 \equiv 41$.

Où l'on peut remarquer que les quatre valeurs a, y, c, d , sont toutes quatre différentes, puisque $a \equiv 6$, $y \equiv 5$, $c \equiv 7$, $d \equiv 8$.

Quoique $\sqrt{13}$ soit lui-même le plus petit & le plus simple des nombres premiers, sur lequel on puisse former quatre séries primitives sur deux formules, les quatre valeurs ne sont pas différentes, mais il n'y en a que deux qui sont répétées; car $13 = aa + y = 9 + 4$, qui donne $a = 3$, & $y = 4$, & le même $13 = aa - y = 16 - 3$, qui donne $a = 4$, & $y = 3$, dans lesquels les nombres 3 & 4 sont répétées, car $a = 3$ dans l'un & $= 4$ dans l'autre, de même que y , ce qui empêche d'apercevoir l'analogie des quatre séries des quarrés.

Premier Exemple. $\sqrt{2}$. Le rapport de la diagonale du quarré à son côté 1, s'exprime par le rapport de $\sqrt{2}$ à 1, c'est un rapport important chez les anciens, il ne peut s'exprimer exactement par aucun nombre, parce que $\sqrt{2}$ est une fraction composée de deux nombres premiers entre eux, par conséquent il n'ont aucune mesure commune, donc la racine de 2 est un nombre irrationnel qui est réellement dans la suite naturelle des nombres, & qu'on ne peut connoître cependant que par la division de 2 poussée à l'infini, ce qui est impossible par sa nature; ainsi ce qu'une intelligence bornée telle qu'est l'esprit humain peut faire de mieux, c'est d'en approcher le plus près & le plus promptement qu'il est possible par deux séries réglées, dont l'une exprime ce rapport par excès & l'autre par défaut, de sorte que cet excès & ce défaut soient les plus petits qu'il soit possible, comme ces deux séries sont la même dans tous leurs termes, excepté dans le dernier qui diffère dans le dernier chiffre, tout se réduit à former une série qui soit la plus approchée.

Or on peut former une infinité de séries pour exprimer ce rapport, dont les unes sont primitives & les autres en sont dérivées, ce qui engage, 1°. à donner le détail de leur formation; 2°. à trouver leurs limites;

fff ij

3°. à les comparer pour faire choix de la meilleure; 4°. à porter la meilleure au degré de perfection nécessaire, pour exprimer le plus promptement qu'il est possible le rapport cherché, & de la manière la plus approchée.

L'unique formule exemplaire pour $\sqrt{\frac{a}{b}}$

est $\frac{a}{b}$ & $\frac{1a+1b}{1a+1b}$, sur laquelle on peut former une série infinie incomplexe, supposant $a = 1$ & $b = 1$, comme il suit.

$\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$. premier terme.

$\frac{1a+1b}{1a+1b} = \frac{1+1}{1+1} = \frac{1}{2}$. second terme.

Je suppose $\frac{1}{2} = \frac{a}{b}$, donc $\frac{1a+1b}{1a+1b} = \frac{3+4}{3+2} = \frac{7}{5}$. 3^e. term.

Je suppose $\frac{7}{5} = \frac{a}{b}$. donc $\frac{1a+1b}{1a+1b} = \frac{7+10}{7+5} = \frac{17}{12}$. 4^e. term.

& continuant de la sorte je formerai la série infinie.

$\frac{1+}{1}$, $\frac{3-}{2}$, $\frac{7+}{5}$, $\frac{17-}{12}$, $\frac{41+}{29}$, $\frac{99-}{70}$, $\frac{239+}{169}$, &c.

Dont tous les termes ont alternativement les signes $+$ & $-$ au numérateur; pour trouver ces signes, il suffit de considérer que le premier terme formé sur la première partie de la formule $\frac{a}{b}$ est trop petit, il faut donc lui ajouter par le signe $+$ le second terme formé sur la seconde partie de la formule, mais on ajoute trop, donc ce second terme aura le signe $-$ pour marquer qu'il en faut retrancher le troisième terme, &c.

Autrement, chaque terme de cette série exprime le rapport cherché alternativement par défaut & par excès.

Car le carré du premier numérateur $1 = 1$, est surpassé d'une unité par le double du carré du premier dénominateur $1 \times 2 = 2$, puisque $2 - 1 = 1$ qui est l'excès dont le double du carré du dénominateur surpassé le carré du numérateur.

Je trouve le même excès dans tous les termes impairs 1, 3, 5, 7, 9, comparant le quarré du numérateur avec le double du quarré du dénominateur correspondant dans chaque terme.

Dans le premier terme 1 quarré de 1 qui est le premier dénominateur, est surpassé de 1 par 2, qui est le double de 1. quarré du premier dénominateur, car $1 = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1$.

Dans le troisième terme, 49 quarré du troisième numérateur 7, est surpassé de 1 par 50 double de 25, qui est le quarré du troisième dénominateur 5, car $49 = 2 \times 25 - 1 = 50 - 1$.

Dans le cinquième terme 1681, quarré du cinquième numérateur 41, est surpassé de 1 par 1682, double de 841 qui est le quarré du cinquième dénominateur 29, car $1682 = 2 \times 841 + 1$, & ainsi de tous les termes impairs à l'infini.

Au contraire dans les termes pairs comme le second, le quatrième, le sixième, le huitième, &c. Les quarrés des numérateurs surpassent d'une unité le double des quarrés des dénominateurs correspondans.

Dans le second terme 9 quarré du second numérateur 3, surpassé de 1 le nombre 8 qui est le double de 4, quarré du second dénominateur 2, car $9 = 2 \times 4 + 1 = 8 + 1$.

De même dans le quatrième terme 289, quarré du quatrième numérateur 17, surpassé de 1 le nombre 288, qui est le double de 144, quarré du quatrième dénominateur 12, car $289 = 2 \times 144 + 1 = 288 + 1$.

Dans le sixième terme 2801, quarré du sixième numérateur 99, surpassé de 1 le nombre 9800, qui est le double de 4900, quarré du sixième dénominateur 70, car $2801 = 2 \times 4900 + 1 = 9800 + 1$, & ainsi de tous les termes pairs à l'infini.

Cette série pour $\sqrt{2}$ est la série primitive & fondamentale, c'est une série incomplexe, dont chacun des termes exprime le rapport cherché alternativement par excès & par défaut.

C'est la première espèce du premier genre des séries, qui comprend sous lui une infinité d'espèces de séries différentes.

Cette première espèce peut se résoudre d'abord en deux séries complexes dérivées de celle-ci, l'une par addition continue faite au premier terme de la différence des termes excédans aux termes défailans immédiatement suivans.

C'est la seconde espèce du premier genre ou la première série dérivée complexe par addition; le premier terme $\frac{1}{1}^{+}$ est défailant, $\frac{3}{2}^{-}$ est excédant, le suivant $\frac{7}{5}^{+}$ est défailant, c'est $\frac{7}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 - 2 \times 7}{2 \times 5} = \frac{15 - 14}{10}$ donc leur différence est $\frac{1}{10}$, j'ajoute cette différence au premier terme $\frac{1}{1}^{+}$, ce qui donne pour le premier terme complexe de la série dérivée par addition $\frac{1}{1} + \frac{1}{10}$.

Je prends ensuite $\frac{7}{5}$ & $\frac{41}{29}$ qui sont le 3^e. & le 5^e. terme défailans; or $\frac{7 \times 29 - 5 \times 41}{5 \times 29} = \frac{203 - 205}{145} = -\frac{2}{145}$, c'est leur différence.

De même je prends le 5^e. & le 7^e. $\frac{41}{29}$ & $\frac{119}{169}$ qui sont tous deux défailans $= \frac{41 \times 169 - 29 \times 119}{29 \times 169} = \frac{6929 - 6931}{5901} = -\frac{2}{5901}$, ce qui donne la première série dérivée $\frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{2}{145} + \frac{2}{5901}$, &c. les dénominateurs $10 = 9 + 1$, $145 = 144 + 1$.

La troisième espèce du premier genre qui est la seconde série dérivée se forme par soustraction, elle se nomme complexe par soustraction, & se fait en ôtant continuellement du premier terme de celle-ci qui est tou-

jours le second de la série primitive, les différences de chaque deux termes immédiatement suivans.

Le premier terme est $\frac{1}{1}$ qui est défailant, le second terme est $\frac{1}{2}$ qui est le premier des termes excédans, je prends la différence des deux termes qui suivent ce second terme, c'est $\frac{7}{1}$ & $\frac{17}{12}$ qui sont le 4^e. & le 5^e. de la série primitive; or $\frac{17}{12} - \frac{7}{1} = \frac{17 \times 1 - 12 \times 7}{12 \times 1}$
 $= \frac{85 - 84}{12} = \frac{1}{12}$, c'est le second terme.

De même j'ôte la différence du 5^e. & du 6^e. terme $\frac{41}{29} + \frac{99}{70}$, or $\frac{99}{70} - \frac{41}{29} = \frac{99 \times 29 - 41 \times 70}{70 \times 29}$
 $= \frac{2871 - 2870}{2030} = \frac{1}{2030}$, c'est le troisième terme de la seconde série dérivée.

Seconde série dérivée pour $\sqrt{2}$. $\frac{1}{2} - \frac{1}{60} - \frac{1}{2030}$, &c.

DES FORMULES.

Pour trouver les Séries rationnelles infinies, primitives ou du premier genre.

Pour exprimer ou transformer les nombres irrationaux du second degré.

Soit proposé de trouver la racine quarrée de 3. La première idée qui se présente à l'esprit, est que 3 est un quarré imparfait compris entre les deux quarrés parfaits 1, dont la racine est 1, & 4, dont la racine est 2; il est évident que $\sqrt{3}$ est entre 1 & 2, plus grande que 1, & plus petite que 2, par conséquent $\sqrt{3}$ ne peut être représenté que par une fraction $\frac{a}{b}$ dont le numérateur a , soit plus grand que $1b$, & plus petit que $2b$; mais il est démontré dans le 7, le 8 & 9 Livre des Elémens d'Euclide, que

lorsque a n'est pas mesuré par b , il est impossible que le carré aa , soit mesuré par le carré bb ; d'où il suit que la fraction $\frac{a}{b}$ ne peut point être exacte & en même tems rationnelle pour exprimer la valeur de $\sqrt[3]{3}$. Ainsi tout ce que peut faire une intelligence finie telle qu'est l'esprit humain, se réduit à trouver deux séries en nombres entiers a & b , tels que $aa = 3bb + c$, en sorte que la différence c soit par excès, ou par défaut; soit la plus petite différence possible.

Première Série des Formules rationnelles, ou Série primitive & fondamentale en lettres, pour $\sqrt[3]{3}$

Premier terme.	$\frac{a}{b}$	
Second terme.	$\frac{2a + 3b}{1a + 2b}$	$= \frac{c}{d}$
Troisième terme.	$\frac{2c + 3d}{1c + 2d}$	$= \frac{e}{f}$
Quatrième terme.	$\frac{2e + 3f}{1e + 2f}$	$= \frac{g}{h}$
Cinquième terme.	$\frac{2g + 3h}{1g + 2h}$	$= \frac{i}{k}$

Sixième terme. . . &c. Ainsi de suite à l'infini.

Explication & formation de cette Série primitive.

Dans $\frac{a}{b}$ on peut substituer tel nombre qu'on voudra; mais le plus court chemin est de supposer $a =$ à la racine du carré prochain plus petit ou plus grand que le carré imparfait proposé; ici je suppose la racine 2 du carré plus grand 4.

Dans

Dans le second terme, il y a seulement deux lettres répétées a & b . avec des coefficients.

Dans le numérateur le coefficient de a est la racine 2 du carré prochain 4; dans le dénominateur le coefficient de b est 2, car ces deux coefficients sont toujours égaux.

Dans le numérateur, le coefficient de b est toujours donné, c'est 3 dans ce cas, parce qu'on cherche la racine de 3; en général c'est l'exposant de la puissance proposée.

Le coefficient de a dans le dénominateur est toujours l'unité constante 1 a , dans le second terme.

Seconde Série des Formules rationnelles composée des deux seules lettres a & b.

Pour former cette seconde série dérivée de la série primitive & fondamentale, j'ai d'abord les deux premiers termes tout formez.

Premier terme.

$$\frac{a}{b}$$

Second terme.

$$\frac{2a + 3b}{1a + 2b}$$

Le troisième terme

$$\frac{7a + 12b}{4a + 7b}$$

se forme ainsi.

Je substitué dans le troisième terme $\frac{2c + 3d}{1c + 2d}$ de la série fondamentale & primitive au lieu des lettres c & d , leur valeurs comme il suit,

$$\frac{c}{d} = \frac{7a + 3b}{1a + 7b}$$

$$\text{Or, } \begin{array}{l} 2c = 4a + 6b \\ + 3d = 3a + 6b \end{array}$$

$$\text{Donc } \frac{2c + 3d}{1c + 2d} = \frac{7a + 12b}{4a + 7b}$$

$$\begin{array}{l} \& 1c = 2a + 3b \\ + 2d = 2a + 4b \end{array}$$

$$\text{Donc } \frac{1c + 2d}{1c + 2d} = \frac{4a + 7b}{4a + 7b}$$

ce qui donne pour le 3^e. terme $\frac{7a + 12b}{4a + 7b}$ comme ci-dessus.

Analyse.

Il est facile de continuer les termes de cette série par la même Méthode, c'est ainsi qu'on a trouvé les termes suivans.

$$\begin{array}{l} \text{Quatrième terme.} \quad \frac{27a + 45b}{15a + 26b} \\ \text{Cinquième terme.} \quad \frac{97a + 168b}{56a + 97b} \end{array}$$

& ainsi de suite à l'infini.

On peut aussi continuer directement cette seconde série lorsqu'on a deux premiers termes comme il suit.

Puisque dans le numérateur d'un terme suivant quelconque, le coefficient de a est composé de deux nombres pris dans le numérateur du terme précédent, ces deux nombres sont le double du coefficient de a avec le coefficient de b , car dans le troisième terme, le coefficient de a dans le numérateur est $7 = 2 \times 2 + 3$, c'est-à-dire, $7a = 2 \times 2a + 3$. Or 2 & 3 sont les coefficients du numérateur du terme précédent.

Dans le dénominateur le coefficient de b est 7, toujours égal au coefficient de son numérateur a .

Dans le dénominateur le coefficient de a est 4 composé de deux nombres; sçavoir, du coefficient 2 de a pris dans le numérateur du terme précédent & de 2 double de 1 coefficient de a pris dans le dénominateur du terme précédent.

De même dans le quatrième terme le coefficient de a dans le dénominateur est 15 composé de $7 + 4 + 4$, qui sont les coefficients de a pris dans le numérateur & dans le dénominateur du terme précédent.

Dans le numérateur le coefficient de b , est toujours le triple du coefficient de a trouvé pour le dénominateur du même terme, ainsi ce coefficient est le dernier que l'on trouve; ce qui se réduit à trouver les coefficients de a pour le numérateur & le dénominateur.

Exemple. Ayant le troisième terme $\frac{7a+12b}{4a+7b}$ pour trouver par son moyen le quatrième terme, je dis $2 \times 7 + 12 = 14 + 12 = 26$. ce qui donne pour le numérateur $26a$, & en même tems pour le dénominateur $26b$, puisqu'ils sont toujours égaux $\frac{26a+}{+26b}$.

Je prends dans le troisième terme les coefficients de a , $7a + 2 \times 4a = 7 + 8a = 15a$, c'est le coefficient du dénominateur a .

Enfin je triple ce coefficient $15 \times 3 = 45$, c'est le coefficient du numérateur $45b$. Ce qui donne pour le quatrième terme cherché $\frac{26a+45b}{15a+26b}$.

Règle générale.

Soit le terme précédent $\frac{ca+3db}{da+cb}$

Le terme suivant sera,

$$\frac{2c + 3d \times a + 6d + 3c \times b}{2d + c \times a + 2c + d \times b}.$$

Soit $c = 7$. $d = 4$. $3d = 12$.

Donc $2c + 3d \times a = 14 + 12 = 26a$.

Et $2d + c \times a = 8 + 7 = 15a$.

Remarque. Pour continuer cette seconde série, il suffit de trouver les deux coefficients de a ; sçavoir, celui du numérateur & celui du dénominateur, car le coefficient de a du numérateur, donne le coefficient de b dans le dénominateur, qui lui est égal, & le coefficient de a étant trouvé pour le dénominateur, son triple donne le coefficient de b pour le numérateur.

L'usage de ces formules consiste à substituer des nombres à la place des lettres pour trouver en nombres entiers des séries rationnelles qui expriment par approximation la

racine du quarré imparfait proposé, ce que j'appelle transformer la racine d'un quarré imparfait dans une série infinie rationnelle.

Il y a trois genres de Formules pour les séries rationnelles dans chacune des quatre séries primitives.

Le premier genre contient la série primitive & fondamentale comme la précédente, dont les termes se suivent par ordre, comme les nombres ordinaires 1. 2. 3. 4. 5. &c.

Le second genre contient la série des termes pris en progression Arithmétique quelconque, en sautant ou un terme, ou deux termes, ou trois ou quatre termes, &c. en progression Arithmétique quelconque différente de la progression naturelle des nombres, laquelle fait seule le premier genre, sans passer par les termes moïens.

Exemples. 1^o. Pour sauter un terme ou plusieurs tout d'un coup sans passer par les termes moyens, il faut avoir des formules propres pour chacun des nombres de termes que l'on veut sauter : or ces formules ont toujours a & b tant au numérateur qu'au dénominateur ; ainsi toute la difficulté consiste à trouver les coefficients.

Pour trouver les coefficients, il faut d'abord trouver une série en nombres sur la série primitive & fondamentale en lettres pour le quarré imparfait proposé.

Ainsi pour \sqrt{x} , la série primitive en nombres est

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \&c.$$

Exposans 1. 2. 3. 4. 5. 6. des termes.

Le premier terme étant $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$ la formule pour le

$$\text{troisième terme est } \frac{3a + 4b}{2a + 3b} = \frac{3 + 4}{2 + 3} = \frac{7}{5}$$

Supposant le troisième terme $= \frac{a}{b}$, $= \frac{7}{5}$, la formule

$$\frac{3a+4b}{2a+3b} = \frac{3 \times 7 + 4 \times 5}{2 \times 7 + 3 \times 5} = \frac{21+20}{14+15} = \frac{41}{29}. \text{ Donc le } \\ \text{cinquième terme} = \frac{41}{29}.$$

Or le second terme de la série $\frac{1}{3}$ donne ces coefficients, car le numérateur 3 donne dans la formule le coefficient 3 a du numérateur, & le coefficient 3 b du dénominateur.

Le dénominateur 2 donne le coefficient 2 a , & son double donne le coefficient 4 b du numérateur, de même prenant un terme quelconque pour premier terme de la série, on aura par la même forme le troisième terme suivant, en sautant le terme moien suivant la formule exemplaire

$$\frac{a}{b} \& \frac{3a+4b}{2a+3b}.$$

2°. Pour sauter deux termes, la formule exemplaire est

$$\frac{a}{b} \& \frac{7a+10b}{5a+7b} \text{ les coefficients sont tirés du troisième terme}$$

de la série $\frac{7}{5}$ car $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, & $\frac{7a+10b}{5a+7b} = \frac{7+10}{5+7} = \frac{17}{12}$.

3°. Pour sauter trois termes, la formule exemplaire est

$$\frac{a}{b} \& \frac{17a+24b}{12a+17b} \text{ les coefficients sont tirés du quatrième ter-}$$

me de la série numérique $\frac{17}{12}$. Or $\frac{17a+24b}{12a+17b} = \frac{17+24}{12+17}$

$$= \frac{41}{29}.$$

4°. Pour sauter quatre termes, la formule exemplaire

$$\text{est } \frac{a}{b} \& \frac{41a+58b}{29a+41b} = \frac{41+58}{29+41} = \frac{99}{70}.$$

On peut continuer à trouver des formules à l'infini pour sauter tel nombre de termes qu'on voudra; ce qui abrège la formation de la série & la rend plus convergente, puisque les termes les plus éloignés donnent toujours une approximation plus grande de la racine.

Si on prend un terme éloigné dans la première série fondamentale pour premier terme de la série du second

genre où l'on saute plusieurs termes en progression arithmétique, dès le second terme on avancera beaucoup sans passer par les termes moyens ; mais on avancera encore davantage en sautant les termes en la progression géométrique qui suit, qui est le troisième genre des formules.

Le troisième genre contient les formules pour sauter un nombre de termes moyens en progression géométrique sans passer par les termes moyens.

Ce troisième genre comprend toutes les progressions géométriques à l'infini ; il avance à pas de géants & rend la série beaucoup plus convergente, & par conséquent les termes plus approchés que les deux genres précédens. Car la formule de la progression géométrique double, donne un terme double du précédent. La progression triple, donne un terme triple. La progression quadruple, donne un terme quadruple, &c.

La formule exemplaire, générale & primitive pour sauter un nombre de termes en progression géométrique double, sans passer par les termes moyens est $\frac{a}{b}$ &

$$\frac{2aa + 1}{2ab}.$$

Lorsque le terme simple est impair, le numérateur de la formule est $2aa + 1$. Mais lorsque le terme simple est pair, la formule est $2aa - 1$. c'est la plus simple, la plus prompte & la plus élégante de toutes les formules générales. C'est par son moyen qu'on a construit la table suivante.

Table générale des formules pour trouver les termes en progression
 Progr. géom. géométrique pour $\sqrt{2}$.

Simple	$\left\{ \begin{array}{l} \text{numérateur} \quad \frac{1 x^1}{1 y} \\ \text{dénominateur} \quad 1 y \end{array} \right.$
Double	$\left\{ \begin{array}{l} \text{numérat.} \quad \frac{2 x^2 \pm 1}{2 x^1 y} \\ \text{dénom.} \quad 2 x^1 y \end{array} \right.$
Triple	$\left\{ \begin{array}{l} \text{numérat.} \quad \frac{4 x^3 \pm 3 x^1}{4 x^2 y \pm 1 y} \\ \text{dénom.} \quad 4 x^2 y \pm 1 y \end{array} \right.$
Quadruple	$\frac{8 x^4 \pm 8 x^2 + 1}{8 x^3 y \pm 4 x^1 y + 1 y}$
Quintuple	$\frac{16 x^5 \pm 20 x^3 + 5 x}{16 x^4 y \pm 12 x^2 y + 1 y}$
Sextuple	$\frac{32 x^6 \pm 48 x^4 + 18 x^2 \pm 1}{32 x^5 y \pm 32 x^3 y + 6 x^1 y}$
Septuple	$\frac{64 x^7 \pm 112 x^5 + 56 x^3 \pm 7 x}{64 x^6 y \pm 80 x^4 y + 24 x^2 y \pm 1 y}$
Octuple	$\frac{128 x^8 \pm 256 x^6 + 160 x^4 \pm 32 x^2 + 1}{128 x^7 y \pm 192 x^5 y + 80 x^3 y \pm 8 x^1 y}$
Noncuple	$\frac{256 x^9 \pm 576 x^7 + 432 x^5 \pm 120 x^3 + 9 x}{256 x^8 y \pm 448 x^6 y + 240 x^4 y \pm 40 x^2 y + 1 y}$
Décuple	$\frac{512 x^{10} \pm 1280 x^8 + 1120 x^6 \pm 400 x^4 + 50 x^2 \pm 1}{512 x^9 y \pm 1024 x^7 y + 672 x^5 y \pm 160 x^3 y + 10 x^1 y}$
Ondécuple	$\frac{1024 x^{11} \pm 2816 x^9 + 2816 x^7 \pm 1232 x^5 + 220 x^3 \pm 11 x}{1024 x^{10} y \pm 2304 x^8 y + 1792 x^6 y \pm 560 x^4 y + 60 x^2 y \pm 1 y}$
Dodécuple	$\frac{2048 x^{12} \pm 6144 x^{10} \pm 6912 x^8 \pm 3584 x^6 + 840 x^4 \pm 72 x^2}{2048 x^{11} y \pm 5120 x^9 y + 4608 x^7 y \pm 1792 x^5 y + 280 x^3 y \pm 12 x^1 y}$
&c.	&c. &c. . . .

Table des numérateurs des termes en progression géométrique
pour $\sqrt{2}$.

1 ^{re} . colon.	2 ^{de} . colon.	3 ^e . colon.	4 ^e . colon.	5 ^e . colon.	6 ^e . colon.	7 ^e . col.
Simple.	$1 x^1$					
Double	$2 x^2 +$	1				
Triple	$4 x^3 +$	$3 x^1$				
Quadruple	$8 x^4 +$	$8 x^2 +$	1			
Quintuple	$16 x^5 +$	$20 x^3 +$	$5 x$			
Sextuple	$32 x^6 +$	$48 x^4 +$	$18 x^2 +$	1		
Septuple	$64 x^7 +$	$112 x^5 +$	$56 x^3 +$	$7 x$		
Octuple	$128 x^8 +$	$256 x^6 +$	$160 x^4 +$	$32 x^2 +$	1	
Noncuple	$256 x^9 +$	$576 x^7 +$	$432 x^5 +$	$120 x^3 +$	$9 x$	
Decuple	$512 x^{10} +$	$1280 x^8 +$	$1120 x^6 +$	$400 x^4 +$	$50 x^2 +$	1
Undécuple	$1024 x^{11} +$	$2816 x^9 +$	$2816 x^7 +$	$1232 x^5 +$	$220 x^3 +$	$11 x$
Dodécuple.	$2048 x^{12} +$	$6144 x^{10} +$	$6912 x^8 +$	$3584 x^6 +$	$840 x^4 +$	$72 x^2$
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Table

Table des dénominateurs des termes en progression géométrique pour $\sqrt{2}$.

1 ^{re} . colon.	2 ^{de} . colon.	3 ^e . colon.	4 ^e . colon.	5 ^e . colon.	6 ^e . colon.	7 ^e . col.
Simple	1y					
Double	2 x ¹ y					
Triple	4 x ² y ±	1y				
Quadruple	8 x ³ y ±	4 x ¹ y				
Quintuple	16 x ⁴ y ±	12 x ² y ±	1y			
Sextuple	32 x ⁵ y ±	32 x ³ y ±	6 x ¹ y			
Septuple	64 x ⁶ y ±	80 x ⁴ y ±	24 x ² y ±	1y		
Octuple	128 x ⁷ y ±	192 x ⁵ y ±	80 x ³ y ±	8 x ¹ y		
Noncuple	256 x ⁸ y ±	448 x ⁶ y ±	240 x ⁴ y ±	40 x ² y ±	1y	
Décuple	512 x ⁹ y ±	1024 x ⁷ y ±	672 x ⁵ y ±	160 x ³ y ±	10 x ¹ y	
Ondécuple	1024 x ¹⁰ y ±	2304 x ⁸ y ±	1792 x ⁶ y ±	560 x ⁴ y ±	60 x ² y ±	1y
Dodécuple	2048 x ¹¹ y ±	5120 x ⁹ y ±	4608 x ⁷ y ±	1792 x ⁵ y ±	280 x ³ y ±	12 x ¹ y
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Analyse.

h h h

Table des coefficients des numérateurs.

1					
2	1				
4	3				
8	8	1			
16	20	5			
32	48	18	1		
64	112	56	7		
128	256	160	32	1	
256	576	432	120	9	
512	1280	1120	400	50	1
1024	2816	2816	1232	220	11
2048	6144	6912	3584	840	72

Table des coefficients des dénominateurs.

1					
2					
4	1				
8	4				
16	12	1			
32	32	6			
64	80	24	1		
128	192	80	8		
256	448	240	40	1	
512	1024	672	160	10	
1024	2304	1792	560	60	1
2048	5120	4608	1792	280	12

Construction de la Table des Formules rationnelles , des termes de la série fondamentale en progression géométrique.

Comme chaque terme de la série contient une fraction dont le premier terme est le numérateur , & le second terme le dénominateur pris dans la série primitive pour chaque cas particulier.

Je fais deux tables dont l'une contient les numérateurs de la série primitive pris en progression géométrique sans passer par les termes moïens.

La seconde table contient les dénominateurs correspondans au numérateur de chaque terme.

On peut continuer ces tables à l'infini , puisqu'il y a une infinité de progressions géométriques à l'infini ; je me borne ici au douzième terme de la progression , ce qui est suffisant dans la pratique.

Explication & formation de la Table des numérateurs pour la Série rationnelle de $\sqrt{2}$.

Cette table contient sept colonnes.

La première colonne contient les exposans ou les noms des progressions géométriques , simple , double , triple , quadruple , &c. dodécuple.

Toutes les autres colonnes contiennent les puissances de x prises de suite avec des coefficients ; mais ces puissances de x , ne commencent qu'après un interval occupé par l'unité pour aller d'une colonne à la suivante.

La seconde colonne contient les puissances de x prises de suite avec des coefficients qui sont les puissances de la progression géométrique de 2 , exposant du degré de la racine cherchée qui commence par l'unité pour commencer d'aussi loin qu'il est possible , c'est 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.

La troisième colonne qui commence par l'unité à la seconde cellule vis-à-vis le double , contient dans les cel-

b b b ij

lules suivantes les puissances de x à commencer par la troisième qui en contient la première puissance x' . Comme les autres puissances sont de suite & leurs exposans croissent toujours de l'unité, il n'y a aucune difficulté dans leur formation.

Dans cette troisième colonne, toute la difficulté consiste à trouver les coefficients numériques de chacune de ces puissances de x , le premier est l'unité que j'écris dans la seconde cellule. Le second est 3 égal à la somme $1 + 2$. Or 1 est le premier coefficient, ou le coefficient du premier terme précédent dans la même troisième colonne, & 2 est le coefficient qui est à côté dans la première colonne, auquel j'ajoute la première puissance de x' ; ainsi j'ai pour second terme $3x'$ qui répond à la progression triple.

Pour avoir le troisième terme 8, je prends la somme des deux termes précédens de la même colonne $1 + 3 = 4$, plus le terme 4 à côté du dernier dans la colonne précédente. Ce qui donne $1 + 3 + 4 = 8$. avec la seconde puissance de x' . c'est $8x^2$.

Le quatrième terme est $20x^3$; or $20 = 1 + 3 + 8 + 8$. Ce dernier 8 est dans la colonne précédente à côté du terme précédent.

Le cinquième terme $48x^4$ vient de $1 + 3 + 8 + 20 + 16$, ce 16 est à côté de 20. & ainsi des autres.

La quatrième colonne commence vis-à-vis le quadruple à la quatrième cellule, 1, $5x$, $18x^2$, $56x^3$, $160x^4$, &c. Ce sont les puissances de suite de x avec des coefficients dont le premier est l'unité, le second 5 vient du coefficient de la même colonne 1, & des deux coefficients pris de la colonne précédente $1 + 3 = 4$, en laissant 8 qui est à côté du terme précédent de la quatrième colonne.

Le troisième coefficient 18 vient de $1 + 5 = 6$ pris dans la même quatrième colonne précédente. Or $6 + 12 = 18$.

Le quatrième coefficient 56 vient de $1 + 5 + 18$

$\equiv 24$ pris dans la quatrième colonne, & de $1 + 3 + 8 + 20 \equiv 32$ pris dans la troisième colonne. Or $24 + 32 \equiv 56$.

Il est facile de continuer de même cette quatrième colonne & les suivantes par la même Méthode.

Explication & formation de la Table des dénominateurs des termes de la Série primitive en progression géométrique pour $\sqrt{2}$.

Cette Table contient sept colonnes comme celle des numérateurs.

La première colonne contient les exposans ou les noms des progressions géométriques, double, triple, quadruple, &c.

Les autres colonnes contiennent les puissances de x prises de suite multipliées par y , avec des coefficients numériques.

Les coefficients numériques de la seconde colonne sont 1. 2. 4. 8. 16. &c. Ce sont les puissances de 2, à commencer par l'unité.

Les coefficients de la troisième colonne 1. 4. 12. 31. &c. se forment ainsi.

Le premier coefficient 1 est à la troisième cellule vis-à-vis du triple. C'est l'unité.

Le second coefficient 4, $\equiv 1 + 1 + 2$. c'est-à-dire 4 égale le coefficient 1 qui le précède dans la troisième colonne, ajouté à la somme des termes de la colonne précédente $1 + 2$ jusqu'au terme du rang précédent exclusivement,

Le troisième coefficient 12 $\equiv 1 + 4 + 1 + 2 + 4$. $\equiv 5$ somme des termes précédens de cette troisième colonne, plus 7 somme des termes précédens jusqu'au pénultième rang dans la seconde colonne.

Le 4^{me}. coefficient 32 $\equiv 1 + 4 + 12 + 1 + 2 + 4 + 8$ $\equiv 17 + 15$, somme des termes précédens dans cette

hhh iij

colonne & dans celle d'à côté non compris celui du pénultième rang, &c. ainsi des autres.

La quatrième colonne qui commence à la cinquième cellule vis-à-vis le quadruple par l'unité est 1, 6. 24. 80. &c. Le premier coefficient est 1.

Le second coefficient $6 = 1 + 1 + 4$, c'est la somme du coefficient précédent de la même colonne & de celle qui précède non compris le rang précédent.

Le troisième coefficient $24 = 1 + 6 + 1 + 4 + 12$ ou $7 + 17$ qui est la somme des coefficients précédens de la même colonne & de celle qui la précède non compris le rang précédent.

Remarque. 1°. Dans les numérateurs contenus dans la Table, le dernier coefficient est toujours impair; ainsi dans le simple où il n'y a qu'un terme, c'est $1x$ qui est impair.

Dans le double c'est 1, l'unité simple, dans le triple c'est $3x'$, dans le quadruple 1, dans le quintuple $5x$, &c.

De sorte qu'il se trouve toujours une unité simple pour dernier chiffre d'un terme compris entre deux coefficients de la première puissance x' , lesquels coefficients sont égaux à l'exposant du terme.

2°. Les seconds termes sont tous pairs, & même tous les termes excepté le dernier chiffre ou le dernier terme seul.

3°. Dans la Table des dénominateurs, chacun est le coefficient ou le multiplicateur de y ou de quelque puissance de x multipliée par y .

Le coefficient des termes pairs, est toujours un nombre pair, même dans le double qui n'a qu'un seul terme, & il est égal à l'exposant du terme.

Mais le coefficient de chaque dernier terme impair est l'unité.

Tous les autres coefficients sont des nombres impairs.

Autre Méthode pour trouver les coefficients du numérateur & du dénominateur des termes en progression géométrique pour $\sqrt{2}$.

J'éleve le binôme $1x + 1y$ à la puissance qui a le même exposant de la progression géométrique désirée.

Pour la progression double, j'éleve le binôme

$1x + 1y$ à la seconde puissance,

$$\begin{array}{r} 1x + 1y \\ \times 1x + 1y \\ \hline 1x^2 + 1x'y' \\ + 1x'y' + 1y^2 \\ \hline 1x^2 + 2x'y' + 1y^2 \end{array}$$

je prends les termes alternatifs pour en faire les deux termes de la fraction de la formule, le premier terme $1x^2$ & le troisième terme $1y^2$ font le numérateur.

Après les avoir préparé comme il suit, je multiplie l'exposant 2 de la progression double donnée par le coefficient 1, j'ai $2 \times 1 = 2$ coefficient du numérateur $2x^2$, & je retranche y^2 du dernier terme, laissant l'unité seule, ce qui donne le numérateur $2x^2 + 1$.

Le second terme donne le dénominateur $2x'y'$, ce qui donne $\frac{2x^2 + 1}{2x'y'}$ pour le double.

De même pour la formule de la progression quadruple dont l'exposant est 4, j'éleve le binôme $1x + 1y$ à la quatrième puissance

$$\begin{array}{r} 1x^2 + 2x'y' + 1y^2. \text{ Seconde puissance.} \\ \times 1x^2 + 2x'y' + 1y^2. \\ \hline 1x^4 + 2x^3y' + 1x^2y^2 \\ + 2x^2y' + 4x^2y^2 + 2x'y^3 \\ + 1x^2y^2 + 2x'y^3 + 1y^4 \\ \hline 1x^4 + 4x^3y' + 6x^2y^2 + 4x'y^3 + 1y^4. \end{array}$$

je prends les termes alternatifs, sçavoir le 1^{er}. le 3^e. le 5^e. & autres impairs pour en faire le numérateur après les

avoir préparé comme ci-dessus ; & les termes pairs , savoir le second , le quatrième & autres pairs pour en faire le dénominateur de la formule qui suit.

$$\frac{8x^4 + 8x^2 + 1}{8x^3y + 4x'y'}$$

Or cette formule vient des

termes impairs.

$$1x^4$$

$$6x^2y'$$

$$1y^4$$

$$\frac{\quad}{8}$$

1^e. somme alternative des coefficients.

Du milieu & des extrêmes.

termes pairs.

$$4x^3y'$$

$$4x'y^3$$

$$\frac{\quad}{8}$$

2^e. somme alternative des coefficients.

Des termes moyens.

Ainsi le premier terme du numérateur & du dénominateur ont 8 pour coefficient qui est égal à chacune des sommes alternatives des coefficients, ce qui donne.

$$\frac{8x^4 + 8x^2 + 1}{8x^3y + 4x'y'} \quad \text{Formule pour le quadruple.}$$

C'est-à-dire, le premier terme impair donne le premier terme du numérateur, & le premier terme pair donne le premier terme du dénominateur dont les coefficients sont changez & égaux à chacune des sommes alternatives des coefficients.

Je retranche dans tous les termes pairs les puissances de y , en laissant leurs coefficients ; de sorte que dans le dernier terme qui est la haute puissance de y , j'ai seulement 1, au lieu de $1y^4$.

Dans les termes pairs, je laisse seulement la première puissance de y , c'est y' , & je réduis à cette puissance les autres puissances de y lorsqu'il s'y en trouve.

Il en est de même dans la formule de la progression sextuple.

$$\frac{32x^6 + 48x^4 + 18x^2 + 1}{32x^5y + 32x^3 + 6x'y'} \quad \text{\& dans toutes les autres formules.}$$

Mais

Mais il y a de l'art à déterminer les coefficients des autres termes, comme nous l'allons voir.

Examen & formation directe des coefficients.

Pour connoître la nature de la progression qui regne dans ces coefficients, je les écris dans leur ordre, dans des cellules égales disposées sur un triangle rectangle comme ci-dessus dans la quatrième table, afin de voir comment les mêmes nombres se répondent en ligne diagonale.

1°. Je trouve que les coefficients des numérateurs considérés en ligne diagonale donnent plusieurs progressions arithmétiques; ces diagonales sont, 1°. tous, les premiers chiffres de chaque colonne, 2°. tous les seconds, 3°. tous les troisièmes termes, &c.

La première diagonale est 1. 1. 1. 1. &c. dont la différence est zéro, c'est la première progression arithmétique de zéro degré.

La seconde diagonale est 3. 5. 7. 9. 11. &c. dont la différence constante est 2, c'est la seconde progression arithmétique du 1^{er}. degré, & la série des nombres impairs.

La troisième diagonale est 8. 18. 32. 50. &c. c'est la troisième progression arithmétique du second degré, dont la différence constante est 4. Il est facile de trouver de même les progressions qui regnent dans les autres diagonales; mais il est plus facile pour les trouver d'écrire de suite sur une ligne tous les premiers nombres, ensuite tous les seconds, & continuant ainsi jusqu'à la fin, & négligeant les premiers nombres de chaque rang, parce que ce sont les puissances de 2, & prenant par soustraction les différences de chaque rang, on trouvera le degré de la progression & la différence constante, comme il est expliqué ci-dessus dans le Traité des progressions arithmétiques.

2°. On trouvera de même que les coefficients des dénominateurs pris en diagonale sont 1. 1. 1. 1. &c. dont

Analyse.

iii

la différence constante $\equiv 0$, c'est une progression de zéro degré.

La seconde progression arithmétique des coefficients pris en diagonale, est 2. 4. 6. 8. 10. &c. dont la première différence constante $\equiv 2$, les nombres générateurs sont 2 & 2, cette progression est du premier degré.

La troisième progression des coefficients pris en diagonale est 4. 12. 24. 40. 60. dont la seconde différence constante est 4, elle est du second degré, les nombres générateurs sont 4. 8. 4.

La quatrième progression prise en diagonale est 8. 32. 80. 160. 280. 448. &c. la différence constante $\equiv 8$. les nombres générateurs sont 8. 24. 24. 8.

Autre formation des coefficients.

La seconde colonne contient les puissances de la progression géométrique double de 2, c'est $1x, 2x^2, 4x^3, 8x^4, 16x^5, \&c.$ en général pour l'exposant p d'une progression quelconque, le 1^{er}. terme $\equiv 2^{p-1} x^p$, ainsi pour le 7^e. terme j'ai $2^{7-1} \equiv 2^6 \equiv 64x^7$.

Dans la table des numérateurs la troisième colonne 1. 3. 8. 20. se forme ainsi.

<i>double</i>	$1 \equiv 1.$	<i>ou bien</i>	$1 \equiv 1$		
<i>triple</i>	$3 \equiv 3 \times 1$		$3 \equiv 2 \times 1 + 1$		
<i>quadruple</i>	$8 \equiv 4 \times 2$		$8 \equiv 2 \times 3 + 2$		
<i>quintuple</i>	$20 \equiv 5 \times 4$		$20 \equiv 2 \times 8 + 4$		
<i>sextuple</i>	$48 \equiv 6 \times 8$		$48 \equiv 2 \times 20 + 8$		
<i>&c.</i>	$112 \equiv 7 \times 16$		$112 \equiv 2 \times 48 + 16$		
	$256 \equiv 8 \times 32$		$256 \equiv 2 \times 112 + 32$		
	$576 \equiv 9 \times 64$		$576 \equiv 2 \times 256 + 64$		
	<i>coefficients.</i>		<i>coefficients.</i>	<i>coefficients précédents.</i>	<i>puissances de 2.</i>
	<i>suite naturelle des nombres.</i>		<i>multiplieateur constant.</i>		

Formule $p = n \times 2^{p-n}$, p est l'exposant du terme n , exposant de la colonne, soit le quadruple dont $p = 4$, j'ai $4 = 2 \times 2^{4-2}$ ou $2 \times 4 = 8$.

Dans la Table des numérateurs, la quatrième colonne des coefficients commence au quadruple c'est 1. 5. 18. 56. &c. qui se forment ainsi.

quadruple $1 = 1$
 quintuple $5 = 4 \times 1 + 1$
 sextuple $18 = 8 \times 2 + 2$
 septuple $56 = 16 \times 3 + 8$
 octuple $160 = 32 \times 4 + 32$
 &c. &c. &c. &c.

Formule pour trouver tout d'un coup un terme quelconque, $p = n \times 2^{p-n}$, soit p l'exposant du terme cherché $= 7$ pour le septuple, & soit n , l'exposant de la colonne $= 4$.

J'ai $p = n = 7 = 4 = 3$.

$2^{p-n} = 2^{7-4} = 2^3 = 8$.

or $3 \times 16 = 56$, donc le coefficient du septuple est 56.

Or l'exposant 3 de la puissance de $x = 7 - 4 = 3$, ou $p - n$ trouvé ci-dessus $= 3$.

La cinquième colonne des coefficients des numérateurs commence au septuple, c'est 1. 7. 32. 120. 400.

Sextuple $1 = 1$
 septuple $7 = 4 \times 1 + 3$
 octuple $32 = 8 \times 4$
 noncuple $120 = 12 \times 10$
 décuple $400 = 20 \times 20$
 ondécup. $1232 = 12 \times 100 + 32$ ou $400 \times 3 + 32$
 dodécup. $3584 = 1232 \times 2 + 1120$
 &c. &c. &c.

La Série des coefficients de la sixième colonne des numérateurs commence à l'octuple, c'est 1. 9. 50. 220. 840. &c.

<i>octuple</i>	$\equiv 1 \equiv 1$	<i>ou</i> 1×1
<i>noncuple</i>	$\equiv 9 \equiv 4 + 4 + 1$	<i>ou</i> 3×3
<i>décuple</i>	$50 \equiv 5 \times 10$	<i>ou</i> 5×10
<i>ondécuple</i>	$220 \equiv 6 \times 70$	<i>ou</i> $7 \times 30 + 10$
<i>dodécuple</i>	$840 \equiv 8 \times 80$	<i>ou</i> $9 \times 90 + 30$
		<i>ou</i> $7 \times 90 + 10$
&c.	&c.	&c.

Pour les coefficients des dénominateurs, la seconde colonne de la table qui est la première colonne des coefficients numériques est 1 y . $2x^1y$. $4x^2y$. $8x^3y$. &c.

Les nombres font la progression géométrique double ou les puissances de 2, à commencer par l'unité.

On pourra trouver tout d'un coup le terme de cette progression correspondant à un exposant quelconque p , par cette formule $2^{p-1} \times x^{p-1} \times y$.

Si $p = 7$; $2^{p-1} = 2^6 = 32x^6y$

La troisième colonne 1. 4. 12. 32. 80. &c. sont formez ainsi,

<i>triple</i>	$1 \equiv 1 \times 1$
<i>quadruple</i>	$4 \equiv 2 \times 2$
<i>quintuple</i>	$12 \equiv 3 \times 4$
<i>sextuple</i>	$32 \equiv 4 \times 8$
<i>septuple</i>	$80 \equiv 5 \times 16$
<i>octuple</i>	$192 \equiv 6 \times 32$
<i>noncuple</i>	$448 \equiv 7 \times 64$
<i>décuple</i>	$1024 \equiv 8 \times 128$
<i>ondécuple</i>	$2304 \equiv 9 \times 256$
<i>dodécuple</i>	$5120 \equiv 10 \times 512$

Donc l'exposant quelconque de la progression étant $\equiv p$, le coefficient numérique du terme correspondant dans la troisième colonne, est $p - 2 \times 2^{p-3} \times x^{p-3}y$.

Ainsi soit $p = 7$, on aura $p - 2 = 7 - 2 = 5$,
& $2^{p-3} = 2^4 = 5 \times 16 = 80$.

3. exposant de la colonne.

Donc $p - 2 \times 2^{p-3} = 80$, auquel ajoutant $x^{p-3}y$,
j'ai $80x^4y$ pour le septième terme cherché.

La série des coefficients de la quatrième colonne est
1. 6. 24. 80. qui se forment ainsi en commençant au
quintuple.

<i>quintuple</i>	$1 = 1 \times 1 \times 0$	
<i>sextuple</i>	$6 = 2 \times 3 \times 1$	$p - 4$
<i>septuple</i>	$24 = 3 \times 4 \times 2$	$\times p - 3$
<i>octuple</i>	$80 = 4 \times 5 \times 4$	<hr/>
<i>nonuple</i>	$240 = 5 \times 6 \times 8$	$p^2 - 4p$
<i>décuple</i>	$672 = 6 \times 7 \times 16$	$- 3p + 12$
<i>ondécuple</i>	$1792 = 7 \times 8 \times 32$	<hr/>
<i>dodécuple</i>	$4608 = 8 \times 9 \times 64$	$p^2 - 7p + 12$

L'exposant quelconque d'un terme de la progression
étant $= p$, le terme correspondant dans la quatrième
colonne sera $p - 4 \times p - 3 \times 2^{p-6} \times x^{p-3} \times y$.

Soit $p = 7$. $p - 4 = 7 - 4 = 3$.

$p - 3 = 7 - 3 = 4$, or $3 \times 4 = 12$.

$\times 2^{p-6} = 2^{7-6} = 2$. or $12 \times 2 = 24$, c'est le coeffi-
cient numérique cherché.

$x^{p-3} = x^{7-3} = x^4 \times y = x^4y$.

donc le 7^e. terme de la progression est $24x^4y$.

Autrement. Soit l'exposant $= p = 7$, le terme est

$pp - 7p + 12 \times 2^{p-6} \times x^{p-3} \times y$.

$pp = 49$, $- 7p = - 49 = 0$.

$+ 12 \times 2^{p-6} = 24x^4y$. Voyez la multiplication ci-
dessus.

La série des coefficients de la cinquième colonne qui commence au septuple est 1. 8. 40. 160. &c. se forme ainsi.

$$\begin{aligned} \text{septuple} \quad 1 &= 1 \times 1 \\ \text{octuple} \quad 8 &= 2 \times 4, \text{ ou } 1 + 1 \times 2 \times 2. \\ \text{noncuple} \quad 40 &= 5 \times 8, \text{ ou } 4 + 1 \times 4 \times 2. \\ \text{décuple} \quad 160 &= 10 \times 16, \text{ ou } 5 \times 2 \times 16, \text{ ou } 8 + 2 \times 16 \\ \text{ondécuple} \quad 560 &= 5 \times 7 \times 16, \text{ ou } 17 \times 32 + 16, \\ \text{dodécuple} \quad 1792 &= 12 \times 64 + 24, \text{ ou } 7 \times 8 \times 32, \end{aligned}$$

Pour avoir un terme quelconque du coefficient, soit p l'exposant du terme cherché $= 9$, les exposans négatifs de la colonne sont 5, 4 & le double 8.

$$p = 5 \times p = 4 \times 2^{p-5} \times x^{p-5} \times y$$

$$p = 5 \times 9 = 4 \times 2^1 \times x^1 \times y$$

$$\text{ou } 4 \times 5 \times 2 = 40 \times x^1 y, \text{ ou } 40 x^1 y.$$

$$\text{Soit } p = 12, \text{ \& les exposans négatifs } = 5, = 4, = 8, \text{ on aura } 12 = 5 \times 12 = 4 \times 2^{12-7} \times x^{12-7} \times y.$$

$$\text{ou } 7 \times 8 \times 32 \times x^4 y.$$

$$\text{or } 7 \times 8 = 56, \text{ \& } 56 \times 32 = 1792.$$

$$\text{Soit } p = 11. \quad 11 = 6 \times 11 = 4 \times 2^{p-7}.$$

$$\text{ou } 5 \times 7 \times 2^{11-7} \left(\text{ ou } 2^4 = 16 \right) \times x^{p-7} \times y$$

$$35 \times 16 = 560 x^4 y.$$

La série de la sixième colonne est 1. 10. 60. 280. 1120. à commencer au noncuple & se forme ainsi.

$$\text{noncuple} \quad 1 = 1 \times 1 \times 0$$

$$\text{décuple} \quad 10 = 1 \times 1 \times 10$$

$$\text{ondécuple} \quad 60 = 2 \times 3 \times 10$$

$$\text{dodécuple} \quad 280 = 4 \times 7 \times 10$$

$$\text{trédécuple} \quad 1120 = 8 \times 14 \times 10.$$

Il est facile de trouver la formule pour avoir un terme quelconque.

Remarque. Ayant trouvé les coefficients des numéra-

teurs, on aura par simple addition du terme qui est à côté les coefficients des dénominateurs pour la colonne qui a le même exposant.

Troisième colonne
des numérateurs.

Troisième colonne
des dénominateurs.

<i>double</i>	1	. . .			
<i>triple</i>	3		<i>donne</i>	$1 = 1 + 0$	
<i>quadruple</i>	8		$4 = 1 + 3$	
<i>quintuple</i>	20		$12 = 4 + 8$	
<i>sextuple</i>	48		$32 = 12 + 20$	
<i>septuple</i>	112		$80 = 32 + 48$	

Règle pour les signes des formules en progression géométrique.

La table générale contient dans tous les termes pairs les deux signes \pm , parce que ces formules peuvent servir généralement pour le binôme positif $a + b$, & pour le binôme négatif $a - b$, ainsi il faut suivre la règle générale des signes pour les puissances de ces deux binômes; or dans les puissances du binôme positif, tous les termes ont le signe $+$, mais dans les puissances du binôme négatif, les termes pairs sont précédés du signe $-$, & tous les termes impairs sont précédés du signe $+$.

Méthode très-promte pour continuer la série des Formules pour $\sqrt[3]{}$.

Soit donné le cinquième terme $\frac{362}{209} = \frac{a}{b}$. Pour avoir le sixième terme, je substitue dans la formule $\frac{2a+3b}{1a+2b}$ les valeurs trouvées ci-dessus de a & de b dont je forme deux colonnes.

$$\begin{array}{r|l}
 2a = 724 & 1a = 362 \\
 3b = 627 & 2b = 418 \\
 \hline
 2a + 3b = 1351 & \text{Donc } 1a + 2b = 780.
 \end{array}$$

Donc le sixième terme est $\frac{1351}{780} = \frac{a}{b}$.

Pour trouver le septième terme sur la même formule, je substitue la dernière valeur de ces lettres a & b .

$$\begin{array}{r|l}
 2a = 27.02 & 1a = 13.51 \\
 3b = 23.40 & 2b = 15.60 \\
 \hline
 2a + 3b = 50.42 & 1a + 2b = 29.11
 \end{array}$$

ce qui donne le septième terme $\frac{5042}{2911} = \frac{a}{b}$.

Je prends ces valeurs de a & b pour avoir par substitution,

$$\begin{array}{r|l}
 2a = 10084 & 1a = 5042 \\
 3b = 8733 & 2b = 5822 \\
 \hline
 2a + 3b = 18817 & 1a + 2b = 10864
 \end{array}$$

ce qui donne par le huitième terme $\frac{18817}{10864}$.

Usage de la Table générale des Formules des termes en progression géométrique.

La première table des termes en progression géométrique est celle dont nous parlons ici ; elle contient pour chaque progression le numérateur avec le dénominateur, & les deux tables suivantes où ils sont séparés ne servent qu'à éclaircir la construction.

Exemple. Soit la série primitive pour $\sqrt{-}$, sçavoir

1^e. 2^d. 3^e. 4^e. 5^e. 6^e.

$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{19}$, $\frac{99}{70}$.

Pour continuer indéfiniment cette série en sautant d'un terme à un autre en progression géométrique sans passer par les termes moyens. Par exemple, pour trouver un terme en progression géométrique triple.

Si

Si je prends le premier terme $\frac{1}{1}$ dont l'exposant est impair pour premier terme de la progression 1. 3. 6. 9. 12. &c.

Je prendrai dans la table les formules qui ont ces nombres pour exposans, il suffit même de prendre les deux premières.

Simple.	Triple.
$\frac{1x}{1y}$	$\frac{4x^3 + 3x'}{4x^2y + 1y}$

Le premier terme de la série $\frac{1}{1} = \frac{x}{y}$, donne $x = 1$ & $y = 1$. Substituant ces valeurs dans les formules, j'ai
 $\frac{1 \times 1}{1 \times 1} = \frac{4 \times 1 + 3 \times 1}{4 \times 1 \times 1 + 1 \times 1}$,
 1^{er}. Triple.

ce qui donne $\frac{1}{1} = \frac{4+3}{4+1} = \frac{7}{5}$. 3^e. terme.

Si je veux continuer la série sur la même formule ; je suppose $\frac{7}{5} = \frac{x}{y}$, & substituant cette valeur dans la formule triple $\frac{4x^3 + 3x'}{4x^2y + 1y}$, j'ai $\frac{4 \times 7^3 + 3 \times 5}{4 \times 49 \times 5 + 1 \times 5}$
 $= \frac{4 \times 343 + 15}{4 \times 245 + 5} = \frac{1372 + 15}{980 + 5} = \frac{1387}{985}$ 6^e. terme
 & ainsi de suite.

Si je prends pour premier terme de la progression triple celui qui est le second dans la série primitive $\frac{3}{2} = \frac{x}{y}$, dont l'exposant est pair, je trouverai mettant le signe — dans la formule des termes triples à exposant pair, la 6^e. car $3 \times 2 = 6$, la 18^e. car $3 \times 6 = 18$. la 54^e. car $3 \times 18 = 54$, &c. Mais il suffit d'en trouver d'abord une qui est ici la sixième & de réitérer à substituer des nombres en la place des lettres comme dans l'exemple précédent, pour avoir routes ces progressions.

Analyse.

kkk

1^{re}. 3^e. formule, ou triple avec le signe —

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4x^3 - 3x'}{4x^2y - 1y} = \frac{4 \times 27 - 3 \times 3}{4 \times 9 \times 2 - 1 \times 2}$$

$$= \frac{108 - 9}{72 - 2} = \frac{99}{70}. \text{ C'est le sixième terme,}$$

J'observe de mettre toujours le signe — dans la formule de la progression géométrique lorsque l'exposant du terme pris dans la série primitive pour le premier de celle-ci est pair.

6^e. terme.

De même supposant $\frac{99}{70} = \frac{x}{y}$, & substituant cette valeur dans la formule triple $\frac{4x^3 - 3x'}{4x^2y - 1y}$, la substitution

$$\text{donne } \frac{4 \times 99^3}{4 \times 99 \times 70 - 1 \times 70} = \frac{4 \times 804357 - 297}{4 \times 8649 \times 70 - 70}$$

$$= \frac{3217428 - 297}{34596 \times 70 - 70} = \frac{3217131}{2421650} \quad 18^{\text{e}}. \text{ terme.}$$

$$2 \quad 421720 - 70.$$

Ainsi si l'on a plusieurs termes dans la série primitive, & qu'on substitue le cinquième terme ou le sixième dans la formule décuple on aura tout d'un coup le cinquantième terme ou le soixantième, car $5 \times 10 = 50$, & $6 \times 10 = 60$, & continuant sur la même formule, on aura dès la seconde opération un terme incomparablement plus avancé, car $10 \times 50 = 500$, & $10 \times 60 = 600$. C'est ainsi qu'en peu de tems on avance à pas de géants dans la série sans passer par les termes moïens, ce qui épargne beaucoup de tems, & ce qui abrège extrêmement le calcul.

Remarque sur le nombre des termes de chaque série.

Il est toujours avantageux de former quatre séries ensemble pour chaque nombre irrationnel proposé; sçavoir,

deux séries sur chacune des deux formules exemplaires, dont la première est tirée de la racine du quarré parfait moindre que l'irrationnel proposé, & la seconde est tirée de la racine du quarré parfait immédiatement plus grand. On peut continuer chaque série indéfiniment, mais pour l'usage il suffit de trouver un nombre suffisant de termes pour construire le triangle des rapports, c'est-à-dire que le dernier trouvé soit un nombre capable de donner plusieurs quotients, comme nous le verrons dans la Section suivante, lequel donne la série la plus exacte, la plus convergente & la plus parfaite pour exprimer toute racine irrationnelle.

Règle pour les signes & les limites de chaque terme des Séries.

En général pour déterminer les limites d'erreur ou d'approximation, soit par excès soit par défaut.

$$\begin{array}{r} \text{1}^{\text{er}}. \text{ terme} \quad \text{2}^{\text{d}}. \text{ terme.} \quad \text{3}^{\text{e}}. \\ a \quad \quad \quad \frac{2a + 3b}{1a + 2b} \quad \frac{7a + 12b}{4a + 7b} \\ b \end{array}$$

Je dis qu'en comparant le quarré du numérateur du second terme $4aa + 12ab + 9bb$, avec le triplé du quarré du dénominateur $3aa + 12ab + 12bb$, la différence est $+aa - 3bb$, selon le rapport qu'on supposera entre a & b .

Ainsi, si $a = b = 1$, la différence constante sera $+1aa - 3bb = -2$.

Mais si $a = 2$, & $b = 1$, la différence constante sera $+1aa - 3bb = 1$.

De même le troisième terme est $\frac{7a + 12b}{4a + 7b}$, son quarré

est $\frac{49aa + 168ab + 144bb}{16aa + 56ab + 49bb} = 3 \frac{+1aa + 3bb}{16aa + 56ab + 49bb}$. Le triple du quarré du dénominateur $48aa + 168ab + 147bb$ étant ôté du numérateur, la différence est encore

kkk ij

$\frac{1}{3} + 1aa - 3bb$, comme ci-dessus, & ainsi de suite à l'infini.

La différence dans le numérateur $\frac{1}{3} + 1aa - 3bb$, est toujours constante, mais le dénominateur augmente continuellement & indéfiniment; ainsi prenant deux nombres quelconques pour la valeur de a & de b , quelque éloigné que soit leur rapport du rapport donné, la série approchera cependant indéfiniment de la valeur de l'irrational cherché.

Exemples en nombres pour la valeur de $\sqrt{3}$.

1^o. Soit $a = 1$ & $b = 1$, j'ai par la formule ci-dessus $\sqrt{3} = \frac{1}{1} + \frac{5}{3} + \frac{19}{11} + \frac{71}{41} + \frac{265}{153}$ la différence constante dans le numérateur est $1aa - 3bb = 1 - 3 = -2$.

Car le premier terme de la série qui est toute par défaut, est $\frac{1}{1}$, & son carré est $\frac{1}{1} = 3 - \frac{2}{1}$. Or ce carré approche indéfiniment de 3 carré de $\sqrt{3}$. Il est évident que la fraction du second terme $\frac{5}{3}$ dont le carré est $\frac{25}{9} = 3 - \frac{2}{3}$ approche encore elle-même indéfiniment de la valeur de $\sqrt{3}$.

Le troisième terme $\frac{19}{11}$ dont le carré est $\frac{361}{121} = 3 - \frac{2}{121}$.

Le quatrième terme $\frac{71}{41}$, son carré $\frac{5041}{1681} = 3 - \frac{2}{1681}$.

2^o. Soit $a = 30$, & $b = 7$, dans la formule exemplaire pour $\sqrt{3}$, $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a + 3b}{1a + 2b}$, j'aurai $1aa - 3bb = 600 - 147 = 453$, excès constant dans le numérateur, la série est $\frac{30}{7}$, $\frac{81}{44}$, $\frac{224}{169}$, &c.

Dans le premier terme $\frac{30}{7}$, son carré est $\frac{900}{49} = 3 + \frac{71}{49}$ qui surpasse 3 de $\frac{71}{49}$.

Dans le second terme $\frac{81}{44}$, son carré est $\frac{6561}{1936} = 3 + \frac{713}{1936}$, excès constant au numérateur.

Dans le troisième terme $\frac{224}{169}$, son carré est $\frac{50176}{28561} = 3 + \frac{713}{28561}$, excès constant au numérateur.

3°. Si l'on suppose $a = 2$, & $b = 1$, on aura dans la même formule $\frac{a}{b} = \frac{2}{1} = 2$, donc la série par excès fera $\frac{1}{1}, \frac{7}{4}, \frac{16}{9}, \frac{27}{16}$, &c. Et la différence constante est $144 - 3bb = 4 - 3 = 1$, & c'est la plus excellente de toutes les hypothèses, puisque la différence ne peut jamais être moindre que l'unité entre le triple du carré du dénominateur & le carré du numérateur.

Dans le troisième terme $\frac{16}{9}$, son carré $\frac{256}{81} = 3 + \frac{5}{81}$.

Dans le second terme $\frac{7}{4}$ le carré $\frac{49}{16} = 3 + \frac{1}{16}$.

Dans le troisième terme $\frac{27}{16}$, le carré $\frac{729}{256} = 3 + \frac{1}{256}$.

4°. Soit $a = 3$, & $b = 10$, on aura dans la même formule la série par défaut $\frac{3}{10}, \frac{36}{100}, \frac{141}{1000}$, &c.

Dans le premier terme $\frac{3}{10}$, son carré $\frac{9}{100} = 3 - \frac{291}{1000}$, or 291 est la différence constante du numérateur, car $144 - 3bb = 9 - 300 = -291$.

Dans le second terme $\frac{36}{100}$, son carré $\frac{1296}{10000} = 3 - \frac{291}{1250}$, différence constante au numérateur.

Dans le troisième terme $\frac{141}{1000}$, son carré $\frac{19881}{1000000} = 3 - \frac{291}{6724}$, &c. à l'infini.

Méthode pour connoître la plus parfaite & la plus convergente des quatre séries primitives qui expriment une racine irrationnelle.

Le triangle des rapports qui suit donne toujours la série la plus parfaite, comme nous le verrons dans la section suivante ; mais comme il faut l'employer avec les formules rationnelles, lesquelles servent à lui préparer des matériaux pour sa construction ; il s'agit ici de comparer ensemble les quatre séries données par les formules rationnelles, pour juger de celle qui mérite la préférence & qui est la plus parfaite & la plus approchée par excès ou par défaut.

Exemple. Pour l'irrationnel $\sqrt{41}$, les quatre séries primitives sont,

kkk iij.

Première série des racines $\frac{6+}{1}$, $\frac{77-}{12}$, $\frac{954+}{149}$, $\frac{11833-}{1848}$

La série des quarréz est alternativement par défaut & par excès.

$$\frac{36}{1} = 41 - \frac{5}{1}$$

$$\frac{5929}{144} = 41 + \frac{25}{144}$$

$$\frac{910.116}{22101} = 41 - \frac{125}{22101}$$

$$\frac{14.0019.889}{34151.04} = 41 + \frac{625}{34151.04}$$

& ainsi de suite à l'infini.

Seconde série des racines $\frac{7}{1}$, $\frac{90}{13}$, $\frac{1104}{181}$, $\frac{16136}{2520}$, la série des quarréz par réduction à moindres termes sont tous par excès.

$$\frac{49}{1} = 41 + \frac{8}{1}$$

$$\frac{2025}{49} = 41 + \frac{16}{49}$$

$$\frac{60601}{2209} = 41 + \frac{32}{2209}$$

$$\frac{4068289}{99225} = 41 + \frac{64}{99225} \text{ \&c.}$$

Troisième série des racines $\frac{7+}{1}$, $\frac{83-}{13}$, $\frac{1031+}{161}$, $\frac{12787-}{1997}$, la série des quarréz est alternativement par excès & par défaut.

$$\frac{49}{1} = 41 + \frac{8}{1}$$

$$\frac{6889}{169} = 41 - \frac{40}{169} \cdot \frac{1062961}{25921} = 41 + \frac{200}{25921}$$

$$\frac{183.507.369}{3988009} = 41 - \frac{1000}{3988009}, \text{ \&c.}$$

Quatrième série des racines $\frac{6}{1}$, $\frac{83}{13}$, $\frac{1114}{174}$, $\frac{14933}{2332}$, la série des quarréz sont tous par défaut.

$$\frac{36}{1} = 41 - \frac{5}{1}$$

$$\frac{6889}{169} = 41 - \frac{40}{169}$$

$$\frac{1140996}{30276} = 41 - \frac{320}{30276}$$

$$\frac{222.964.624}{54.38.224} = 41 - \frac{2560}{54.38224}, \&c.$$

Parallèle du second & du quatrième terme de ces quatre séries

1 ^{re} . série par excès.	2 ^{de} . série par excès.	3 ^e . série par défaut.	4 ^e . série par défaut.
2 ^d . terme.	2 ^d . terme.		
$41 + \frac{25}{144}$	$41 + \frac{16}{64}$	$41 - \frac{40}{169}$	$41 - \frac{40}{169}$
4 ^e . terme.			
$41 + \frac{625}{3411104}$	$41 + \frac{64}{99225}$	$41 - \frac{1000}{3988009}$	$41 - \frac{160}{339889}$

Il est facile de juger quelle est celle de ces quatre séries qui approche davantage par excès ou par défaut, c'est la seconde, puisque $41 + \frac{16}{64}$ est le terme le plus approché de 41 par excès.

Mais pour m'en assurer davantage je divise chaque numérateur par le dénominateur dans chacune des fractions, & chaque division donnera un quotient complexe, qui servira dans la suite à former le triangle des rapports comme nous le verrons dans la section suivante, qui donnera la série la plus convergente & la plus parfaite.

Pour $41 + \frac{25}{144}$

Diviseur. { Dividende. { Quotient.
144 { 25 : 000 { 0 : 173 : 6. + &c.

0
1 . . 144
106 : 0
7 . . 100 8
5 2 : 0
3 . . . 4 3 2
8 8 : 0
6 8 6 4
6 : 0

Pour 41 $\div \frac{16}{49}$

Diviseur.	{	Dividende.	{	Quotient.
49.	{	16 : 00	{	0 : 3265 \div

0

3 . . . 14 7

1 3 : 0

2 9 8

3 2 : 0

6 2 9 4

2 6 : 0

5 2 4 5

1 5 : 0

Pour 41 $\div \frac{40}{169}$

Diviseur	{	Dividende.	{	Quotient.
169	{	40 : 000	{	0. 2366 \div

0

2 . . . 338

62 : 0

3 . . . 50 7

11 3 : 0

6 . . . 10 1 4

1 1 6 : 0

6 1 0 1 4

1 4 6 : 0

Ainsi comparant ensemble ces quotiens, je peux juger quelle est la série la plus parfaite, & je la trouverai par le triangle des rapports formé sur ces quotiens.

De même je peux comparer les seconds termes des séries des racines, & trouver par la division les quotiens.

Pour $\frac{77}{12}$, 1^{re} série second terme.

Diviseur.	{	Dividende.	{	Quotient.
12	{	77 : 00	{	64166 \div

LIVRE SECOND.

595

6 . . . 72 ou 64167 —
 5 : 0
 4 4 8
 2 : 0
 1 1 2
 8 : 0
 6 + 7 2
 8 : 0

pour $\frac{20}{14} = \frac{41}{7}$, second terme de la seconde série.

Diviseur. { Dividende. { Quotient.
 7 { 45 : 00 { 64285 +

 6 42 ou 64286 —
 3 : 0
 4 2 8
 2 : 0
 2 1 4
 6 : 0
 8 5 6
 4 : 0
 5 + 3 5
 5 : 0

pour $\frac{83}{13}$, second terme de la 3^e. & 4^e. série.

Diviseur. { Dividende. { Quotient.
 13 { 83 : 00 { 63853 +

 6 . . . 78 ou 63854 —
 5 : 0
 3 3 9
 1 1 : 0
 8 . . . 1 0 4
 6 : 0
 5 6 5
 5 : 0
 4 — 5 2

Donc le rapport de $\sqrt{41}$ qui résulte des quotiens trou-
Analyse. 111

vez par la division du second terme des quatre séries est, sçavoir,

$$\begin{array}{l} \text{de la 1}^{\text{re}}. \text{ série entre } \left\{ \begin{array}{l} 64166 \text{ } + \\ 64167 \text{ } - \end{array} \right. \\ \text{de la 2}^{\text{de}}. \text{ série entre } \left\{ \begin{array}{l} 64285 \text{ } + \\ 64286 \text{ } - \end{array} \right. \\ \text{de la 3}^{\text{e}}. \text{ \& 4}^{\text{e}}. \text{ série } \left\{ \begin{array}{l} 63853 \text{ } + \\ 63854 \text{ } - \end{array} \right. \end{array}$$

Or par le triangle des rapports expliquez ci-après dans la Section suivante, on trouve pour le rapport de $\sqrt{41}$

$$\approx 64031 \text{ } +$$

$$\text{ou } 65032 \text{ } -.$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Or de } 64031 & + & \text{de } 64032 \text{ } - \\ \text{ôtez } 64166 & + & \text{ôtez } 64167 \text{ } - \end{array}$$

$$\text{différence} - 135 \qquad \text{diff.} - 135 \text{ trop grande de } 135.$$

$$\begin{array}{rcl} \text{de } 64031 & + & \text{de } 64032 \text{ } - \\ \text{ôtez } 64285 & + & \text{ôtez } 64286 \text{ } - \end{array}$$

$$\text{différence} - 254 \qquad \text{diff.} - 254 \text{ trop grande de } 254$$

$$\begin{array}{rcl} \text{de } 64031 & + & \text{de } 64032 \text{ } - \\ \text{ôtez } 63853 & + & \text{ôtez } 63854 \text{ } - \end{array}$$

$$\text{différence} + 177 \qquad + 177 \text{ trop petit de } 177.$$

Conclusion. La première série approche davantage, puisque son excès 135 est la moindre des différences trouvées; d'ailleurs elle est alternativement par excès & par défaut, ce qui est essentiel; je la choisis préféralement à toute autre pour en former le triangle des rapports comme il suit, qui donnera la série la plus convergente & la plus parfaite.

Je prends le quatrième terme de cette première série

$$\frac{11833}{1848} \text{ } - \text{ \& le 5}^{\text{e}}. \text{ terme } \frac{146766}{221921} \text{ je fais la division séparé-}$$

ment dans chacune de ces fractions du numérateur par leur dénominateur comme si je voulois les réduire à moin-

dres termes, & trouver leur commune mesure en divisant d'abord le numérateur par le dénominateur, écrivant ce quotient à côté, & le premier reste au-dessous.

Puis je divise le numérateur par ce premier reste; j'écris le quotient à côté, & le second reste au-dessous.

Ensuite je divise le premier reste par le second reste, j'écris le quotient à côté, & le troisième reste au-dessous.

Je continue cette opération jusqu'à ce que je trouve un quotient qui soit double du premier quotient, car pour lors l'opération est finie, & j'ai par ce moyen la période réglée des quotients générateurs pour former le triangle des rapports.

Opération sur le 4^e. terme.

Opération sur le 5^e. terme.

<i>Divid.</i> 11833	{	<i>Quotiens.</i>
	6	
<i>Diviseur</i> 1848		
1 ^{er} . <i>prod.</i> 11088	{	2
1 ^{er} . <i>reste</i> 745		
2 ^d . <i>prod.</i> 1490	{	2
2 ^d . <i>reste</i> 358		
3 ^e . <i>produit</i> 716	{	12 +
3 ^e . <i>reste</i> 29		
4 ^e . <i>produit</i> 348	{	2
4 ^e . <i>reste</i> 10		
5 ^e . <i>produit</i> 20		
6 ^e . <i>reste</i>		9 : 9

<i>Divid.</i> 146766	{	<i>Quotiens.</i>
	6	
<i>Divis.</i> 22921		
1 ^{er} . <i>prod.</i> 137526	{	2
1 ^{er} . <i>reste</i> 9240		
2 ^d . <i>prod.</i> 18480	{	2
2 ^d . <i>reste</i> 4441		
3 ^e . <i>prod.</i> 8882	{	12 +
3 ^e . <i>reste</i> 358		
4 ^e . <i>prod.</i> 4296	{	2
4 ^e . <i>reste</i> — 145.		

Puisque j'ai le quatrième quotient 12 qui est précisément double du premier quotient 6 l'opération est finie, & j'ai la période réglée des quotiens générateurs qui reviennent toujours excepté le premier car c'est une maxime

constante, que lorsque l'on trouve dans la division un quotient qui est précisément le double du premier, si on ajoute des zéros au reste, & qu'on continue la division, on trouvera toujours la même période des mêmes quotiens qui reviennent continuellement, cette période est donc composée de quatre termes 6. 2. 2. 12. dont le premier est hors d'œuvre & ne revient jamais, & les trois autres reviennent continuellement, & cette période s'exprime ainsi.

6 || 2. 2. 12 || 2. 2. 12 || 2. 2. 12 || &c.

c'est cette période réglée des quotiens qui servira à former le triangle des rapports inverse comme il suit, qui donnera la série la plus parfaite.

Formation du triangle du rapport inverse pour $\sqrt{41}$.

Chaque colonne contient plusieurs cellules ou carreaux qui ont chacun quatre termes ou nombres.

Le premier est toujours l'unité, & le second est l'un des nombres générateurs ou des quotiens de la période, car chaque colonne a son nombre générateur particulier.

La première colonne a le premier quotient 6, qui est hors d'œuvre & qui ne revient plus le premier dans aucune autre colonne.

Chacun des trois autres quotiens donne les trois nombres générateurs des trois autres colonnes, & se met en tête après l'unité constante qui commence chaque colonne.

Les trois mêmes nombres générateurs sont encore dans le même ordre, les seconds nombres particuliers des 4^e. 5^e. & 6^e. colonne.

LIVRE SECOND.

Triangle du rapport de $\sqrt{41}$. formé sur la période des nombres
générateurs 6 || 2. 2. 12 || 2. 2. 12 || &c.

								9 ^e . col.
								1
								2
								× 2
							
								4
								+ 1
								5
								× 12
							
								60
								+ 2
								62
								× 2
							
								124
								+ 5
								129
								× 2
							
								258
								+ 62
								320
								× 12
							
								3840
								+ 129
								3969
								× 2
							
								7938
								+ 320
								8258
								× 2
							
								16516
								+ 3969
								20485
								× 6
							
								122910
								+ 8258
								131168
								nu

La formation de chaque colonne se fait alternativement par multiplication & par addition dans chaque terme, comme il est expliqué fort en détail dans la Section suivante, avec cette différence qu'on y trouve le triangle du rapport direct, & celui-ci est inverse; chaque colonne donne deux nombres, un est le dénominateur, l'autre en bas est le numérateur de la fraction ou du rapport cherché.

Voici leur série.

1^{er}. Terme.

$\left\| \frac{6}{1} \right\|$ Ce premier terme est hors d'œuvre & ne revient jamais dans la Période des quotients.

2^e 3^e 4^e. terme.

$\left\| \frac{13}{2}, \frac{32}{5}, \frac{397}{62} \right\|$

5^e. 6^e. 7^e.

$\left\| \frac{826}{129}, \frac{2049}{320}, \frac{25414}{3969} \right\|$

8^e. 9^e. 10^e. terme.

$\left\| \frac{52877}{8258}, \frac{131168}{20435}, \frac{1626.893}{254.078} \right\|$

11^e. 12^e. 13^e. terme.

$\left\| \frac{3384954}{528641}, \frac{8396.801}{1311360}, \frac{104146566}{26264961} \right\|$

On peut ensuite continuer cette série à l'infini par les formules suivantes dans lesquelles le premier terme est hors d'œuvre, c'est-à-dire, qu'il n'entre point dans la période réglée des quotients qui revient toujours dans la série continuée à l'infini.

LIVRE SECOND.

511

Formule pour la Série des dénominateurs.

$$\left| \begin{array}{c} a \\ \dots 1 \dots \\ a \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} b \\ \dots 2 \dots \\ 2a + 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} c \\ \dots 5 \dots \\ 2b + a \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} d \\ \dots 62 \\ 12c + b \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} e \\ \dots 129 \dots \\ 2d + c \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} f \\ \dots 320 \dots \\ 2e + d \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} g \\ \dots 3969 \\ 12f + e \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} h \\ \dots 8258 \dots \\ 2g + f \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} i \\ \dots 20485 \dots \\ 2h + g \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} k \\ 254078 \\ 12i + h \end{array} \right| \quad .$$

$$\left| \begin{array}{c} l \\ 528641 \\ 2k + i \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} m \\ 1311360 \\ 2l + k \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} n \\ 15752.961 \\ 12m + l \end{array} \right|$$

Formule pour la Série des numérateurs.

$$\left| \begin{array}{c} A \\ \dots 6 \dots \\ A \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} B \\ \dots 13 \dots \\ 2A + 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} C \\ \dots 32 \dots \\ 2B + A \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} D \\ \dots 397 \\ 12C + B \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} E \\ \dots 826 \dots \\ 2D + C \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} F \\ \dots 2049 \dots \\ 2E + D \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} G \\ \dots 25414 \\ 12F + E \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} H \\ \dots 52877 \dots \\ 2G + F \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} I \\ 131168 \\ 2H + G \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} K \\ 1626893 \\ 12I + H \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} L \\ 3.384.954 \\ 2K + I \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} M \\ 8.396.801 \\ 2L + K \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} N \\ 20.178.556 \\ 12M + L \end{array} \right|$$

Examen de la différence des quarréz.

Présentement si j'examine la série des défauts & des excès dans les quarréz des termes de la véritable & parfaite série formée par le triangle des rapports & résultante des autres séries les plus approchantes, je trouve que ces différences tant par excès que par défaut font des périodes réglées, — 5, + 5, — 1 || + 5 — 5 + 1, — 5, + 5, — 1 || + 5, — 5, + 1 ||, &c. où chaque terme d'une période a le signe contraire à son terme correspondant dans la période suivante, & comme ce sont les trois mêmes nombres dans chacune des périodes, ils se trouvent détruits par les trois nombres de la période suivante qui sont égaux avec des signes contraires.

Racines. Quarrez du numérateur.

$$\frac{6}{1} \dots 36 = \overline{41 \times 1 - 5} = 41 - 5 = 36. \text{ défaut } - 5.$$

$$\frac{13}{2} \dots 169 = \overline{41 \times 4 + 5} = 164 + 5, \text{ excès } + 5.$$

$$\frac{32}{5} \dots 1024 = \overline{41 \times 25 - 1} = 1025 - 1. \text{ défaut } - 1.$$

$$\frac{397}{61} \dots 157609 = \overline{41 \times 3844 + 5} \text{ excès } + 5.$$

$$\frac{826}{119} \dots 682276 = \overline{41 \times 16641 - 5} \text{ défaut } - 5.$$

$$\frac{2049}{310} \dots 4198401 = \overline{41 \times 102400 + 1} \text{ excès } + 1.$$

$$\frac{25414}{3969} \dots 645871396 = \overline{41 \times 15752961 - 5} \text{ défaut } - 5.$$

Et ainsi de suite de tous les autres à l'infini,

SECTION

SECTION CINQUIÈME.

La Science universelle des Rapports.

Discours Préliminaire sur la nature des Rapports, leur étendue, & la nécessité de connoître tous les Rapports.

Toutes les vérités géométriques en général, ne sont que les rapports des grandeurs comparées ensemble.

L'Analyse qui est la source & le fondement des Mathématiques, consiste uniquement à découvrir des grandeurs inconnues par le moyen des rapports connus. C'est là où se réduit la résolution de tous les Problèmes des Mathématiques pures, & des sciences Physico-Mathématiques ; il est donc important de connoître parfaitement les rapports des grandeurs, puisque c'est de leur connoissance qu'on doit espérer la perfection de l'Analyse & de toutes les Mathématiques.

Cependant, je ne sçais par quelle fatalité, les Géomètres ont négligé une science si nécessaire, elle se trouve très-bornée, on ne connoît parfaitement que le rapport d'égalité qui n'est pas la moitié du premier genre, mais seulement une partie infiniment petite de tous les rapports, car nous verrons dans la suite qu'il y a une infinité de genres entre les rapports, une infinité d'espèces simples, une infinité d'espèces composées, primitives, & subalternes ou dérivées, toutes infinies, & dont chaque rapport en particulier est le premier terme & l'origine d'une série infinie d'individus, telle est l'étendue des rapports d'inégalité, ils s'étendent de toutes parts à l'infini,

Analyse. m m m

& ils sont entièrement inconnus, on sçait seulement en gros & confusément qu'il y a une infinité de rapports d'inégalité plus grande ou plus petite à l'infini.

N'y a-t-il pas lieu de s'étonner que les Géomètres en soient demeurez là, & n'aient pas poussé plus loin leurs recherches sur une matière si vaste & si importante? quelle utilité ne devoit-on pas espérer? à en juger par le seul rapport d'égalité qui est celui qui nous soit connu, puisque c'est la source de la science des proportions & généralement de toutes les vérités géométriques qui nous sont connues; quel secours ne devoit-on pas attendre de la connoissance entière & exacte des rapports de tous les genres & de toutes les espèces à l'infini? pour la perfection de l'Analyse, pour les lignes courbes & pour les sciences Physico-Mathématiques.

Cette considération m'a porté à examiner de plus près la nature des rapports, j'ai trouvé cette matière encore neuve, je me suis fait une route simple naturelle & facile par laquelle je conduirai mon lecteur, pour lui donner le plaisir de découvrir avec moi tout ce qui regarde une matière si vaste & si utile.

Définition. Le rapport des deux grandeurs a & b consiste ou dans leur égalité ou dans leur inégalité; ou dans leur égalité qui fait que la première a contient la seconde b , autant de fois qu'elle y est contenue, & réciproquement, ou dans l'inégalité qui fait que la première a est la plus grande & contient la moindre b un certain nombre de fois avec un reste ou sans reste.

Ainsi le rapport de deux grandeurs consiste ou dans leur égalité ou dans leur inégalité, c'est le fondement de toutes les comparaisons qu'on en peut faire, la fraction $\frac{a}{b}$ & $\frac{b}{a}$ est la plus simple expression du rapport de ces deux grandeurs; or une fraction indique une division dont le Dividende est le premier terme ou le dénomi-

nateur ; c'est donc le quotient qui résulte de cette division qui caractérise le rapport , ainsi substituant des nombres à la place des lettres dans $\frac{a}{b}$ & dans $\frac{b}{a}$, le quotient exprimera en nombres ce rapport.

Soit $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \dots$ dans chaque fraction de cette série , en nombres j'ai 1 pour quotient , qui est la marque & le caractère du rapport le plus simple qui est celui d'égalité , car l'antécédent contient une fois son conséquent , & réciproquement le conséquent contient une fois son antécédent , c'est le plus simple des tous les rapports , le rapport d'égalité qui est seul de son genre & de ses espèces , & qui n'a sous lui que des individus.

Mais dans cette seconde série de rapports ou fractions, $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots$ tous ces rapports sont semblables , puisque chaque antécédent contient deux fois son conséquent , & chaque quotient qui résulte de la division est 2 , ce qui montre que tous ces rapports sont égaux & sont très-simples , puisqu'ils n'ont qu'un seul quotient qui est le moindre qui soit possible dans les rapports d'inégalité.

Cette seconde série ne contient qu'un seul & unique rapport , qui est le plus simple rapport d'inégalité $\frac{2}{1}$, qui est l'origine de cette série , le reste de la série sont des individus du même rapport qui est le plus simple rapport d'inégalité , qui fait le premier degré ou genre du rapport d'inégalité ; les rapports plus composez sont les degrez supérieurs.

La troisième série des rapports suivans, $\frac{3}{1}, \frac{4}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \dots$ contient les individus du premier $\frac{3}{1}$ qui est l'origine de la série , chaque antécédent contient une fois son conséquent avec un reste , & le conséquent contient deux fois ce reste , ce qui donne deux quotients. 1 & 2.

		<i>Quotiens.</i>	
<i>Dividende</i>	3		1
<i>Diviseur</i>	2		2
<i>Reste</i>	1		

Voilà déjà deux quotients qui marquent le second degré ou second genre des rapports d'inégalité, mais le plus simple de son genre, puisque les quotients 1. & 2. sont les plus simples, car le quotient 1 est si simple qu'il se trouve même dans le rapport d'égalité qui est le plus simple de tous, & le quotient 2 est le plus simple qui puisse se trouver dans le rapport d'inégalité.

Mais comme ces deux quotients peuvent varier par la suite des nombres naturels, ils donneront des rapports différens en ce cas : mais d'ailleurs on peut conserver ces deux quotients constans & invariables, & substituer en la place de $\frac{1}{2}$ tous les multiples $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, &c. qui sont des individus : de même aussi dans chaque variation de l'un des quotients, on aura une série infinie de rapports : dans la variation de l'autre quotient on aura encore une autre série infinie différente : en faisant varier le reste ou la commune mesure on aura aussi une autre série infinie ; de même si on fait varier deux quotients, on aura encore une série infinie de rapports ; si l'on fait varier l'un des quotients d'abord avec la commune mesure & ensuite l'autre quotient, puis tous les trois ensemble ; dans tous ces cas on aura autant de séries infinies de rapports tous différens, & chaque terme de l'une de ces séries pourra être pris pour l'origine & le premier terme d'une série infinie de rapports semblables, que je nomme des individus.

Pour traiter cette matière si étendue avec ordre, & d'une manière claire qui porte la lumière dans ce vaste pays de l'infini, j'établis entre les rapports différens degrés ou genres à l'infini, je divise chaque genre en ses

espèces primitives, soit simples, soit composées, chaque espèce primitive a ses espèces subalternes ou dérivées, & chaque rapport en particulier est l'origine & le premier terme d'une série infinie d'individus; je distingue cela sans peine & sans fatiguer la mémoire du lecteur, c'est par le nombre & la qualité des quotients & de la commune mesure que l'on trouvera par la division que nous allons expliquer dans le Problème qui suit.

LEMME ET PROBLÈME

1^{er}. & fondamental.

Trouver la commune mesure de deux nombres, ou Méthode nouvelle pour faire la division propre pour connoître les rapports des grandeurs exprimées en nombres.

Nous expliquerons dans la suite la Méthode d'exprimer les rapports géométriques par les nombres, qui est la seule expression claire & sensible.

Soit un rapport exprimé par la fraction $\frac{39}{24} = \frac{A}{B}$.

Opération.

1 ^{er} . Dividende. A = 39	1 = C. premier Quotient.
1 ^{er} . Diviseur B = 24. & second Dividende.	1 = D. second Quotient.
1 ^{er} . Reste. M = 15 2 ^d . Diviseur & 3 ^e . Divid.	1 = E. troisième Quotient.
2 ^d . Reste. N = 9 3 ^e . Diviseur, & 4 ^e . Divid.	1 = F. quatrième Quotient.
3 ^e . Reste. O = 6 4 ^e . Diviseur, & 5 ^e . Divid.	2 = G. 5 ^e . & dernier Quot.
4 ^e . Reste. P = 3 & commune mesure.	

Explication. J'écris le plus grand nombre $A = 39$ pour premier dividende, & au-dessous le plus petit du rapport proposé $B = 24$ pour le premier diviseur; j'ôte le diviseur du dividende 39 autant fois qu'il est possible, ici il y est une fois, j'ôte donc une fois 24 de 39, le premier reste est $M = 15$ que j'écris au-dessous pour second diviseur, j'écris aussi à côté le premier quotient $1 = C$. Voilà la première opération finie.

J'ai $B = 24$ pour second dividende, & $M = 15$ pour second diviseur; j'ôte $M = 15$ de $B = 24$, autant de fois qu'il est possible, c'est-à-dire une fois qui donne $1 = D$ pour second quotient; or $24 - 15 = 9$, j'écris le second reste $N = 9$ au-dessous pour troisième diviseur: voilà la seconde opération finie.

J'ai pour la troisième opération $M = 15$ pour troisième Dividende, & $N = 9$ pour troisième diviseur, dont le quotient est $1 = E$, & le reste $O = 6$.

Pour la quatrième opération, j'ai $N = 9$, quatrième dividende, & $O = 6$, quatrième diviseur, qui donne pour quotient $1 = F$, & pour quatrième reste $P = 3$.

Pour la cinquième opération j'ai $O = 6$, cinquième dividende, & $P = 3$, cinquième diviseur, qui donne pour cinquième quotient $2 = G$, qui étant exact ne donne aucun reste, partant c'est le dernier quotient, & $P = 3$ est la commune mesure des deux nombres donnez du rapport proposé $\frac{39}{24}$.

Remarque. 1. Lorsqu'un diviseur donne un quotient exact & sans reste, ce diviseur est la commune mesure des deux nombres proposez, parce qu'il se mesure lui-même par l'unité.

2. Si dans l'opération un diviseur est 10 fois, 30 fois, 35 fois, ou 100 fois, 150 fois, 153 fois dans le dividende, ou même davantage, le quotient est exprimé par deux ou trois chiffres ou même par un plus grand nombre, & n'est pas moins un seul quotient; alors pour ôter plus

commodément du dividende le produit du diviseur par ce quotient, j'écris à part ou sous le diviseur ce produit pour ne le pas confondre avec le reste donné par cette opération.

Corollaire premier, général & fondamental.

Il suit de la division précédente, dans le rapport donné $\frac{12}{14}$, 1°. que 3 est la commune mesure de ces deux nombres, laquelle marque par ses trois unitez que ce rapport est le troisième individu de son genre & de ses espèces.

2°. Il y a cinq quotients, dont 5 est l'exposant qui marque tout ensemble le degré & le genre de ce rapport qui sont toujours les mêmes. Il marque aussi le nombre des divisions qu'il faut faire pour connoître ce rapport, dont chacune donne un quotient.

3°. Le cinquième & dernier quotient 2 marque que c'est un rapport d'inégalité; mais le plus simple de son genre, car dans le rapport d'égalité le dernier quotient est toujours 1, & dans le rapport d'inégalité, le dernier quotient ne peut être moindre que 2, mais il peut croître à l'infini.

4°. Les quatre quotients qui précèdent le dernier sont des unitez, ce qui marque que ce rapport est le premier & le plus simple de ses espèces: mais sa commune mesure 3 marque qu'il est le troisième individu de son genre, le premier individu est encore plus simple que le proposé, ce qui s'éclaircira dans la suite.

Corollaire second, général & fondamental.

Ce Problème montre que la commune mesure des deux nombres proposez avec les quotients trouvez par la division, sont les seuls Elémens qui entrent dans la formation des rapports.

Ce qui m'engage à développer les propriétés de ces Ele-

mens d'où dépend toute la théorie des rapports, comme il suit.

THEOREME.

*Quels sont les Elémens des Rapports ? Leurs propriétés ?
Ou Théorie générale des Rapports.*

Les Elémens d'un rapport exprimé par deux nombres quelconques, sont la commune mesure de ces deux nombres, & les quotients que l'on trouve en divisant le plus grand nombre par le plus petit, par une division réitérée jusqu'à ce qu'on ne trouve plus aucun reste. Comme ces Elémens sont les seuls qui entrent dans la formation des rapports, leur variation qui est la seule propriété que je considère ici, est aussi l'unique source de toutes les diversitez qui peuvent se rencontrer entre les rapports.

1°. La variation dans le nombre des quotiens est la source de la plus grande diversité qui se trouve entre les rapports, elle me fournit la première idée pour distinguer les rapports comme les puissances par différens degrez à l'infini que je nomme aussi les genres des rapports, parce qu'ils ont différentes espèces du même degré, & par conséquent du même genre. Voilà la première & la plus importante distinction entre les rapports, tirée de la nature & de l'essence des nombres.

2°. La variation de chacun des quotients cause une moindre diversité entre les rapports, elle se trouve entre les rapports d'un même degré ou genre, c'est-à-dire entre ceux dont on trouve la commune mesure par un nombre égal de divisions qui donnent autant de quotients, comme cette variation est moindre que la précédente, je m'en sers pour distinguer les espèces différentes entre les rapports différens d'un même genre.

Je nomme *espèces primitives simples*, celles qui sont formées pour la variation d'un seul quotient, & dont la série infinie contient des rapports qui croissent en même

Je nomme *espèces primitives composées* celles qui sont formées par la variation ou de deux quotiens, ou de trois quotiens, ou d'un plus grand nombre qui varient ensemble, combinez ensemble ou avec la commune mesure, de toutes les manières possibles, & dont la série infinie contient des rapports qui croissent en même tems au dénominateur & au numérateur.

Mais je nomme *espèces subalternes* ou *dérivées* les séries infinies des rapports qui croissent seulement au numérateur, tandis que le dénominateur est constant & invariable, qui est toujours le même que celui du rapport qui est le premier & l'origine d'où la série est dérivée.

3°. Enfin la variation de la commune mesure des deux nombres qui expriment un rapport , est celle qui produit entre les rapports la moindre diversité qui soit possible , je m'en sers pour établir la distinction des individus entre les rapports.

Voilà le fondement des distinctions que j'établis entre les rapports, genres, espèces, individus, qui suffisent pour développer tout ce qui appartient à la science des rapports; ces distinctions sont simples & tirées de la nature des nombres; pour les mettre dans leur jour, il faut entrer dans le détail & former les séries de ces genres, de ces espèces, de ces individus comme il suit.

Série. $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \&c.$
à l'infini.

Le premier genre est double , il contient le premier & le plus simple rapport d'égalité qui est $\frac{1}{1}$, avec le premier & plus simple rapport d'inégalité $\frac{1}{2}$, qui sont tous deux

nnn

du premier degré & du premier genre , puisqu'ils ne peuvent avoir qu'un seul quotient , car $\frac{1}{1} = 1$, & $\frac{2}{1}$ donne 2 pour quotient.

Le premier terme de la série est $\frac{1}{1}$, l'antécédent & le conséquent sont égaux.

Pour le second terme $\frac{2}{1}$ son antécédent 2 est égal à la somme de l'antécédent & du conséquent du premier terme qui le précède $1 + 1 = 2$, son conséquent 1 est égal à l'antécédent précédent.

Pour le troisième terme $\frac{3}{1}$, son antécédent 3 est la somme de l'antécédent & du conséquent du terme qui le précède immédiatement $2 + 1 = 3$.

Son conséquent 2 , est l'antécédent du terme précédent.

La même analogie regne dans toute la série que l'on peut continuer indéfiniment , chaque rapport a pour numérateur la somme du numérateur & du dénominateur précédent , mais le dénominateur est toujours le numérateur précédent.

Démonstration de la série des genres des Rapports.

Pour démontrer *à priori* que cette série comprend les rapports les plus simples de tous les genres à l'infini , il suffit de démontrer qu'un rapport quelconque , par exemple , celui du cinquième genre $\frac{13}{7}$, est le rapport le plus simple du cinquième genre , or cela est évident par sa formation , puisqu'il contient tous les rapports les plus simples que le précédent & qu'il les surpasse , car il contient & surpasse le plus simple rapport du quatrième genre $\frac{8}{5}$, & en rétrogradant de même jusqu'à l'origine , on trouvera qu'il contient & surpasse le rapport du troisième genre $\frac{5}{3}$, celui du second genre $\frac{3}{2}$, celui du premier genre d'inégalité $\frac{2}{1}$, & enfin qu'il contient & surpasse $\frac{1}{1}$ qui est le rapport d'égalité , le premier & le plus simple de tous les rapports.

Comme la même chose se trouve dans chacun des rap-

ports de cette série, il suit de-là que la série continuée à l'infini comprend par ordre les rapports les plus simples de tous les genres à l'infini.

On démontrera encore la même chose *à posteriori* par la division, car on trouvera que chacun des rapports pris à discrétion dans la série, comme ici le rapport du cinquième genre $\frac{13}{4}$ contient tous les rapports les plus simples des genres précédens dans la série, & il est évident que chacun de ces rapports est le premier & le plus simple de son genre, puisque chaque quotient est l'unité, excepté le dernier quotient 2 qui ne peut être moindre dans le rapport d'inégalité, ce qui est de l'essence du rapport d'inégalité.

1 ^{er} . Dividende.	13	1. premier Quotient.
1 ^{er} . Diviseur		
& 2 ^d . Dividende.	8	1. 2 ^d . Quotient.
1 ^{er} . Reste. 2 ^d . Diviseur		
& 3 ^e Dividende.	5	1. 3 ^e . Quotient.
2 ^d . Reste. 3 ^e . Diviseur		
& 4 ^e . Dividende.	3	1. 4 ^e . Quotient.
3 ^e . Reste. 4 ^e . Diviseur		
& 5 ^e . Dividende.	2	2. 5 ^e . Quotient.
dernier Diviseur	1	
& commune mesure.		

Formation des séries infinies des espèces simples & primitives des rapports.

Entre les rapports d'un même genre ou degré, par exemple, dans le second genre ou degré qui a cinq quotients, on peut former une série infinie des espèces simples & primitives par la variation d'un seul quotient, en prenant pour origine & premier terme de la série infi-

nnn ij

nie le premier & plus simple rapport de ce cinquième genre ou degré.

Ainsi je prends le rapport le plus simple & le premier du cinquième genre $\frac{13}{8}$, j'en cherche les quotients par la division expliquée dans le premier Problème, & à côté de cette opération, j'en fais une route contraire en multipliant la commune mesure, & remontant de bas en haut par la suite des quotients, après en avoir changé un seul (pouvû que ce ne soit pas le premier pour les raisons que nous verrons) dans cet exemple j'ai changé le dernier 2, & j'ai mis en sa place 3 pour premier multiplicateur.

Division.		Multiplication.	
1 ^{re} . Dividende. 13	1 ^{er} . Quot. 1.	18	5 ^e . ou dernier Multiplicat.
1 ^{er} . Diviseur. &	2 ^d . Quot. 1.	5 ^e . nombre à multip. 11	4 ^e . Multiplic. 1.
2 ^d . Dividende. 8	3 ^e . Quot. 1.	4 ^e . nombre à multip. 7	3 ^e . Multiplic. 1.
1 ^{er} . Rest. 2 ^d . Divis. & 3 ^e . Divid. 5	4 ^e . Quot. 1.	3 ^e . nombre à multip. 4	2 ^d . Multiplic. 1.
2 ^d . Rest. 3 ^e . Divis. & 4 ^e . Divid. 3	5 ^e . Quot. 2.	2 ^d . nombre à multip. 3	1 ^{er} . Multiplic. 3.
3 ^e . Reste 4 ^e . Divis. & 5 ^e . Divid. 2		1 ^{er} . nombre à multipl. 1	
4 ^e . Reste d ^{er} . Divis. & comm. mesure. 1		ou com. mesf.	

Je suppose la commune mesure toujours constante $= 1$, je la multiplie par le dernier quotient 3 mis à la place de 2 pour servir de premier multiplicateur, le produit est 3, que j'écris à gauche pour le second nombre à multiplier.

Le 2^d. multiplicateur au dessus est 1, or $1 \times 3 + 1 = 4$

que j'écris au dessus pour troisième nombre à multiplier.

Le 3^e. multiplicateur est 1, & le troisième nombre à multiplier 4, or $1 \times 4 = 4$, auquel j'ajoute le nombre trouvé au dessous 3, $4 + 3 = 7$, j'écris 7 pour 4^e. nombre à multiplier.

Le 4^e. multiplicateur est 1, & le 4^e. nombre à multiplier 7, $1 \times 7 = 7$, j'ajoute 4, nombre trouvé au dessous 7 $+ 4 = 11$, que j'écris pour cinquième nombre à multiplier.

Enfin le 5^e. multiplicateur est 1, & le 5^e. nombre à multiplier 11, or $1 \times 11 = 11$, j'ajoute 7, nombre trouvé au dessous 11 $+ 7 = 18$, nombre désiré, qui finit l'opération.

Si le cinquième quotient 2 croît ainsi continuellement de l'unité & que l'on substituë sa valeur en sa place pour avoir les premiers multiplicateurs pour réitérer la seconde opération qui précède, on trouvera les termes de la série infinie de la cinquième espèce simple & primitive du cinquième genre des rapports, (je dis la cinquième espèce, parce qu'elle vient de la variation du cinquième quotient) comme il suit.

Série $\frac{13}{8}, \frac{18}{11}, \frac{23}{14}, \frac{28}{17}, \frac{33}{20}, \frac{38}{23}, \frac{43}{26}$, &c. à l'infini.

Dans laquelle les dénominateurs croissent de 3, c'est la valeur du premier multiplicateur constante.

Les numérateurs croissent de 5, & c'est l'exposant du genre de cette série, & du rang qu'occupe parmi les quotients, le cinquième quotient dont la seule variation produit cette série.

Ce qui fournit un moyen facile de la continuer indéfiniment par addition continue de 3 au dénominateur précédent pour avoir le suivant, & par addition de 5 au numérateur pour avoir le suivant.

COROLLAIRE I.

On formera de même une série infinie d'espèces sim-
nnn iij

ples & primitives par la variation seule du quatrième quotient qui est ici le pénultième, dont le plus simple rapport du cinquième genre est encore l'origine & le premier terme.

Série $\frac{13}{8}, \frac{19}{12}, \frac{25}{16}, \frac{31}{20}, \frac{37}{24}, \frac{43}{28}, \frac{49}{32}, \&c.$ à l'infini.

Dans laquelle les dénominateurs & les numérateurs croissent en même tems, ce qui est de l'essence des espèces primitives.

Les dénominateurs croissent de 4, c'est l'exposant du rang de ce quatrième quotient dont la variation seule produit cette série.

Les numérateurs croissent de $6 = 5 + 1$, ou $4 + 2$,

COROLLAIRE II.

On formera aussi par une semblable opération une série infinie d'espèces simples & primitives par la variation seule du troisième quotient qui est l'antépénultième dans cet exemple, en le supposant ou le faisant successivement égal à 1. 2. 3. 4. &c. à l'infini, le premier & le plus simple rapport du cinquième genre $\frac{13}{8}$ est encore l'origine & le premier terme de cette série.

Série $\frac{13}{8}, \frac{19}{12}, \frac{25}{16}, \frac{31}{20}, \frac{37}{24}, \frac{43}{28}, \frac{49}{32}, \&c.$ à l'infini.

Dans laquelle les dénominateurs croissent de 3, qui est l'exposant du rang du troisième quotient dont la variation donne cette série.

Les numérateurs croissent de 6, c'est le double de 3, exposant du rang du quotient générateur pris en remontant, ou bien 6 est triple de 2, exposant du rang du quotient générateur en descendant.

COROLLAIRE III.

La seule variation du quatrième quotient en remontant de bas en haut, donne la série des espèces simples & primitives qui suit.

Série $\frac{13}{8}, \frac{18}{13}, \frac{23}{18}, \frac{28}{23}, \frac{33}{28}, \frac{38}{33}, \frac{43}{38}, \frac{48}{43}, \&c.$ à l'infini.

Dans laquelle les dénominateurs & les numérateurs croissent constamment de 5.

COROLLAIRE IV.

On ne peut pas former une série infinie d'espèces simples & primitives par la variation seule du 1^{er}. quotient, car alors le dénominateur demeureroit le même & constant, ce qui est de l'essence des espèces subalternes ou dérivées, comme nous le verrons, en quoi elles diffèrent des espèces primitives, dont l'essence consiste à varier en même tems tant au dénominateur qu'au numérateur.

Cependant si on veut faire varier le premier quotient de manière qu'il donne une série dont le dénominateur & le numérateur varient en même tems; ce qui est de l'essence des espèces primitives, il faut en ce cas faire varier ce premier quotient conjointement avec la commune mesure, ou avec quelqu'autre quotient, mais la série qui en résulte contient non pas des espèces simples & primitives des rapports, mais seulement des espèces primitives & composées comme il suit.

Formation des séries des espèces composées & primitives des Rapports.

Les espèces composées & primitives, sont celles qui se trouvent dans une série infinie de rapports qui croissent en même tems tant au dénominateur qu'au numérateur, ce qui fait l'essence de l'espèce primitive, & qui sont formez par la variation des deux quotients ensemble, ou de plusieurs quotients en quelque nombre que ce soit combinez entre eux, ou avec la commune mesure variable de toutes les manières possibles.

Entre les espèces composées, il y en a de plus composées les unes que les autres, par la variation des deux quotients elles sont moins composées que par la variation de trois, de quatre, de cinq, de six, & de tout autre

nombre de quotients à l'infini ; à mesure que le genre du rapport est plus élevé , il y a un plus grand nombre de quotients qu'on peut combiner & faire varier ensemble.

La série la plus composée des rapports du cinquième genre ou degré est celle qui suit.

Série $\frac{13}{8}, \frac{198}{82}, \frac{1407}{426}, \frac{7985}{1885}, \frac{26046}{5016}, \&c.$ à l'infini.

Elle se forme par la variation de tous les cinq quotients & de la commune mesure , comme on le voit dans les opérations suivantes.

Primitif.

$\frac{13}{8}$	$\frac{198}{82}$	$\frac{1407}{426}$	$\frac{7985}{1885}$	$\frac{26046}{5016}$
$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{6}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{25}{5}$	$\frac{36}{6}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{5}$

Comme la commune mesure croît avec les cinq quotients , la variation de ces six nombres font croître les dénominateurs & les numérateurs tout ensemble le plus qu'il est possible dans le cinquième genre ou degré.

COROLLAIRE. V.

On peut par des opérations semblables & répétées trouver des séries d'espèces de rapports composées & primitives par la variation de deux quotients quelconques , ou de trois , ou de quatre , ou de cinq quotients , ou par la variation de la commune mesure conjointement avec un ou plusieurs quotients , c'est ainsi qu'on a trouvé les séries suivantes.

Série formée par la variation des trois premiers quotients , $\frac{13}{8}, \frac{46}{19}, \frac{113}{34}, \frac{233}{88}, \frac{417}{223}, \frac{718}{423}, \&c.$ à l'infini.

Série

Série formée par la variation des trois derniers quotients , $\frac{13}{8}$, $\frac{61}{24}$, $\frac{211}{56}$, $\frac{519}{110}$, $\frac{1121}{192}$, $\frac{2113}{308}$, &c. à l'infini.

Série formée par la variation du second , du troisième & 4^e. quotients $\frac{13}{8}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{76}$, $\frac{199}{161}$, $\frac{313}{296}$, $\frac{573}{493}$, &c. à l'infini.

Formation des séries des espèces subalternes ou dérivées des Rapports.

Dans les séries subalternes ou dérivées , le dénominateur est toujours constant & le même que celui du premier terme de la série qui en est l'origine , & le numérateur seul est variable & croît continuellement , voilà l'essence des séries subalternes , entre lesquelles il y en a qui sont dérivées des espèces simples primitives , & les autres sont dérivées des espèces composées primitives.

Les séries subalternes ou dérivées se forment par la variation du seul premier quotient du premier terme de la série , ce qui augmente le seul numérateur ; ou ce qui revient au même pour former les séries subalternes , soit un rapport ou terme quelconque d'une série infinie d'espèces primitives pris pour premier terme ou origine de la série désirée , on aura les numérateurs suivans en ajoutant au premier numérateur son dénominateur , & continuant de même par l'addition du premier dénominateur à chaque numérateur trouvé pour avoir le suivant , on trouvera de la sorte tous les numérateurs , sous lesquels on écrira le premier dénominateur qui est le dénominateur commun & constant de tous les termes de la série. Exemple , soit le plus simple rapport du cinquième degré , & le plus simple d'une espèce primitive , $\frac{13}{8}$, j'ai $\frac{13+8}{8}$ ($= \frac{21}{8}$) $\frac{21+8}{8}$ ($= \frac{29}{8}$) $\frac{29+8}{8}$ ($= \frac{37}{8}$) &c. à l'infini , ce qui donne la série dérivée ou subalterne , $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{8}$, $\frac{29}{8}$, $\frac{37}{8}$, $\frac{45}{8}$, $\frac{53}{8}$, $\frac{61}{8}$, &c. à l'infini.

Les dénominateurs sont les mêmes , c'est celui du premier terme de la série.

Analyse.

000

Les numérateurs croissent constamment de 8 qui est le premier dénominateur du premier terme qui est l'origine de la série.

Formation des Séries infinies des individus des rapports.

Chaque rapport particulier, ou chacun des termes pris dans une série de rapports, soit dans la série des genres, soit dans les séries des espèces primitives simples, soit dans les séries des espèces primitives composées, soit enfin dans les séries des espèces subalternes ou dérivées; ce rapport quelconque pris dans l'une de ces séries à volonté, peut servir de premier terme & d'origine à une série infinie d'individus de rapports; ce qui donne une infinité de séries infinies d'individus de rapports, dont les séries se forment de la manière qui suit.

Pour former une série d'individus de rapports sur un rapport donné quelconque; par exemple, soit le premier & plus simple rapport du cinquième degré ou genre $\frac{13}{8}$, je multiplie séparément le numérateur & le dénominateur par 1, 2, 3, 4, &c. qui est la suite naturelle des nombres pour avoir les multiples de ce numérateur & de ce dénominateur qui sont les termes de la série.

Exposans. 1^e. 2^d. 3^e. 4^e. 5^e. 6^e. &c.

Série. $\frac{13}{8}$, $\frac{26}{16}$, $\frac{39}{24}$, $\frac{52}{32}$, $\frac{65}{40}$, $\frac{78}{48}$, &c. à l'infini

Il est facile de former de la même manière les séries des individus de tout autre rapport.

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

Cela suffit pour donner une idée de l'étendue de la science des rapports, & pour former les séries des rapports dont on peut avoir besoin; il est bon de s'exercer sur les rapports de différens genres, & former soi-même les séries des espèces primitives simples, ensuite des espèces primitives composées; & après en avoir formé plusieurs pour les mieux posséder, on passera aux séries

des individus; cet exercice est le meilleur moïen pour apprendre aux commençans la théorie des rapports, & leur donner la facilité de les trouver dans le besoin.

PROBLÈME II.

Un Rapport étant exprimé par deux nombres, le réduire à sa plus simple expression; ou deux nombres étans donnez qui ne soient pas les plus petits de leur raison; trouver les deux plus petits nombres qui soient en même raison.

Soient les deux nombres donnez 1591 & 688, ou $\frac{1591}{688}$.
1^o. je cherche leur commune mesure & leurs quotiens par la division expliquée dans le Problème premier comme il suit.

1 ^{re} . colonne.	2 ^{de} . colonne. <i>Quotiens</i>	3 ^{re} . colonne. Produits.
1 ^{re} . Dividende 1591	$2 = a$	$16 \times a + c.$ $37 = 16 \times 2 + 5 = 32 + 5$
1 ^{re} . Diviseur & 2 ^{de} . Dividende 688	$3 = b$	$c \times b + 1$ $16 = 5 \times 3 + 1$
1 ^{re} . reste 2 ^{de} . Diviseur & 3 ^{re} . Dividende 215	$5 = c$	$4 = c$
2 ^{de} . reste 3 ^{re} . Divis. 43 & commune mesure.		1 l'unité constante.

2^o. Je me fers des quotiens contenus dans la seconde colonne pour former une troisième colonne comme il suit par multiplication.

J'écris en bas l'unité constante 1. dans la troisième colonne qui est celle des produits à droite vis-à-vis la commune mesure 43.

Ensuite j'écris 5 au-dessus de 1 dans la troisième colonne vis-à-vis de $5 = c$ de la seconde colonne.

Je multiplie ce 5 par le quotient qui le précède dans la

000 ij

seconde colonne $3 = b$, & au produit j'ajoute l'unité constante qui est au-dessous, j'ai $5 \times b + 1$, ou $5 \times 3 + 1$ qui donne 16 que j'écris vis-à-vis du pénultième quotient $3 = b$.

Je multiplie ce 16. par a , au produit j'ajoute c , c'est $16 \times a + c = 16 \times 2 + 5 = 37$, j'écris le produit 37 vis-à-vis $2 = a$.

Ainsi les deux nombres cherchez sont 37 & 16, ou $\frac{37}{16}$ qui sont les plus petits qui soient en même raison que le rapport proposé $\frac{1591}{688}$.

Démonstration. Je dis que la troisième colonne des produits contient les mêmes nombres que la première colonne qui contient les dividendes, avec cette différence que dans la troisième colonne ils sont divisez par 43 qui est la commune mesure.

Dans la troisième colonne l'unité constante, représente cette commune mesure 43 divisée par elle-même.

Le nombre 5 qui est au-dessus dans la troisième colonne égal au quotient 5 qui est à côté, représente le premier reste 215 divisé par la commune mesure 43, car divisant 215 par 43 le quotient est 5.

Le troisième produit 16, qui vient de $c \times b + 1 = 5 \times 3 + 1 = 15 + 1 = 16$ représente le second quotient $3 = b$, multiplié par le troisième quotient 5 augmenté de l'unité, & cette somme 16 représente le premier diviseur ou second dividende 688 divisé par 43, puisque son quotient est 16.

Enfin le dernier produit 37 représente le premier dividende 1591 divisé par la commune mesure 43, car 1591 divisé par 43 donne au quotient 37.

Donc les deux nombres du rapport $\frac{37}{16}$ sont les plus petits nombres qui soient en même raison que le rapport $\frac{1591}{688}$. Donc ce rapport est réduit à ses moindres termes; ce qu'il falloit trouver & démontrer.

SECOND EXEMPLE.

1 ^{re} . colonne. Dividendes.	2 ^e col. Quot.	3 ^e . colonne. Produits.
1 ^{er} . Dividende. 8. 36. 16	5 = a	21. 44. = $\overline{403 \times 5} + 129$
1 ^{er} . Diviseur & 2 ^d . Dividende 1. 57. 17 Son produit $\times 5$ à ôter du 1 ^e . Divid. 7. 85. 85	3 = b	403 = $\overline{129 \times 3} + 16$
1 ^{er} . Reste. 2 ^d . Diviseur & 3 ^e . Dividende. 50. 31 Son produit $\times 3$ à ôter du 2 ^d . Divid. 1. 50. 93	8 = c	129 = $\overline{16 \times 8} + 1.$
2 ^d . Reste. 3 ^e . Diviseur & 4 ^e . Dividende 6. 24 Son produit $\times 8$ à ôter du 3 ^e . Divid. 49. 92	16 = d	16 = $\overline{1 \times 16}.$
3 ^e . Reste. 4 ^e . Diviseur & commune mesure 39 Son produit à ôter du 4 ^e . Divid. 6. 24		
Dernier reste. 00		

Opérations subsidiaires.

1. 5 7. 17	8. 36. 16	50. 31	1. 57. 17.
$\times 5$	$\overline{-7. 85. 85}$	$\times 3$	$\overline{-1 50. 93}$
7. 8 5. 85	50. 31	15093	6 24
624	50. 31	39	
$\times 8$	$\overline{-49. 92}$	$\times 16$	
49. 92	39	6. 24.	

ooo iij

J'ai formé les deux premières colonnes par la division expliquée dans le Problème 1. qui m'a donné les quotiens $5 \equiv a$, $3 \equiv b$, $8 \equiv c$, $16 \equiv d$ (que je distingue par des lettres pour éviter l'obscurité) avec la commune mesure 39.

J'ai formé ensuite la troisième colonne qui est celle des produits , comme il suit.

Le 1^{er}. terme est 1, l'unité constante premier produit.

Le second produit 16 est le second quotient $16 \equiv d$ écrit dans la seconde colonne vis-à vis.

Ce produit 16 multiplié par le quotient précédent $8 \equiv c$ donne $16 \times c$, ou $\frac{16 \times 8}{1} = 128 + 1 = 129$ troisième produit qui est en bas vis-à-vis $8 \equiv c$.

Multipliant $129 \times 3 \equiv b$, au produit 387, ajoutant 129, produit précédent la somme 403 est le quatrième produit vis-à-vis $3 \equiv b$.

Enfin multipliant 403×5 quotient précédent $\equiv a$, & au produit 2015 ajoutant le produit précédent 129, la somme 2144 est le cinquième produit vis-à-vis le quotient $5 \equiv a$.

L'opération est finie, & les deux derniers produits de la troisième colonne $\frac{2144}{403}$ sont les deux plus petits nombres cherchez, qui expriment en moindres termes le rapport des deux nombres proposez $\frac{8.36.16.}{1.57.17.}$

Démonstration. Dans la troisième colonne qui est celle des produits, en bas l'unité vis-à-vis la commune mesure 39, représente 39 divisé par lui-même.

Le second produit 16 vis-à-vis du quotient $16 \equiv d$, représente le second reste de la première colonne 624 divisé par la commune mesure 39, car par hypothèse & par construction 39 mesure 624. par 16, puisque le quotient 16 est celui que donne la division de 624 par 39.

Le troisième produit 129 représente le premier reste

de la première colonne divisé par la commune mesure 39, car par hypothèse & par construction le premier reste 5031, contient le second reste 624 huit fois, plus une fois 39, c'est-à-dire $\frac{624 \times 8}{39} + 39 = 50.31$. ou $\frac{8 \times 16 \times 39}{39} + 39$, ou $\frac{128 \times 39}{39} + 39 = \frac{129 \times 39}{39}$.

De même le quatrième produit 403, représente le premier diviseur 1. 57. 17, divisé par la commune mesure 39, car par hypothèse & par construction 15717, contient trois fois le premier reste 5031 plus une fois 64, c'est-à-dire $15717 = \frac{3 \times 129 \times 39}{39} + \frac{16 \times 39}{39} = \frac{387 \times 16 \times 39}{39} = \frac{403 \times 39}{39}$.

Enfin par la même raison dans la troisième colonne le cinquième produit 21. 44. représente le premier dividende 8. 36. 16. divisé par la commune mesure 39, car par hypothèse & par construction 836. 16. contient le premier diviseur 157. 17 cinq fois, plus une fois le premier reste 5031, c'est-à-dire que $8.36.16 = \frac{5 \times 403 \times 39}{39} + 5031 = \frac{5 \times 3 \times 8 \times 16 \times 39}{39} = \frac{2144 \times 39}{39}$.

Donc le rapport $\frac{2144}{403}$ exprime dans les plus petits termes possibles le rapport donné $\frac{8.36.16}{1.57.17}$, ce qu'il falloit trouver & démontrer.

PROBLEME III.

Inverse du précédent.

Trouver les moindres termes d'un Rapport donné, c'est-à-dire d'un rapport dont les quotiens sont donnez; ou trouver la suite des deux plus petits nombres qui soient tels, que divisant le plus grand des deux nombres par le plus petit, & le plus petit nombre par le premier reste; & continuant à diviser le premier reste par le second, & ainsi de suite jusqu'au dernier reste qui soit un diviseur exact, les quotiens soient ceux du Rapport donné.

Par exemple. Soit donné la suite des quotients 5. 3. 8. 16. qui sont ceux d'un rapport donné du quatrième genre ou

degré, exprimer ce rapport par la suite de deux nombres premiers entr'eux.

C'est-à-dire, on demande les deux plus petits nombres, qui étant divisez continuellement donnent les mêmes quotiens & dans le même ordre proposé.

Il faut que ces deux nombres cherchez soient tels que le plus grand divisé par le plus petit donne 5 pour premier quotient avec un premier reste.

Que ce premier reste divisant le plus petit des deux nombres, donne 3, pour quotient avec un 2^d. reste.

Que ce second reste divisant le premier reste donne 8 pour quotient avec un troisième reste.

Et qu'enfin ce troisième reste divisant le second reste, il le mesure exactement par 16 sans aucun reste.

Règle. J'écris à gauche dans une colonne tous les quotiens donnez dans le même ordre qu'ils sont proposez.

Je forme à côté vers la droite une seconde colonne des produits par la multiplication expliquée dans le Problème précédent.

J'écris d'abord 1 en bas pour premier produit, & au-dessus le deuxième produit 16 vis-à-vis le dernier quotient.

Je multiplie ce produit 16 par 8 pénultième quotient, ce qui donne 128, j'ajoute le premier produit 1, c'est $128 + 1 = 129$ que j'écris pour troisième produit vis-à-vis 8.

Je multiplie le troisième produit 129 par le troisième quotient 3, au produit 387; j'ajoute le second produit 16, j'ai 403 pour quatrième produit que j'écris vis-à-vis 3.

Enfin je multiplie le quatrième produit 403 par le quatrième quotient 5, & au produit 2015, j'ajoute le troisième produit 129, j'ai 2144 pour cinquième & dernier produit que j'écris vis-à-vis de 5.

Ce qui donne le rapport $\frac{2144}{403}$ qui contient les deux nombres cherchez qui ont les conditions requises par le Problème.

1 ^{re} . colon.	2 ^{de} . colonne.	Opération.
<i>Quotients donnez.</i>	<i>Produits.</i>	<i>16 dernier quotient × 8 pénultième quot.</i>
5	21. 44. dern. prod.	1. 28... 1 ^{er} . produit.
3	4. 03. 4 ^e . produit.	+ 1. l'unité constante.
8	1. 29. 3 ^e . produit.	129... 1 ^{re} . somme.
16.	16. 2 ^d . produit.	× 3... 3 ^e . quotient.
	1. 1 ^{er} . produit.	387... 2 ^d . produit.
		+ 16.. dern. & 4 ^e . quot.
		403... 2 ^{de} . somme.
		× 5... 1 ^{er} . quotient.
		20. 15... 3 ^e . produit.
		+ 1. 29... 1 ^{re} . somme.
		21. 44... 3 ^e . & dern. som.

PROBLEME IV. FONDAMENTAL.

Pour la construction du triangle des Rapports.

*Trouver la suite de tous les nombres premiers entr'eux ,
qui expriment le plus exactement qu'il est possible le
Rapport de deux grandeurs données.*

Il y a deux cas. Puisque ces grandeurs sont commensurables ou incommensurables.

Premier cas. Si les grandeurs sont commensurables , on trouvera facilement deux nombres qui représenteront leur rapport , & si les nombres donnez ne sont pas les moindres termes de leur rapport , on les réduira à moindres termes par le Problème précédent.

Second cas. Si ces deux grandeurs étant incommensurables , sont exprimées aussi exactement qu'il est possible par deux grands nombres qui diffèrent de moins d'une unité , l'un par excès , l'autre par défaut , qui ne soient

Analyse.

PPP

pas des nombres premiers entr'eux, c'est-à-dire les moindres termes de leur rapport, on les réduira à moindres termes qui feront en même raison par le Problème précédent.

Mais si les nombres qui expriment le rapport donné sont premiers entr'eux, ou les plus petits nombres de leur raison; alors pour avoir la suite des plus petits nombres qui expriment d'une manière approchée le plus exactement qu'il est possible le même rapport, ce qui est plus commode dans la pratique. Voici la Méthode pour trouver la suite de tous les nombres qui expriment le plus exactement qu'il est possible le rapport de deux grandeurs données en nombres entiers.

Exemple. Soit donné le rapport $\frac{85.17.}{39.13.}$ exprimé par deux nombres qui sont les plus simples de leur raison, & premiers entr'eux, qui expriment ce rapport le plus exactement qu'il est possible.

1^o. Je fais sur ces deux nombres la division expliquée par le Problème 1^{er}. qui me donne les sept quotiens suivans que je distingue par des lettres pour éviter la confusion.

$a, b, c, d, e, f, g.$

2, 5, 1, 1, 1, 28, 8. Dans cet ordre, ce qui me donne deux colonnes.

La première colonne contient les dividendes, les diviseurs & les restes.

La seconde colonne contient les sept quotients a, b, c, d, e, f, g , exprimez en chiffres & en lettres.

Il s'agit de former d'autres colonnes que je nomme les colonnes des produits (sur ces deux premières, ainsi construites,) ce qui se fait de la manière qui suit.

La troisième colonne vers la droite se forme de cette forte. J'écris 1 qui est l'unité pour premier produit vis-à-vis le dernier quotient $8 = g$. Je forme tous les pro-

duits de cette troisième colonne en remontant , de la manière expliquée dans le Problème précédent , ce qui se fait en multipliant chacun des produits trouvez par le quotient de la seconde colonne qui est du rang au-dessus , & ajoutant à ce produit celui qui est au-dessous du multiplié dans la troisième colonne.

C'est-à-dire , j'écris dans la troisième colonne le second produit 28 vis-à-vis du quotient 28 $\equiv f$, de la seconde colonne.

Je multiplie ce produit 28 par le quotient du rang supérieur 1 $\equiv e$. Au produit 28 j'ajoute le premier produit 1 de la troisième colonne , j'écris la somme 29 dans la troisième colonne pour troisième produit

Je multiplie ce troisième produit 29 par le quotient précédent de la seconde colonne 1 $\equiv d$. Et au produit 29 j'ajoute le produit précédent 28 , & j'écris la somme 57 dans la troisième colonne pour quatrième produit.

Je multiplie ce 57 par le quotient précédent 1 $\equiv c$ de la seconde colonne , & au produit 57 , j'ajoute le produit précédent 29 , & j'écris la somme 86 dans la troisième colonne pour cinquième produit.

Je multiplie ce 86 par le quotient précédent 5 $\equiv b$; & au produit 430 j'ajoute le produit précédent 57 , & j'écris la somme 487 dans la troisième colonne pour sixième produit.

Enfin je multiplie ce 487 par le quotient précédent qui est le premier de la seconde colonne 2 $\equiv a$; & au produit 974 j'ajoute le produit précédent 487 , & j'écris la somme 10. 60 dans la troisième colonne pour le septième & dernier produit.

Je conclus de la formation de cette troisième colonne , que le rapport $\frac{10\ 60}{487}$ contient les plus petits nombres qui expriment le plus exactement qu'il est possible le rapport donné $\frac{85\ 17}{39\ 13}$.

Nous verrons ensuite la formation des autres colonnes.

Première colonne. Contenant les Dividendes. les Diviseurs & les Restes.	2 ^{de} . col. Quot.	3 ^{me} . col. Prod.	4 ^{me} . col. Prod.	5 ^{me} . col. Prod.	6 ^{me} . col. Prod.	7 ^{me} . col. Prod.	8 ^{me} . col. Prod.
1 ^{er} . Dividende. 85. 17	2=a	10.60	37	24	13	11	2
1 ^{er} . Diviseur & 2 ^d . Dividende 39. 13	5=b	4.87	17	11	6	5	1
1 ^{er} . Reste. 2 ^d . Divisf. 6. 91 & 3 ^e . Dividende 34. 55	1=c	86	3	2	1	1	
2 ^d . Reste. 3 ^e . Diviseur & 4 ^e . Dividende 4. 58	1=d	57	2	1	1		
3 ^e . Reste. 4 ^e . Diviseur & 5 ^e . Dividende 2. 33	1=e	29	1	1			
4 ^e . Reste. 5 ^e . Diviseur & 6 ^e . Dividende 2. 24	28=f	28	1				
5 ^e . Reste. 6 ^e . Diviseur & 7 ^e . Dividende 8 Son produit par 28. . . 224	8=g	1					
6 ^e . Reste. 7 ^e . Diviseur & la commune mesure 1							

Formation de la quatrième colonne

1°. J'écris dans la quatrième colonne l'unité 1 dans une cellule vis-à-vis le second quotient $28 = f$ de la seconde colonne pour le premier produit de la 4^e. colonne.

2°. Je multiplie cet 1. par le troisième quotient $1 = e$ de la seconde colonne, & j'écris 1 pour le second produit de la quatrième colonne.

3°. Je multiplie ce second produit 1×1 , j'ajoute le premier produit qui est 1, & j'écris la somme 2 dans la 4^e. colonne vis-à-vis de $1 = d$ pour 3^e. produit de la 4^e. colonne.

4°. Je multiplie ce troisième produit 2 par le quotient précédent $1 = c$, & au produit 2 j'ajoute le produit précédent 1, & j'écris la somme 3 pour quatrième produit.

5°. Je multiplie ce quatrième produit 3 par le quotient précédent $5 = b$, & au produit 15 j'ajoute le produit précédent 2, & j'écris 17 pour cinquième produit.

6°. Je multiplie ce cinquième produit 17 par le quotient précédent $2 = a$, & au produit 34, j'ajoute le produit précédent, 5, & j'écris la somme 37 pour sixième & dernier produit.

D'où je conclus que les nombres du rapport $\frac{17}{17}$ sont encore sensiblement dans le même rapport que les nombres donnez $\frac{85}{39} \frac{17}{13}$, car divisant les uns & les autres par la division expliquée dans le Problème premier, ils donneront les mêmes quotients qui sont par construction les multiplicateurs, dont les nombres ou produits de la quatrième colonne ont été formez, excepté le dernier quotient que j'ai supposé 1, au lieu de $1 \frac{2}{11}$.

Formation de la cinquième, sixième, septième & huitième colonnes.

On formera encore de la même manière la 5°. 6°. 7°. & 8°. colonnes qui donneront les rapports $\frac{24}{11}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{2}{1}$, qui sont encore chacun sensiblement égaux au rapport donné $\frac{85 \cdot 17}{39 \cdot 13}$ on aura ainsi la suite de tous les nombres premiers entr'eux, qui expriment le plus exactement qu'il est possible le rapport de 85 17, à 39 13, telle qui suit dans les deux rangs que nous avons détachez des colonnes formées ci-dessus.

1 ^{re} . col.	3 ^e . col.	4 ^e .	5 ^e .	6 ^e .	7 ^e .	8 ^e .
85. 17.	1060.	37.	24.	13.	11.	2
39. 13.	487.	17.	11.	6.	5.	1

ppp ij

On peut toujours augmenter le nombre des colonnes jusqu'à ce qu'on arrive à une colonne qui n'ait que deux nombres, après laquelle on ne peut pas en former d'autres.

Démonstration du Problème & du résultat de chaque colonne des produits.

On peut démontrer le Problème en général en cette sorte, deux nombres qui ont exactement le même rapport que deux autres nombres, donnent précisément la même suite de quotients, & plus leur rapport est approchant, plus aussi la suite de leurs quotients doit être approchante; or par la construction les nombres 1060 & 487, ont les mêmes quotients que les deux nombres 8517 & 3913, excepté le dernier quotient 8 que j'ai omis exprès dans la colonne des produits pour mettre en sa place l'unité, donc les nombres du rapport $\frac{1060}{487}$ sont fort approchans des nombres qui expriment le rapport $\frac{8517}{3913}$; pour s'en convaincre, il faut examiner leur différence, c'est-à-dire, les limites d'approximation par excès & par défaut comme il suit.

Limites d'approximation ou examen des erreurs, tant par excès que par défaut.

Comme il est impossible d'exprimer exactement le rapport donné, il y a erreur ou par excès ou par défaut dans chaque terme de la série ci-dessus $\frac{1060}{487}$, $\frac{37}{17}$, $\frac{14}{11}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{2}{1}$, pour connoître les limites, il faut remonter aux hypothèses qui ont donné les produits, comme il suit.

1°. Dans la première colonne j'ai supposé que 8 mesuroit 225 négligeant l'unité qui reste, car il mesure 224 $\equiv 225 - 1$, ce qui donneroit $28\frac{1}{8}$, au lieu du quotient $28 \equiv g$, donc ce quotient g est trop petit, ainsi en écrivant dans la troisième colonne le second produit 28, il est trop petit de $\frac{1}{8}$, puisque le véritable quotient est $28\frac{1}{8}$, qui surpasse 28 de $\frac{1}{8}$.

20. J'écris 29 dans la troisième colonne pour la même raison, au lieu de $29 \frac{1}{8}$, & 57 pour $57 \frac{3}{8}$, & 86 au lieu de $86 \frac{5}{8}$, & 487 au lieu de $487 \frac{17}{8}$, ou de $489 \frac{1}{8}$, & enfin 1060 au lieu de $1060 \frac{37}{8}$, ou de $1064 \frac{1}{8}$.

Donc les excès des véritables quotients sur les quotients approchez sont $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{17}{8}$, $\frac{37}{8}$, dont les numérateurs 1. 1. 2. 3. 17. 37. sont produits continuellement par la multiplication du numérateur 8 par le quotient précédent de la seconde colonne, & le produit ajouté au numérateur suivant en remontant comme il paroît dans la table suivante.

Colonne des Quotients.	Numérateurs des excès & des défauts.	Produits exacts de la colonne.
2 = a	37	1060 $\frac{37}{8}$
5 = b	17	487 $\frac{17}{8}$
1 = c	3	36 $\frac{3}{8}$
1 = d	2	57 $\frac{2}{8}$
1 = e	1	29 $\frac{1}{8}$
28 = f	1	28 $\frac{1}{8}$
8 = g		1

Ce qui se démontre comme dans le Problème 2^d. puisqu'il s'agit de la même opération, comme il suit. •

Démonstration des limites de la troisième colonne.

Puisque nous venons de voir que $487 \frac{17}{8}$ est à $1060 \frac{37}{8}$, exactement comme 3913 est à 8517, si j'en ôte les deux fractions $\frac{17}{8}$, & $\frac{37}{8}$, qui sont sensiblement dans le même rapport, comme on le verra dans la formation de la quatrième colonne, il suit de-là que les restes 487 &

1060 seront encore sensiblement dans le même rapport, ce qui est évident par la formation de la quatrième colonne expliquée ci-dessus.

Démonstration des limites de la quatrième colonne.

Je dis que les deux nombres de la quatrième colonne 37 & 17, sont encore sensiblement dans le même rapport que les deux nombres donnez 8517, & 3913, c'est-à-dire qu'ils donneront par la division les mêmes cinq premiers quotients & dans le même nombre & le même ordre $2 = a$, $5 = b$, $1 = c$, $1 = d$, $1 = e$; mais ils diffèrent dans le sixième quotient que j'ai supposé 1, au lieu de $1 \frac{8}{225}$.

Car en divisant de suite 8517, & 3913, & tous les restes par 225, on trouvera ce qui suit; sçavoir,

D'abord divisant 225 par 225, le quotient est 1, comme je l'ai écrit dans la quatrième colonne.

En remontant 233 divisé par 225, le quotient est $1 \frac{8}{225}$, au lieu de 1 que j'ai mis à la seconde cellule de la quatrième colonne pour second produit.

En remontant encore 458 divisé par 225 le quotient est $2 \frac{8}{225}$, au lieu de 2 que j'ai mis à la quatrième colonne pour troisième produit.

Ensuite 691 divisé par 225, le quotient est $3 \frac{16}{225}$, au lieu de 3 que j'ai écrit à la quatrième colonne pour quatrième produit.

De même 3913 divisé par 225, le quotient est $17 \frac{88}{225}$, au lieu de 17 que j'ai écrit à la quatrième colonne pour cinquième produit & dernier.

Donc les excès des véritables quotients sur les quotients approchez qui sont les produits contenus dans la quatrième colonne sont $\frac{8}{225}$, $\frac{8}{225}$, $\frac{16}{225}$, $\frac{88}{225}$, $\frac{192}{225}$, dont les numérateurs 8, 8, 16, 88, 192, sont produits continuellement par la multiplication du numérateur 8 multiplié

multiplié par le quotient précédent , & le produit ajouté au numérateur précédent , comme il paroît par la table qui suit , ce qui se démontre comme ci-dessus.

<i>Quotients.</i>	<i>Numérateurs des excès & des défauts.</i>	<i>Produits exacts de la 4^e. colonne.</i>
$2 = a$	192	$37 \frac{192}{225}$
$5 = b$	88	$17 \frac{88}{225}$
$1 = c$	16	$3 \frac{16}{225}$
$1 = d$	8	$2 \frac{8}{225}$
$1 = e$	8	$1 \frac{8}{225}$

C'est-à-dire , puisque $37 \frac{192}{225}$ est à $17 \frac{88}{225}$ exactement comme 8517 est à 3913 , & que les deux excès $\frac{192}{225}$ & $\frac{88}{225}$ qui sont entre eux comme 24 à 11 , qui sont encore dans le même rapport , comme on le voit par la formation de la cinquième colonne , c'est-à-dire qu'ils sont entre eux sensiblement comme 8517 est à 3913.

COROLLAIRE.

Regle générale pour les limites.

L'origine du triangle des Rapports.

Ce Problème me fournit par la formation de ses colonnes distinguées par carreaux , la figure d'un triangle numérique que je nommerai désormais *le triangle des Rapports* ; c'est de ce triangle que je tire une Méthode générale pour connoître le plus exactement qu'il est possible les rapports des nombres tant commensurables qu'incommensurables , qui se trouvent exprimez dans les deux rangs d'en haut par la suite des nombres entiers premiers entre eux , non pas dans la dernière précision , ce qui

Analyse.

999

est impossible dans les nombres irrationaux , mais avec la plus grande approximation possible alternativement par excès & par défaut , avec des limites qui déterminent l'erreur.

Des limites.

Toute Méthode d'approximation est inutile , si elle n'est accompagnée d'une autre Méthode qui donne les limites d'erreur , soit par excès , soit par défaut ; ici je donne une Méthode facile pour ces limites , en comparant comme il suit par la règle de trois chaque terme de la série comprise dans les deux premiers rangs d'en haut trouvez par l'opération ci-dessus avec les nombres du rapport donné.

$\frac{8517}{3913}$	$\frac{1060}{487}$	$\frac{37}{17}$	$\frac{24}{11}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{2}{1}$	Série des nombres compris dans les deux rangs d'en haut.
---------------------	--------------------	-----------------	-----------------	----------------	----------------	---------------	--

Règle générale.

Faites cette analogie ou règle de trois , comme le nombre du 2^d. rang ou le dénominateur est au nombre correspondant du premier rang ou le numérateur.

Ainsi le plus petit des nombres donnez 3913 , est à un quatrième nombre.

Or ce quatrième nombre qui n'est qu'approché & non pas exact , diffère ou par excès ou par défaut d'une fraction , dont le dénominateur est le dénominateur même compris dans le second rang d'en haut , & le numérateur est le reste de la division que donne la règle de trois , ce qui s'éclaircira par les exemples suivans.

Exemple. Pour connoître l'erreur du dernier terme de la série ci-dessus , j'ai cette analogie , $1 : 2 :: 3913 : 7826$; je trouve ce quatrième nombre par la règle de trois comme il suit , je multiplie le plus petit des nombres donnez 3913 par le nombre 2 , numérateur du rapport $\frac{2}{1}$, le pro-

duit est 7826, que je divise par 1 dénominateur du même rapport $\frac{1}{1}$, le quotient est 7826.

Ensuite j'ôte ce quotient 7826 du plus grand des deux nombres donnez 8517, la différence est 691, c'est l'excès dont 8517 surpasse le quotient 7826.

Opération

3913

Analogie. $1:2::3913:7826$ — $\times 2$

$$I \left\{ \overline{78.26} \right\} \begin{matrix} \text{Quotient.} \\ 7826 \end{matrix}$$

— 85.17
78.26 défaut $\frac{6.91}{1}$

691

J'ai donc une fraction pour l'erreur par défaut dont le numérateur est cette différence 691, & le dénominateur est 1, qui est le dénominateur du rapport $\frac{2}{1}$.

Autrement. Dans la série des rapports formée par les nombres des deux rangs d'en haut ; je considère deux choses, 1°. le nombre des quotients dont la multiplication a donné chaque rapport particulier, 2°. le caractère spécial du pénultième quotient qui fournit le deuxième produit en commençant l'opération, & qui est au-dessus de l'unité dans chaque colonne, j'examine si ce pénultième quotient est défectif ou excessif, c'est à-dire par défaut ou par excès, d'où je tire cette règle générale.

Règle générale pour trouver les limites.

1^{er}. cas. Si le pénultième quotient est défectif, & que le nombre des quotients restans qui serviront de multiplicateurs (pour l'une des colonnes dont il s'agit), soit un nombre pair sans y comprendre l'unité, dans ce cas le plus grand des deux nombres exprime par excès le rapport proposé.

2^d. cas. Mais si le nombre des quotiens restans est impair, alors le rapport est exprimé par défaut.

ggg ij

3^e. cas. Au contraire, si le pénultième quotient qui donne le 2^d. produit de la colonne dont il s'agit est excessif, & le nombre des quotients restans est ou pair ou impair, alors le plus grand des deux nombres de cette colonne exprime par défaut le rapport donné.

D'où il suit que lorsque tous les quotients sont défec-
tifs comme il arrive ordinairement, la série des rapports
trouvés dans les deux rangs d'en haut expriment le rap-
port donné alternativement par excès & par défaut.

Ainsi dans la huitième colonne le rapport $\frac{2}{1}$ exprime
par défaut le rapport $\frac{8517}{7826}$, puisque le quotient $2 = a$ est
défectif, & laisse un reste, d'ailleurs le nombre des quo-
tients restans est impair non compris l'unité, puisque ce
quotient 2 est unique, ce qui donne cette analogie comme
ci-devant.

$$\begin{array}{rcl}
 1:2::3913:7826 & \text{---} & 8517 \\
 \text{Opération. } 3913 & & \text{---} 7826 \quad \text{Défaut } \frac{1}{691} \\
 & \times 2 & \text{Quotient } 691 \\
 1 \left\{ \begin{array}{l} 78. 26 \end{array} \right\} 78 26
 \end{array}$$

Dans la septième colonne le rapport $\frac{11}{1}$ est excessif,
puisque le pénultième quotient $5 = b$ est défectif, &
que le nombre des quotients est pair non compris l'unité,
ce qui donne par la règle ci-dessus cette analogie.

$$\begin{array}{rcl}
 11:5::3913:1778 & + & \frac{7}{11} \\
 \text{Opération. } 3913 & & \\
 & \times 11 & \\
 \hline
 & 3913 & \\
 & 39130 & \text{Quotient.} \\
 5 \left\{ \begin{array}{l} 43043 \end{array} \right\} 8608 + \frac{7}{11}
 \end{array}$$

LIVRE SECOND.

549

8 . . 40

excès.

3 : 0

or 8517

8 . . 3 0

— 8608 + $\frac{1}{2}$

91 + $\frac{1}{2}$

0 0 : 4 : 3

— 91 + $\frac{1}{2}$

5 ou $\frac{24}{1}$

8 4 0

reste 3

Dans la sixième colonne le rapport $\frac{13}{6}$ est défectif, puisque le pénultième quotient $1 = c$ est défectif laissant un reste, & que le nombre des quotients non compris l'unité est impair, ce qui donne par la règle ci-dessus cette analogie.

$$6 : 13 :: 3913 : 8478 \frac{1}{2} —$$

Opération.
$$\begin{array}{r} 3913 \\ \times 13 \\ \hline \end{array}$$

1. 17.39

3. 91.30

$$6 \left\{ \begin{array}{l} 5. 08. 69 \end{array} \right\} 84. 78 \frac{1}{2}$$

8 . . 4 8

2 : 8

défaut.

4 2 4

or 8517

4 : 6

— 8478 $\frac{1}{6}$

38 $\frac{1}{6}$ ou $\frac{43}{6}$

7 4 2

— 38 $\frac{1}{6}$

4 : 9

8 4 8

reste 1

Dans la cinquième colonne le rapport $\frac{24}{11}$ est excessif, puisque le pénultième quotient $1 = d$ est défectif laissant un reste, & que le nombre des quotients est pair non compris l'unité, ainsi par la règle j'ai cette analogie.

$$11 : 24 :: 3913 : 8537 \frac{1}{11} +$$

Opération.
$$\begin{array}{r} 3913 \\ \times 24 \\ \hline \end{array}$$

qqq iij

$$\begin{array}{r}
 1.5652 \\
 7.826 \quad \text{Quotient.} \\
 \hline
 \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ \left\{ \begin{array}{l} 9.3.9.12. \end{array} \right\} \end{array} \right\} 8564 \frac{8}{11} \\
 \hline
 8 \dots 88 \\
 5:9 \quad \text{excès.} \\
 5 \dots 5 \quad \text{or } 8517 \\
 4:1 \quad - 8564 \frac{8}{11} \quad 47 + \frac{8}{11} \\
 6 \dots 3 \quad = 47 \frac{8}{11} \quad 11 \quad \text{ou } \frac{11}{11} \\
 5:2 \\
 4 \dots 4 \\
 \hline
 \text{reste } 8
 \end{array}$$

Dans la quatrième colonne le rapport $\frac{37}{17}$ est défec-
 tif, puisque le pénultième quotient $1 = e$ est défec-
 tif, & que le nombre des quotients restans non compris l'u-
 nité est impair, ce qui donne cette analogie.

$$\begin{array}{l}
 17:37::3913:8516 \frac{12}{17} \text{ —} \\
 \text{Opération. } 39.13 \\
 \times 37 \text{ ou pat } 40 \text{ — } 3.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 15.65.20 \\
 - 1.17.39 \quad \text{Quotient.} \\
 \hline
 \left\{ \begin{array}{l} 17 \\ \left\{ \begin{array}{l} 14.47.81. \end{array} \right\} \end{array} \right\} 85.16 \frac{2}{17} \text{ —} \\
 \hline
 8 \dots 13 \\
 8:7 \quad \text{or } 8517 \\
 5 \dots 8 \quad - 8516 + \frac{2}{17} \\
 2:8 \quad = \text{défaut } \frac{2}{17}. \\
 1 \dots 1 \\
 1 \\
 6 \dots 1 \\
 \hline
 \text{reste } 9
 \end{array}$$

Enfin dans la troisième colonne le rapport $\frac{1060}{487}$ est ex-

cessif, parce que le pénultième quotient 28 = fest défectif, laissant un reste, d'ailleurs le nombre des quotients non compris l'unité, est pair, ce qui donne cette analogie.

$$487 : 1060 :: 3913 : 8517 \frac{1}{487} \text{ ---}$$

Quotient

$$\left\{ 487 \left\{ 4. 14. 77. 80 \left\{ 85. 17 \frac{1}{487} \right. \right. \right.$$

8 3. 89. 6		
	25 1:7	
5 24 3 5	8 2:8	= 8517 + $\frac{1}{487}$
		or 8517
1 4 8 7	excès + $\frac{1}{487}$	3913
		× 1060
	3 4 1:0	23. 4780
7 3 4 0. 9		3.91. 3 . .
	I	4.14. 77.80.

On voit par le détail des opérations l'erreur de chacun des termes de la série, soit par excès, soit par défaut, il est impossible de trouver d'autres moindres nombres qui expriment plus exactement le même rapport $\frac{8517}{3913}$, car quelques nombres que l'on choisisse, on trouvera toujours que l'excès ou le défaut sera toujours plus grand, & par conséquent moins approchant, ce qui démontre que ceux-ci approchent davantage; ce qu'il falloit démontrer.

Remarque fondamentale.

Si le rapport donné est exprimé exactement par les deux nombres donnez, la série donne exactement la suite de tous les nombres premiers entre eux qui expriment le même rapport le plus exactement qu'il est possible.

Si les deux nombres donnez ne sont pas exacts, mais seulement approchez d'un rapport géométrique donné quelconque, ou l'un des nombres exact, & l'autre seule-

ment approché, on opérera de même comme ci-dessus.

Si les nombres donnez sont irrationaux & incommensurables, il sera toujours fort aisé de substituer en leur place deux nombres rationaux entiers aussi grands qu'on voudra, qui diffèrent chacun de moins d'une unité du rapport donné, & dont l'un en approche par excès & l'autre par défaut; dans ce cas il faut deux opérations, la première sur les nombres approchés par excès qui donne une première série, & la seconde opération sur les nombres approchés par défaut qui donne une seconde série, comparant ensuite ces deux séries, on préfère celle qui approche davantage, soit par excès, soit par défaut, comme nous le verrons dans la suite.

LE TRIANGLE DES RAPPORTS

On Méthode générale & facile pour trouver la série infinie de tous les nombres premiers entr'eux, qui expriment le plus exactement qu'il est possible un Rapport donné quelconque.

Définition. Je nomme un triangle des rapports, le triangle numérique composé de plusieurs colonnes divisées par carreaux ou cellules tel qu'est celui qui résulte dans le Problème quatrième qui précède, de la formation des dernières colonnes 3^e. 4^e, 5^e. 6^e, 7^e. & 8^e. qui présentent à la vûe la figure d'un triangle rectangle.

C'est ce triangle que je nomme *le triangle des Rapports*, & je l'employe comme un instrument universel pour former la plus simple, la plus convergente & la plus parfaite des séries pour exprimer un rapport quelconque; par exemple, soit proposé le rapport $\frac{85}{39} \frac{17}{13}$.

Pour former le triangle des rapports qui donne la série des fractions en nombres premiers entr'eux qui expriment ce rapport le plus exactement qu'il est possible.

1^o. Il faut par la division expliquée dans le Problème premier trouver les quotiens & la commune mesure des
deux

deux nombres qui expriment ce rapport , qui sont les sept quotients suivans trouvez dans cet ordre.

1^{er}. 2^d. 3^e. 4^e. 5^e. 6^e. 7^e. Quotient.
 $2=a$. $5=b$. $1=c$. $1=d$. $1=e$. $28=f$. $8=g$.

Voilà dans leur ordre analytique les sept quotiens générateurs du triangle des rapports , que je nomme générateurs parce qu'ils sont les seuls avec la commune mesure qui entrent dans la formation du triangle des rapports. Les extrêmes sont; sçavoir , $2=a$ qui est le premier, & $8=g$ qui est le dernier , tous les autres sont les quotiens moïens.

2^o. Je range ces mêmes quotiens par Synthèse dans un ordre contraire.

1^{er}. Quot. 2^d. 3^e. 4^e. 5^e. 6^e. 7^e. Quotient.
 $8=g$. $28=f$. $1=e$. $1=d$. $1=c$. $5=b$. $2=a$.

3^o. Si je prends les sept quotiens en nombres , je formerai par la multiplication & l'addition un triangle des rapports numérique & particulier pour le rapport donné.

Mais si je prends ces sept quotiens en lettres , je formerai par leur multiplication & addition un *Triangle des Rapports Analytique & universel* qui servira de formule générale ou de règle abrégée pour construire sur ce modèle tous les *Triangles des Rapports numériques & particuliers* qu'on voudra en substituant à la place des lettres les quotiens numériques qu'on aura trouvé par la division pour chaque cas particulier.

Ainsi le *Triangle des Rapports Analytique ou universel* , & le *Triangle des Rapports numérique & particulier* ne diffèrent que par la seule expression , qui est générale dans le premier triangle , & qui est particulière ou déterminée dans le second triangle , nous les formerons ici tous les deux en même tems pour montrer leur conformité , & nous prendrons pour exemple un rapport du cinquième genre ou degré qui n'a que cinq quotiens , afin que les

Analyse. rrr

554 ANALYSE GÉNÉRALE,
opérations puissent se renfermer dans deux pages, & re-
présenter les triangles sans confusion.

*Formation du Triangle des Rapports, pour trouver la
Série infinie des fractions qui expriment en nombres
premiers entr'eux le plus exactement & le plus prompte-
ment qu'il est possible un Rapport donné.*

Exemple. Soit le rapport donné $\frac{869}{178}$.

Pour former le triangle des rapports sur ces deux nom-
bres.

Préparation. 1^o. Je me sers de la division expliquée
dans le Problème premier pour trouver la commune me-
sure & les quotients par cette opération.

1 ^{er} . Dividende.	869	Quotients. 4 = a
1 ^{er} . Diviseur & 2 ^d . Dividende	178	1 = b
Produit \times 4 du Diviseur à ôter du 1 ^{er} . Dividende . . .	712	
1 ^{er} . Reste. 2 ^d . Diviseur & 3 ^e . Dividende	157	7 = c
2 ^d . Reste. 3 ^e . Diviseur & 4 ^e . Dividende	21	2 = d
3 ^e Reste. 4 ^e . Diviseur & 5 ^e . Dividende	10	10 = e
Dernier Diviseur, reste & commune mesure	1	

Ainsi j'ai par Analyse les cinq quotients générateurs
dans cet ordre,

1^{er}. 2^d. 3^e. 4^e. 5^e. Quotient.
 $4 = a. 1 = b. 7 = c. 2 = d. 10 = e.$

Ensuite je peux ranger ces mêmes quotients par Syn-
thèse dans un ordre contraire, parce que la Synthèse est
opposée à l'Analyse de cette sorte.

1^{er}. Quotient. 2^d. 3^e. 4^e. 5^e. Quotient.
 $10 = c.$ $2 = d.$ $7 = e.$ $1 = b.$ $4 = a.$

Je nomme ces quotients disposez par Analyse les quotiens générateurs du triangle des rapports, parce que ce sont les seuls nombres avec la commune mesure qui entrent dans la formation du triangle des rapports; chacun de ces quotients sert à former l'une des colonnes de ce triangle, d'où il suit que le triangle des rapports contient autant de colonnes qu'il y a de quotients trouvez par la division précédente sur le rapport proposé, c'est-à-dire que dans cet exemple où le rapport $\frac{869}{178}$ donne cinq quotients, le triangle des rapports aura cinq colonnes.

Préparation de l'espace nécessaire pour écrire & former le Triangle des Rapports pour les cinq Quotiens précédens.

1^o. Je tire une ligne droite indéfinie qui doit servir de base au triangle des rapports, sur laquelle je marque six divisions inégales dans la proportion qui sera expliquée ci-dessous, pour déterminer par des lignes perpendiculaires indéfinies les espaces nécessaires pour les cinq colonnes que je formerai sur les cinq quotients générateurs trouvez ci-dessus.

La première division de gauche à droite, aura une largeur sensible pour écrire le premier quotient, & ce premier interval servira d'échelle pour déterminer tous les autres. C'est l'espace de la première colonne, sa hauteur sera double de sa largeur, parce qu'elle ne contient que deux rangs pour $\frac{1}{a}$.

La seconde division ou le second interval de gauche à droite pour la seconde colonne aura de largeur le double de la première colonne & le triple de hauteur, parce qu'elle doit avoir six termes ou rangs, & deux chiffres ou deux lettres dans le rang d'en bas.

rrr ij

La troisième division ou le troisième interval de gauche à droite pour la troisième colonne, aura de largeur le triple de la largeur de la première parce qu'elle contient trois termes dans le rang d'en bas. Sa hauteur contient cinq fois la hauteur de la première colonne, parce qu'elle contient dix termes ou dix rangs.

On déterminera facilement de même les largeurs & les hauteurs des autres colonnes en suivant les progressions des séries suivantes, qu'on peut continuer indéfiniment.

Série pour déterminer les hauteurs des colonnes du triangle 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13, &c. c'est la progression continuée des nombres impairs.

Série pour déterminer les largeurs des colonnes du triangle des rapports, 1. 2. 3. 5. 8. 13. &c. qu'on peut continuer aisément, puisque chaque terme pris dans le milieu de la série égale la somme des deux termes précédens. Exemple $13 = 5 + 8$.

Construction de chaque colonne du Triangle des Rapports en particulier.

Pour éviter les répétitions, je forme tout à la fois chacune des colonnes du triangle des rapports Analytique ou universel, & celle du triangle des rapports numérique & particulier en même tems, cela servira à les comparer & à montrer que les deux triangles ne diffèrent que par la seule expression.

Après avoir formé séparément chacune des cinq colonnes, je les rassemble ensuite pour former le triangle des rapports tout entier dont ces colonnes sont les parties.

La première colonne ne contient que deux termes; le premier terme est l'unité constante, c'est la commune mesure & la première somme Analogique, ou le premier terme constant & invariable dans toutes les colonnes du triangle des rapports.

Le second terme est le premier quotient générateur

$4 \equiv a$. C'est le quotient propre & particulier de cette première colonne, car chaque colonne a un quotient particulier, qui a le même exposant dans l'ordre Analytique.

Première colonne en Lettres.	Première colonne. en Chifres.
1. <i>L'unité constante.</i>	1 <i>Première somme</i>
<i>1^{re}. somme Analogique.</i>	<i>Analogique.</i>
<i>a 1^{er}. Quotient.</i>	<i>4. Premier Quotient.</i>

Cette première colonne me donne le premier terme de la série que je veux former, c'est $\frac{1}{2} \equiv \frac{1}{4}$. Ce rapport approche par excès.

La seconde colonne contient six termes sur sa hauteur, & deux termes sur sa largeur.

Sur sa hauteur le premier terme est l'unité constante 1, qui est toujours la première somme analogique.

Le second terme, est le second quotient $1 \equiv b$, qui est le quotient propre & particulier à la seconde colonne, puisqu'il est le second dans l'ordre Analytique.

Le troisième terme est le premier quotient $4 \equiv a$ comme multiplicateur du second quotient.

Le quatrième terme est le produit de ces deux quotients, c'est $\frac{4 \times 1}{4 \times 1} \equiv 4 \equiv ab$. C'est le premier produit contenu dans cette colonne.

Le cinquième terme est l'unité constante qui est la première somme analogique répétée pour la première fois.

Le sixième terme est la somme du premier produit & de la première somme répétée, c'est-à-dire $\frac{4 + 1}{4 + 1} \equiv 5$, ou $\frac{ab + 1}{ab + 1}$.

Seconde colonne en Lettres.	Seconde colonne. en Nombres.
<u>1. Première somme Analogique.</u>	<u>1. Première somme Analogique.</u>
<u>2. Second Quotient & pénultième somme</u>	<u>1. Second Quotient & pénultième somme</u>
<u>$\times a$. Premier Quotient.</u>	<u>$\times 4$. Premier Quotient.</u>
<u>$a b$. Premier produit.</u>	<u>$= 4$. Premier produit.</u>
<u>$+ 1$. Première somme répétée.</u>	<u>$+ 1$. Première somme répétée.</u>
<u>$a b + 1$. Dernière somme.</u>	<u>5. Dernière somme.</u>

La troisième colonne contient trois termes en lettres sur sa largeur en bas, qui se réduit à un seul nombre dans le triangle numérique & particulier.

Sur sa hauteur elle contient dix termes.

Le premier terme est l'unité constante 1.

Le second terme est le troisième quotient $7 = c$ qui est le quotient propre & particulier de la troisième colonne.

Le troisième terme est le second quotient $1 = b$, comme multiplicateur.

Le quatrième terme est le produit des deux quotients $7 \times 1 = c \times b = bc$. Premier produit de cette colonne.

Le cinquième terme est la première somme analogique 1. répétée une seconde fois.

Le sixième terme est la somme du premier produit & de l'unité répétée. C'est $7 + 1 = 8 = bc + 1$.

Le septième terme est le premier quotient $4 = a$, comme multiplicateur.

Le huitième terme est le produit du premier quotient par la seconde somme $4 \times 8 = 32$, ou $bc + 1 \times a = abc + 1 a$, c'est le second produit de la troisième colonne.

Le neuvième terme est le troisième quotient propre de

cette troisième colonne répétée une seconde fois $7 = c$.

Le dixième terme est la somme du second produit & du troisième quotient répété $\frac{32}{32+7} = 39 = abc + 1a + c$. C'est la 3^e. & dernière somme de la 3^e. colonne.

Troisième colonne. en Lettres.	Troisième colonne. en Nombres.
1. Première somme.	1. Première somme.
c. 3 ^e . Quotient propre.	7. 3 ^e . Quotient propre.
x b. 2 ^d . Quotient.	x 1. 2 ^d . Quotient.
b c. 1 ^{er} . produit	7. 1 ^{er} . produit.
1. 1 ^{re} . somme répétée.	+ 1. 1 ^{re} . somme répétée.
b c + 1. 2 ^{de} . & pénultième somme.	8. pénultième somme.
<hr/>	<hr/>
x a. 1 ^{er} . Quotient.	x 4. 1 ^{er} . Quotient.
abc + 1 a. 2 ^d . produit.	32. 2 ^d . produit.
+ c. 3 ^e . Quotient répété.	+ 7. 3 ^e . Quotient répété.
abc + 1 a + c. Dernière somme.	39. Dernière somme.

La quatrième colonne contient sur sa largeur en bas quatre termes en lettres, & un seul nombre en chiffres.

Sur sa hauteur elle contient quatorze termes, c'est une Loi constante, que le nombre des termes croît toujours de 4 d'une colonne à la suivante à droite, ainsi la première colonne n'a que deux termes, la seconde en a fix, la troisième a dix termes, la quatrième quatorze termes, &c. c'est une cellule entière.

Le 1^{er}. terme est l'unité constante 1. Première somme.

Le second terme est le quatrième quotient $2 = d$, qui est le quotient propre & particulier de la 4^e. colonne.

Le troisième terme est le troisième quotient $7 = c$, comme multiplicateur.

Le quatrième terme est le produit de ces deux quotients $2 \times 7 = 14 = c \times d = cd$.

Le cinquième terme est la première somme 1 répétée.

Le sixième terme est la somme du premier produit & de la première somme $\overline{14+1} = 15 = cd + 1$. C'est la seconde somme de cette colonne.

Le septième terme est le second quotient $1 = b$ comme multiplicateur.

Le huitième terme est le produit de la seconde somme multipliée par le second quotient, ce qui donne le second produit $\overline{15 \times 1} = 15 = bcd + 1b$.

Le neuvième terme est le 4^e. quotient $2 = d$ répété.

Le dixième terme est la somme du second produit & du quatrième quotient, ce qui donne $\overline{15+2} = 17, = bcd + 1b$ c'est la troisième & pénultième somme.

L'onzième terme est le premier quotient $4 = a$, comme multiplicateur.

Le douzième terme est le produit de la pénultième somme par le premier quotient, c'est $17 \times 4 = 68$, & $abcd + ab + ad$.

Le treizième terme est la seconde somme répétée $15 = cd + 1$.

Enfin le quatorzième terme est la somme du troisième produit & de la seconde somme répétée, c'est $\overline{68+15} = 83$, & $abcd + ab + ad + cd + 1$.

Quatrième colonne
en Lettres.

1. Première somme.
d. Le 4^e. Quotient propre.
× c. Le 3^e. Quotient.
.
.
.
c d. Le 1^{er}. produit.
+ 1. La 1^{re}. somme répétée.
cd + 1. La 2^{de}. somme.
× b. Le 2^d. Quotient.
.
.
.
.

Quatrième colonne.
en Nombres.

1. Première somme.
2. Le 4^e. Quotient propre.
× 7. Le 3^e. Quotient.
.
.
.
14. Le 1^{er}. produit.
+ 1. La 1^{re}. somme répétée.
15. La 2^{de}. somme.
× 1. Le 2^d. Quotient.
.
.
.
.

bcd

$bcd + 1b$. Le 1^{er}. produit. 15. Le 2^d. produit.
 $+d$. Le 4^e. Quotient répété. $+2$. Le 4^e. Quotient répété.
 $bcd + 1b + d$. La 3^e. & pénultième somme. 17. La 3^e. & pénultième somme.
 $\times a$. Le 1^{er}. Quotient. $\times 4$. Le 1^{er}. Quotient.
 $abcd + ab + ad$. Le 3^e. prod. 68. Le 3^e. produit.
 $+cd + 1$. La 2^{de}. somme répétée. $+15$. La 2^{de}. somme répétée.
 $abcd + ab + ad + cd + 1$ 83. Dernière somme.
 dernière somme.

La cinquième colonne & les autres au-dessus se forment par la même Méthode,

Triangle des Rapports numérique & particulier, formé sur les cinq Quotients générateurs.

$4 = a$
 $1 = b$
 $7 = c$
 $2 = d$
 $10 = e$

			I	+ I	+ 10
			7	15	157
			× I	× I	× I
		
			7	15	157
			+ I	+ 2	+ 21
	I				
	I		8	17	178
	× 4		× 4	× 4	× 4

	4		32	68	712
	+ I		+ 7	+ 15	+ 157
I					
4	5		39	83	869

pénultième
somme.

dernière
somme.

Analyse.

fff

Remarque. En renversant ce triangle & le suivant, on aura le triangle du rapport direct comme dans la page 540. ci-dessus.

Triangle des Rapports Analytique & universel, formé sur les cinq Quotients générateurs a, b, c, d, e.

			I
			d
			$\times c$
		
			cd
			$+ 1$
		I	cd + 1
		$\times b$	$\times b$
	
		bc	bcd + b
		$+ 1$	$+ d$
	I	bc + 1	bcd + b + d
	b	$\times a$	$\times a$

	ab	abc + 1	abcd + ab + ad
	$+ 1$	$+ c$	$+ cd + 1$
I	a	abc + a + c	abcd + ab + ad + cd + 1
	ab + 1		

I	
e	
$\times d$	
de	
$+ I$	
$de + I$	
$\times c$	
$cde + Ic$	
$+ e$	
$cde + c + e$	
$\times b$	
$b c d e + b c + b e$	
$+ d e + I$	
$b c d e + b c + b e + d e + I$	Pénultième somme.
$\times a$	
$a b c d e + a b c + a b e + a d e + I a$	
$+ c d e + c + e$	
$a b c d e + a b c + a b e + a d e + a + c d e + c + e$	dernière somme.

ssij

Avertissement. Comme il est très-important de suivre exactement les règles prescrites ci-dessus dans la formation des colonnes du triangle des rapports, puisque le moindre changement gâteroit tout, j'ai jugé à propos d'entrer dans un plus grand détail dans règles qui suivent en déterminant toutes les parties du triangle des rapports, afin que le lecteur ne puisse pas se tromper; ensuite je verrai l'usage de ce triangle des rapports & des séries qui en résultent.

1^{re}. Règle générale pour former les colonnes du triangle des Rapports, sur des quotients générateurs donnez.

Chacune des colonnes du triangle des rapports a son quotient générateur propre & particulier, qui a le même exposant qui marque le rang qu'il occupe dans la première disposition des rangs des quotients où ils sont rangés par Analyse; ainsi le troisième quotient est le quotient propre de la troisième colonne, le cinquième quotient est le quotient propre de la cinquième colonne, &c.

Chaque colonne outre son quotient propre contient encore tous les quotients qui le précèdent dans l'ordre d'Analyse, ainsi la troisième colonne contient outre son quotient propre les deux quotients qui le précèdent, qui sont le premier & le second comme multiplicateurs; de même la cinquième colonne outre le cinquième quotient, qui est son quotient propre, contient encore comme multiplicateurs les quatre quotients précédens, & ces multiplicateurs donnent chacun leurs produits, que je distingue dans la colonne par ordre 1^{er}. 2^d. 3^e. &c. produits.

Chaque colonne considérée dans sa figure contient d'abord en tête un triangle rectangle qui contient un seul terme, c'est toujours l'unité constante mise pour première somme analogique, le reste est un parallélograme partagé en plusieurs cellules ou carreaux.

Chaque cellule a la forme d'un parallélograme, &

contient quatre rangs ou quatre termes ; sçavoir, un terme pour chaque rang : le premier rang est un quotient, le second est un quotient précédent comme multiplicateur , après ces deux rangs ou termes , est une ligne ponctuée pour les séparer des deux rangs suivans , le troisième terme est un produit , le quatrième terme est alternativement ou une somme répétée ou un quotient répété.

Le nombre des cellules est déterminé par l'exposant même de la colonne auquel il est égal moins un ; c'est-à-dire que la cinquième colonne dont l'exposant est 5, contient quatre cellules de quatre rangs ou de quatre termes chacune , la troisième colonne contient deux cellules , la seconde colonne ne contient qu'une cellule, & la première colonne n'a point de cellules, puisque $1 - 1 = 0$, ainsi elle ne contient que deux termes , dont le premier est l'unité constante qui est en tête dans son triangle rectangle , & au-dessous un seul rang qui est le premier quotient , c'est le premier rang en bas , ou le dernier si l'on veut , qui étant prolongé contient la dernière somme de toutes les colonnes , & qui en est absolument séparé de même que le triangle qui est en tête de chaque colonne.

Seconde Règle pour le nombre des termes contenus dans chaque colonne en particulier.

Le nombre des termes de la première colonne est 2, elle ne peut en avoir moins, c'est un rapport exprimé par une fraction qui a deux termes, son numérateur & son dénominateur.

Dans chaque colonne le nombre des termes croît de 4, c'est-à-dire d'une cellule entière d'une colonne à celle qui la suit de gauche à droite suivant cette progression.

Exposans des } 1^{re}. 2^{de}. 3^e. 4^e. 5^e. 6^e. 7^e. &c.
colonnes.

Exposant du } 2. 6. 10. 14. 18. 22. 26. &c.
nombre des
termes.

Troisième Règle pour la qualité des termes.

Il y a trois espèces de termes dans chaque colonne ; savoir, des quotients, des produits & des sommes, qui reviennent toujours de la même manière & dans le même ordre dans les quatre termes de chaque cellule dans cet ordre ; savoir, 1^o. une somme, 2^o. un quotient multiplicateur, 3^o. un produit, 4^o. une somme, excepté dans la première cellule dont le premier terme est le quotient propre de la colonne, mais il est considéré comme une somme dans les autres cellules, ce premier terme est la somme des termes de la cellule précédente.

De telle sorte que dans la première cellule de chaque colonne, le premier terme est le quotient propre & particulier de cette colonne.

Le second terme dans toutes les cellules est le quotient précédent comme multiplicateur.

Le troisième terme est le produit des deux termes précédens, desquels il est séparé par une ligne ponctuée.

Le quatrième terme est toujours le premier terme de la cellule précédente répété & considéré comme une somme.

Car chaque fois qu'on employe pour multiplicateur un quotient qui précède le quotient propre de la colonne, il occasionne toujours un quatrième terme qui suit son produit, qui est nécessairement la répétition d'une somme précédente, ce qui donne la somme qui fait le premier terme de la cellule suivante.

Premier usage du triangle des Rapports , ou examen de la série fondamentale des Rapports trouvez par le moïen du triangle des Rapports.

Le but de la construction du triangle des rapports , consiste à trouver les termes d'une série de rapports ou fractions , qui expriment le plus exactement qu'il est possible le rapport proposé ; or dans chaque colonne c'est la pénultième somme & la dernière qui sont les termes qui composent les rapports cherchez selon cet ordre.

somme $\left\{ \begin{array}{l} \text{pénultième} \\ \text{dernière} \end{array} \right. \quad \frac{1}{a}, \frac{b}{ab+1}, \frac{abc+1}{bc+1} a+c, \&c.$
 dans le triangle des rapports analytique.

Mais dans le triangle numérique & particulier , j'ai

somme $\left\{ \begin{array}{l} \text{pénultième} \\ \text{dernière} \end{array} \right. \quad \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{8}{39}, \frac{17}{83}, \frac{178}{869}, \&c.$

Ces fractions ou ces rapports ont été trouvez par le moïen des quotients générateurs pris dans l'ordre d'Analyse , mais si on les avoit pris en ordre de Synthèse , on auroit les mêmes rapports dans un ordre renversé qui est celui dont on a besoin & tel qu'il suit ; sçavoir , dans le triangle des rapports analytique & universel.

somme $\left\{ \begin{array}{l} \text{dernière} \\ \text{pénultième} \end{array} \right. \quad \frac{a}{1}, \frac{ab+1}{b}, \frac{abc+1}{bc+1} a+c, \&c.$

c'est la vraie série primitive & fondamentale.

De même aussi dans le triangle numérique & particulier j'ai la série primitive & fondamentale, en renversant de même tous les termes.

$$\text{somme} \left\{ \begin{array}{l} \text{dernière} \\ \text{pénultième} \end{array} \right. \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{39}{8}, \frac{83}{17}, \frac{869}{178}, \&c.$$

De cette sorte pour avoir la série primitive & fondamentale, je prends de chaque terme dans la base du triangle pour numérateur la dernière somme, & pour dénominateur la pénultième somme de chaque colonne, & la série étant ainsi trouvée dans laquelle chaque terme approche de plus en plus de la valeur du rapport donné; j'ai deux moyens pour la perfectionner.

Le premier moyen consiste à continuer indéfiniment cette série, 1°. ou en augmentant la suite du nombre des termes, puisque les plus éloignés expriment plus exactement le rapport cherché, 2°. ou en sautant plusieurs termes pour avancer plus vite dans une progression arithmétique quelconque, 3°. ou en sautant plusieurs termes dans une progression géométrique qui est encore plus prompte, & qui avance à pas de géants.

Le second moyen de perfectionner la série primitive & fondamentale trouvée par le triangle des rapports, consiste à trouver d'autres séries qui soient dérivées de celles-ci par addition ou soustraction, &c. j'expliquerai ces deux moyens dans le détail; mais auparavant je veux donner les limites de chaque terme de cette série primitive & fondamentale, pour connoître l'erreur qui se trouve dans chaque terme, soit par excès, soit par défaut.

DES LIMITES.

Pour connoître l'erreur soit par excès, soit par défaut dans chaque terme de la série primitive & fondamentale résultante du triangle des rapports.

Comme le rapport donné est irrationnel de sa nature,
il

il est impossible de l'exprimer exactement sans une division poussée à l'infini, ce qui est encore impossible dans la pratique; ce que peut faire de mieux une intelligence bornée telle qu'est l'esprit humain, c'est d'exprimer ce rapport par une série de fractions rationnelles, dont les termes approchent le plus qu'il est possible alternativement, ou par excès ou par défaut, & dont l'erreur soit non seulement insensible, mais la moindre qui soit possible; & pour en juger il faut connoître & déterminer avec précision l'erreur de chaque terme de la série, soit par excès soit par défaut.

Dans le triangle des rapports numérique & particulier ci-dessus, soit le rapport donné $\frac{869}{178} = \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, j'ai trouvé en lettres la série primitive & fondamentale

$$\frac{a+}{1}, \frac{ab+1-}{b}, \frac{abc+a+c+}{bc+1}, \frac{abcd+ab+ad+cd+1-}{bcd+b+d},$$

$$\frac{abcde+abc+abe+ade+a+cde+c+e+}{bcde+bc+be+de+1}. \text{ \&c.}$$

La même série primitive & fondamentale trouvée en nombres pour le rapport donné $\frac{869}{178}$ est

$$\frac{4+}{1}, \frac{5-}{1}, \frac{39+}{8}, \frac{83-}{17}, \frac{869+}{178}$$

Dans cette série chacun des termes est suivi alternativement du signe + & —, parce qu'ils expriment alternativement par défaut & par excès le rapport donné en plus petits nombres toujours premiers entre eux, puisqu'ils n'ont que l'unité seule pour commune mesure, & par conséquent c'est l'expression la plus simple & la plus exacte qui soit possible du rapport des deux nombres donnez; pour s'en convaincre, il n'y a qu'à appliquer ici les règles des limites expliquées ci-dessus, comme il suit.

Dans la série primitive & fondamentale en lettres, le premier terme $\frac{a}{1}$ donne le rapport $\frac{a}{b}$ par défaut, car le numérateur a est un quotient défectif par la construc-

Analyse.

111

tion du triangle des rapports analytique ; puisqu'il laisse un reste, & que ce quotient est impair, étant unique. Donc suivant les règles des limites, il exprime par défaut le rapport donné, c'est pourquoi ce numérateur doit être suivi du signe $+$, ainsi $\frac{a+}{1}$, ses limites sont $b - 1$,

$$\text{car } \frac{a}{1+b-1} = \frac{a}{b}.$$

Le second terme $\frac{ab+1-}{b}$ doit être suivi du signe $-$, parce qu'il exprime par excès le rapport donné $\frac{a}{b}$ par sa construction, ses limites sont $b + 1$, suivant les règles expliquées ci-dessus page 370 & 499.

Tous les autres termes sont de même alternativement par défaut & par excès, on en trouvera facilement les limites par la règle de trois, comme il est expliqué ci-dessus.

Des séries dérivées.

De la première série trouvée ci-dessus par le triangle des rapports qui est la série primitive & fondamentale, on peut former plusieurs autres séries dérivées en joignant ensemble deux termes de la série primitive, ou plusieurs comme il suit.

1°. La seconde série qui est la première des séries dérivées se forme en joignant ensemble deux à deux les termes de la série primitive qui sont toujours alternativement par excès & par défaut, je retranche l'excès des termes qui donnent trop pour l'ajouter aux termes qui ne donnent pas assez.

Ainsi du second terme $\frac{1+b+1-}{1b}$, j'ôte $\frac{1a+}{1}$, le reste est $\frac{1}{1b}$, qui étant ajouté au premier terme qui ne donne pas assez, la somme est $\frac{1a+}{a} + \frac{1}{1b}$, ce sont les deux pre-

miers termes trouvez, qui sont trop grands, car c'est $\frac{1ab+1}{1b}$, duquel j'ôte le 3^e. terme $\frac{1abc+1a+1c}{1bc+1}$

le reste est $\frac{1}{1bbc+1b}$ qui sera le troisième terme de la série dérivée; pour la preuve il suffit de faire l'opération qui suit.

$$\begin{array}{r} \text{car } 1ab + 1 \\ \times 1bc + 1 \\ \hline = 1abbc + 1ab + 1bc + 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Et } 1abbc + 1a + 1c \\ \times 1b \\ \hline = 1abbc + 1ab + 1bc \end{array}$$

or ôtant ce second produit du premier, le reste est

$$\frac{1}{1bbc+1b} = \frac{1}{1bc+1 \times 1b}, \text{ c'est le troisième terme de la série dérivée, \& ainsi des autres termes à l'infini.}$$

Par ce moyen je forme la seconde série qui suit, qui est la première série dérivée de la série primitive.

$$\begin{array}{cccc} 1^{\text{er}}. & 2^{\text{d}}. & 3^{\text{e}}. \text{ terme} & 4^{\text{e}}. \text{ terme.} \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{b} - \frac{1}{1bbc+1b} + \frac{1}{1bbcc+1bbc+1bcd+1b+1d} \\ \hline & & 1 & \\ & & 1bbccdde+1bbcd, \&c. \end{array}$$

Dans laquelle, 1^o. tous les numérateurs sont l'unité constante, ce qui rend cette série la plus simple qui soit possible, & les dénominateurs de chaque terme sont toujours le produit des dénominateurs des deux termes qui ont servi à former ce terme, qui ne sont que des parties aliquotes de l'unité qu'il faut soustraire & ajouter pour avoir le rapport cherché.

2^o. Tous les termes ont alternativement le signe + & — après le premier terme dans cette série.

ttt ij

Remarque. Il est plus facile de former cette seconde série en nombres qu'en lettres, parce que dans l'addition des grandeurs, littérales elles restent toutes entières & conservent le même nombre de termes, au lieu que dans l'expression des nombres, l'addition les réunit dans un seul terme ou dans une seule somme, ce qui rend cette seconde série beaucoup plus simple lorsqu'elle est exprimée en nombres, que lorsqu'elle est exprimée en lettres, la même chose se trouve encore dans la soustraction, où l'expression en nombres conserve le même avantage, mais dans la multiplication & dans la division où il est nécessaire de connoître tous les termes, l'expression littérale a l'avantage au-dessus de l'expression en nombres & lui est préférable.

Formation de la seconde série qui est la première dérivée en nombres de l'équation primitive.

1^{er}. terme. 2^d. 3^e. 4^e. 5^e. terme.

Série primitive. $\frac{4}{1}$. $\frac{5}{1}$. $\frac{32}{8}$. $\frac{83}{17}$. $\frac{869}{178}$. &c.

J'opère comme dans l'expression littérale en prenant toujours deux termes, & ôtant le premier du suivant après les avoir réduit au même dénominateur, ainsi de

$$\frac{5}{1}, \text{ j'ôte } \frac{4}{1}, \text{ c'est } \frac{5}{1} - \frac{4}{1} = \frac{5 \times 1 - 1 \times 4}{1 \times 1} = \frac{5 - 4}{1} = \frac{1}{1}$$

voilà le second terme trouvé pour la seconde série que j'ajoute au 1^{er}. terme, ainsi les deux premiers termes sont $\frac{4}{1} + \frac{1}{1} = \frac{5}{1}$, cette somme est trop grande, j'en ôte le troisième terme de la série primitive $\frac{32}{8}$, c'est $\frac{5}{1} - \frac{32}{8}$, je

les réduis d'abord au même dénominateur $= \frac{5 \times 8}{1 \times 8}$

$$= \frac{1 \times 39}{1 \times 8} = \frac{40 - 39}{8} = \frac{1}{8}, \text{ c'est le troisième terme de}$$

la série dérivée, que l'on continuera de même à l'infini, autant qu'on voudra.

Série dérivée $\frac{4}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \text{\&c.}$ où les termes ont ab-

ternativement les signes $+$ & $-$ après le premier.

Cette série est la plus simple & la plus commode de toutes les séries qu'on peut dériver de la série fondamentale , soit par l'addition de plusieurs termes excédans & la soustraction des termes défailans , soit en comparant de toutes les manières & dans toutes les combinaisons possibles les termes de la série primitive , ce qui donne autant de séries dérivées , mais cette première dérivée aiant toujours l'unité constante au numérateur , elle est la plus commode , parce qu'il est facile de voir la progression qui regne dans les dénominateurs , qui ne sont que des parties aliquotes de l'unité qu'il faut ajouter & soustraire pour avoir le rapport cherché ; mais ces séries dérivées sont tres-utiles dans la rectification & la quadrature des lignes courbes , & dans tous les Problèmes où il entre des racines irrationnelles , c'est pourquoi nous les renvoyons dans l'Analyse particulière , c'est leur place naturelle , parce que nous en ferons en même tems l'application aux lignes courbes , où l'on en a besoin.

De la Méthode inverse du triangle des Rapports.

Le triangle des rapports qui est expliqué ci-dessus donne infailliblement toujours la série la plus parfaite qui exprime le plus exactement qu'il est possible le rapport ou la racine irrationnelle cherchée.

Ce triangle est un instrument universel pour trouver les rapports de tous les nombres irrationaux & de toutes les racines irrationnelles de tous les degrez à l'infini , car ce que nous expliquons ici dans le détail pour le second degré , doit s'appliquer également à proportion dans tous les degrez.

Mais il y a deux manières de proposer un rapport , la première manière que je nomme le *Rapport direct* , est lorsque le rapport est exprimé par deux nombres qui

forment une fraction, alors il faut opérer directement sur les deux nombres donnez, diviser le plus grand par le plus petit, ce qui donne un premier reste, ensuite continuer à diviser le plus petit par le premier reste, ce qui donne un second reste, & ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on trouve un dernier diviseur exact & sans reste, & les quotients que l'on trouve par chaque division, servent de matériaux pour former le triangle des rapports expliqué ci-dessus dans cette section.

La seconde manière que je nomme la Méthode inverse du triangle des rapports, est lorsque le rapport proposé est inconnu & n'est point exprimé par deux nombres qui font une fraction, mais que l'on propose seulement la période réglée des quotients qui résulte de la division du rapport, & dans ce cas il s'agit par le moyen de la période de ces quotients, de trouver les deux nombres qui ont ce rapport, & même tous les nombres qui ont le même rapport en réitérant la période des quotients qui est toujours la même; nous en avons donné un exemple sur la fin de la Section précédente, p. 509.

C'est-à-dire que la Méthode directe du triangle des rapports cherche les quotients du rapport de deux nombres donnez & connus, la Méthode inverse au contraire cherche les deux nombres inconnus dont le rapport est exprimé par une série de quotients donnez & connus.

Former la Série générale des Périodes réglées des nombres irrationaux en général.

Toutes les périodes réglées des quotients générateurs, commencent après le premier quotient qui est hors d'œuvre & qui ne se répète point & s'étendent depuis le second quotient jusqu'à celui qui est précisément double du premier inclusivement, & la division continuée indéfiniment donne toujours la même période de quotiens qui se répète à l'infini, quelquefois il n'y a qu'une seule période, c'est

lorsque le premier diviseur revient le premier dans l'opération ; & quelque fois il y a deux périodes , c'est lorsque le premier nombre qui revient n'est pas le premier diviseur.

Exemple. Pour trouver le rapport de 1 à $\sqrt{2}$, je cherche la racine quarrée de 2 , j'ajoute des zéros tant que je veux après 2 , ou simplement je mets des points que je regarde comme des zéros.

Extraction de la Racine quarrée de 2.

<i>Dividende.</i>	<i>Quotient.</i>
{ 2. 00. 00. &c.	{ 14142. 13. 56 +.
<hr/>	
<i>Racines</i>	ou 1414213. 57 —.
1 ... 1. premier quarré à ôter.	
1 : 00 .. premier reste augmenté de deux zéros.	
2 : 4 96 .. second produit à ôter.	
4 : 00. second reste augmenté de deux zéros.	
2 : 8 : 1 ... 2 81. troisième produit à ôter.	
1 19 : 00 .. 3 ^{me} . reste augmenté de deux zéros.	
28 : 2 : 4 .. 1 12. 96. quatrième produit.	
6. 04 : 00. quatrième reste.	
282 : 8 : 2 ... 5 6 5 64. cinquième produit.	
3 8. 36 : 00. cinquième reste.	
2828 : 4 : 1 ... 2. 8 28 41. sixième produit.	
1 0 07 59 : 00. sixième reste.	
28284 : 2 : 3 ... 8 48 52 69. septième produit.	
1 5 9 0 6 3 1 : 00. septième reste.	
282842 : 6 : 5 ... 1 4 1 4 2 1 3 2 5. huitième produit.	
1 7 6 4 1 7 7 5 : 00. huitième reste.	
282842 : 70 : 6 ... 1 6 9 7 0 5 6 2 36. neuvième produit.	
&c.	&c. &c.

Au contraire si j'opère sur ces deux nombres donnez en fraction $\frac{141.421.356+}{100.000.00}$ qui est par défaut &

$\frac{141.421.357-}{100.000.000}$ par excès. Pour trouver la série des nom-

bres qui expriment ce même rapport le plus exactement qu'il est possible alternativement par excès & par défaut, je trouverai comme dans les deux opérations suivantes la série des quotients générateurs $1 \mid 2 \parallel 2 \parallel 2 \parallel \&c.$

Première opération, sur le rapport exprimé par défaut.

<i>Premier Divid. par défaut</i>	141.421.356 +	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{er} \text{ Quot.} \\ 1 \end{array} \right.$
$1^{er} \text{ Diviseur \& } 2^{d} \text{ Divid.}$	100.000.000.	$\left\{ \begin{array}{l} 2^{d} \text{ Quot.} \\ 2. \end{array} \right.$
$1^{er} \text{ produit à ôter}$	100.000.000	
$1^{er} \text{ reste. } 2^{d} \text{ Divis. \& } 3^{e} \text{ Divid.}$	41.421.356.	$\left\{ \begin{array}{l} 3^{e} \text{ Quot.} \\ 2. \end{array} \right.$
$2^{d} \text{ produit à ôter. . . .}$	82.842.712.	
$2^{d} \text{ reste. } 3^{e} \text{ Divis. \& } 4^{e} \text{ Divid.}$	17.157.288.	$\left\{ \begin{array}{l} 4^{e} \text{ Quot.} \\ 2 \end{array} \right.$
$3^{e} \text{ produit à ôter. . . .}$	34.314.576	
$3^{e} \text{ reste. } 4^{e} \text{ Divis. \& } 5^{e} \text{ Divid.}$	7.106.780.	$\left\{ \begin{array}{l} 5^{e} \text{ Quot.} \\ 2. \end{array} \right.$
$4^{e} \text{ produit à ôter}$	14.213.560.	
$4^{e} \text{ reste. } 5^{e} \text{ Divis. \& } 6^{e} \text{ Divid.}$	2.943.728.	$\left\{ \begin{array}{l} 6^{e} \text{ Quot.} \\ 2. \end{array} \right.$
5^{e} produit	5.887.456.	
$5^{e} \text{ reste. } 6^{e} \text{ Divis. } 7^{e} \text{ Divid.}$	2.219.324.	$\left\{ \begin{array}{l} 7^{e} \text{ Quot.} \\ 2. \end{array} \right.$
6^{e} produit.	2.438.648.	
$6^{e} \text{ reste. } 7^{e} \text{ Diviseur } 8^{e} \text{ Divid.}$	505.080.	$\left\{ \begin{array}{l} 8^{e} \text{ Quot.} \\ 2. \end{array} \right.$
7^{e} produit	1.010.160.	
$7^{e} \text{ reste. } 8^{e} \text{ Divis. } 9^{e} \text{ Divid.}$	209.164.	$\left\{ \begin{array}{l} 9^{e} \text{ Quot.} \\ 2. \end{array} \right.$
8^{e} produit	418.328.	
$8^{e} \text{ reste. } 9^{e} \text{ Divis. } 10^{e} \text{ Divid.}$	86.752.	$\left\{ \begin{array}{l} 10^{e} \text{ Quot.} \\ 2. \end{array} \right.$
9^{e} produit	173.504.	
$9^{e} \text{ reste. } 10^{e} \text{ Divis. } 11^{e} \text{ Divid.}$	35.660.	$\left\{ \begin{array}{l} 11^{e} \text{ Quot.} \\ 2. \end{array} \right.$
10^{e} produit	71.320.	
$10^{e} \text{ reste. } 11^{e} \text{ Divis. } 12^{e} \text{ Divid.}$	15.432.	$\left\{ \begin{array}{l} 12^{e} \text{ Quot.} \\ 3-. \end{array} \right.$
	30.864.	
	4.796.	

Les

Les onze premiers quotients sont bons & exacts ; mais le douzième commence à être faux par excès ; c'est un 3 au lieu de 2 , parce que le dividende a été pris un peu trop petit dans son dernier chiffre 6.

Seconde opération sur le rapport exprimé par excès.

$$1^{\text{er}}. \text{Divid. par excès. } 141. 421. 357. - \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{er}}. \text{Quotient.} \\ 1. \end{array} \right.$$

$$1^{\text{er}}. \text{Divis. } \& \text{ } 2^{\text{d}}. \text{Divid. } 100. 000. 000. \left\{ \begin{array}{l} 2^{\text{d}}. \text{Quotient.} \\ 2. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 1^{\text{er}}. \text{reste. } 2^{\text{d}}. \text{Divis. } \& \text{ } 41. 421. 357. \\ 3^{\text{e}}. \text{Divid. } 82. 842. 714. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3^{\text{e}}. \text{Quotient.} \\ 2. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 17. 157. 286. \\ 34. 314. 572. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4^{\text{e}}. \text{Quotient.} \\ 2. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 7. 106. 785. \\ 14. 213. 570. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5^{\text{e}}. \text{Quotient.} \\ 2. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 2. 943. 716. \\ 5. 887. 432. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 6^{\text{e}}. \text{Quotient.} \\ 2^{\text{e}}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 1. 219. 353. \\ 2. 438. 706. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 7^{\text{e}}. \text{Quotient.} \\ 2. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 505. 010. \\ 1. 010. 020. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 8^{\text{e}}. \text{Quotient.} \\ 2. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 209. 333. \\ 418. 666. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 9^{\text{e}}. \text{Quotient.} \\ 2. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 86. 344. \\ 172. 688. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 10^{\text{e}}. \text{Quotient.} \\ 2. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 36. 645. \\ 73. 290. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 11^{\text{e}}. \text{Quotient.} \\ 2. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 13. 054. \\ 26. 108. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 12^{\text{e}}. \text{Quotient.} \\ 1. + \text{ ou } 2 - \end{array} \right.$$

$$10. 537.$$

Analyse.

Les onze premiers quotients sont bons & exacts, mais le douzième est faux par défaut, c'est 1 — au lieu de 2. parce que le dividende a été pris trop grand au dernier chiffre 7.

THEOREME.

Tout rapport d'inégalité comme $\frac{13}{17}$, ou $\frac{17}{13}$ peut être transformé dans une période de quotients réglée suivant la progression géométrique décuple continuë descendante à l'infini, 2°. & le nombre des chiffres nécessaires pour exprimer chaque période réglée, non compris le zéro peut être égale au nombre d'unités que comprend le numérateur du rapport qui est l'antécédent moins un.

Ainsi dans $\frac{17}{13}$, la période réglée contient 16 chiffres dont quinze sont significatifs, & le 16^e. est un zéro, car les restes de la division peuvent être 1, 2, 3, &c. jusqu'à 16 & pas davantage, ce qui donne ce rapport comme 17 est à 13, ainsi 10000, &c. est à $\frac{764.705.882.352.9411.&c.}{1300.000.000.000.000.&c.}$ comme il paroît par la démonstration sensible de l'opération qui suit.

Démonstration sensible & particulière pour $\frac{13}{17}$.

<i>Diviseur</i>	<i>Dividende</i>	<i>Quotient</i>
17 :	13 : 0...	0.764.705.882.352.941.1 764.705.882.352.941.1.
<div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> 7 . . . 119 11:0 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> 6 . . . 102 8:0 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> 4 . . . 68 </div>		
<div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> 12:0 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> 7 . . . 119 1:0 </div>		

0 0	
1010	
5 85	
<hr/>	
8 136	15:0
8 136	14:0
2 34	4:0
<hr/>	
3 51	6:0
5 85	9:0
2 34	5:0
<hr/>	
9 153	16:0
4 68	7:0
1 17	2:0
<hr/>	
fin de la 1 ^{re} . période 1	17 3:0 égal au 1 ^{er} . diviseur.
<hr/>	
qui recommence à l'infini	13:0. 1 ^{er} . divid.
7 119	
6 102	11:0
4 68	8:0
<hr/>	
	12:0

Remarque sur les restes. Le Dividende 13 est regardé
uuu ij

comme le premier reste , car tous les restes sont des dividendes , en le comprenant il y a 17 restes dans cet exemple, & c'est tout ce qu'il y en peut avoir , puisque 17 est le diviseur.

Remarque importante & fondamentale. Lorsque le premier reste qui revient dans le cours de l'opération est le même que le dividende comme ici 13 , alors il n'y a qu'une seule & unique période réglée qui recommence toujours à l'infini , & qui redonne toujours la même série des quotients comme dans l'exemple précédent.

Mais lorsque le premier reste qui revient dans le cours de l'opération , comme dans le rapport $\frac{311}{113}$, alors il y a deux périodes qui composent la période réglée , la première partie se termine à ce premier reste qui revient le premier , cette première partie de la période se borne là , & ne revient plus , mais la seconde partie contient la période qui suit après , & qui se répète à l'infini.

Conclusion. C'est cette expression en parties décimales du rapport $\frac{311}{113}$; sçavoir 0.764 , &c. que je nomme le calcul intégral , il peut s'appliquer à tous les rapports , & par conséquent à toutes les racines irrationnelles de tous les degrez à l'infini , & cette intégration est incomparablement plus facile , plus commode & plus exacte que celle des progressions géométriques décroissantes à l'infini , & l'expression sensible des nombres la rend préférable à toute autre Méthode d'intégration, nous en verrons la preuve dans l'application que nous en ferons aux rectifications & aux quadratures des lignes courbes , de leurs surfaces & de leurs solides , c'est le sujet de l'Analyse particulière qui fera la seconde partie de cette Analyse complete.

LIVRE TROISIÈME.

Des Problèmes indéterminez ,
& des Problèmes plus qu'indéterminez.

METHODE GENERALE

Pour résoudre en nombres entiers les Problèmes indéterminez dans tous les cas possibles à l'infini.

LEs anciens n'ont pas voulu recevoir les solutions irrationnelles dans les Problèmes numériques, parce qu'effectivement ils n'ont pas regardé les irrationaux comme de véritables nombres. Euclide n'en a fait aucune mention dans le 7. 8. & 9. livres de ses Elémens qui sont tous destinez aux nombres, & le deuxième qui auroit dû traiter des irrationaux n'est exprimé qu'en lignes, ils ont crû que cette expression étoit la seule exacte & naturelle pour les rapports incommensurables, en quoi ils se sont trompez, comme l'auteur de la recherche de la vérité l'a fait voir, car les lignes ne parlent qu'aux yeux, & pour en connoître exactement le rapport, il faut avoir recours aux nombres, lesquels s'ils sont rationaux expriment exactement & en même tems d'une manière parfaitement intelligible le rapport de toutes les grandeurs, mais s'ils sont irrationaux, ils expriment ces mêmes rapports exactement & en même tems de la manière la plus intelligible qui soit possible, mais qui a cependant essentiellement & inévitablement une intelligibilité indéfinie que l'on peut diminuer à l'infini, en substituant des nombres exacts qui approchent toujours de la valeur de ces irrationaux par défaut ou par excès, mais qui ne peuvent jamais l'égaliser.

Euclide n'a pas même regardé comme nombres les fractions rationnelles, la définition qu'il donne du nombre au commencement du 7^e. livre ne leur convient pas plus directement qu'aux irrationaux, effectivement on ne peut concevoir de fraction abstraite, l'unité abstraite étant indivisible.

Diophante n'a point admis les irrationaux, mais il emploie les fractions, & tous les Problèmes dont l'égalité passe le premier degré sont ou indéterminez, ou restrains par des conditions qui les rendent nécessairement rationaux, & il n'y a de difficulté & d'adresse que dans les Problèmes indéterminez, lesquels naturellement tombent dans les irrationaux; il faut entre une infinité de solutions rationnelles & irrationnelles dont ils sont susceptibles, sçavoir former l'égalité de telle sorte, qu'elle donne nécessairement une solution rationnelle, de sorte que les Problèmes qui sont les plus difficiles, & même quelquefois impossibles étant proposés avec cette restriction, d'en donner la solution en nombres rationaux, sont si faciles sans cette même condition, qu'il seroit ridicule de les proposer.

Par Exemple. Diviser un nombre quarré en deux autres nombres quarez, diviser un cube en deux autres cubes, &c. & ce n'est pas sans raison que l'on s'attache aux nombres rationaux préférablement aux irrationaux, car il est évident que l'esprit reçoit avec plus de plaisir ce qu'il aperçoit exactement comme les nombres rationaux, que les irrationaux qu'il ne peut jamais apercevoir parfaitement.

Diophante & les autres anciens n'ont point connu de solutions négatives, & effectivement elles doivent être rejetées, lorsqu'il y en peut avoir de positives, & lorsqu'il n'y en peut avoir, le Problème est absolument impossible, car il est impossible de concevoir un nombre négatif purement & simplement; effectivement les solutions négatives d'un Problème sont des solutions po-

sitives d'un autre Problème, quoique cependant il y ait une très petite différence entre les Problèmes absolument impossibles, & ceux qui ne peuvent avoir que des solutions négatives, ou même imaginaires.

Diophante ne s'est pas mis en peine d'aller plus avant, il me semble au contraire qu'on peut réduire à cinq, les différens degrez de perfection dans la solution d'un Problème.

Le premier, qu'elle soit en nombres rationaux.

Le second, qu'elle soit en nombres entiers.

Le troisième, qu'elle soit en plus petits nombres qu'il soit possible, le quatrième, qu'on en ait une infinité.

Le cinquième qu'on les ait toutes, ce qui est différent du quatrième, car on peut en avoir une infinité, sans cependant les avoir toutes, par exemple, on trouve une infinité de nombres propres aux triangles rectangles par la règle des quarrés impairs, mais on ne les trouve pas tous, car on ne trouve pas, par exemple. $8 : 15 : 17$:

De tous ces degrez de perfection, Diophante & les anciens ne se sont mis en peine que du premier, mais il est aisé de voir qu'ils ont eu tort de négliger les autres, & pour ne parler que des solutions en nombres entiers, il est évident que les résolutions en nombres entiers ont sur les solutions en fractions, à peu près tout l'avantage que les solutions rationnelles ont sur les irrationnelles.

Voici en peu de mots l'occasion & la manière dont j'ai trouvé la Méthode, un de mes amis m'ayant dit qu'il se trouvoit embarrassé dans la solution d'un Problème de Diophante, qui n'étoit cependant que du premier degré, me pria de lui en envoyer la solution Méthodique, parce que celle de Diophante lui paroissoit embrouillée & peu naturelle.

Voici le Problème tirée de Diophante, liv. 2. prop. 18. trouver trois nombres tels que si on ôte la cinquième partie du premier plus 6, & qu'on l'ajoute au second,

après en avoir ôté la sixième partie plus 7, pour l'ajouter au troisième, après en avoir ôté la septième partie plus 8 pour l'ajouter au premier, ce qui résulte de l'addition & de la soustraction faite sur de certains nombres fasse trois nombres égaux.

Voici comme j'opérerai, soit pour éviter les fractions.

Le premier . . $5x$

Le second . . $6x$

Le troisième . . $7z$

ôtant du premier la cinquième partie $+ 6$, il reste $4x - 6$, auquel reste il faut ajouter la septième du troisième $+ 8$, ce qui fait $4x - 6 + z + 8$, ou $4x + z + 2$ pour premier nombre résultant.

Otant la sixième partie du second $+ 7$, il reste $5y - 7$, auquel reste ajoutant $x + 6$, la cinquième partie du premier selon le Problème, on a pour le second nombre résultant $5y - 7 + x + 6$, ou $5y + x - 1$.

Enfin ôtant du troisième sa septième partie $+ 8$, & au reste $6z - 8$, ajoutant la sixième partie du second $+ 7$, qui est $y + 7$, on aura $6z - 8 + y + 7$, ou $6z + y - 1$, pour troisième nombre résultant.

Il y donc égalité entre ces trois nombres résultans.

$$4x + z + 2$$

$$5y + x - 1$$

$$6z + y - 1$$

dont on peut former deux égalitez, & comme il y a trois inconnuës, il est évident que le Problème est indéterminé, c'est pourquoi nous pouvons à discrétion réduire deux des inconnuës à l'expression complexe des nombres connus & de la troisième inconnuë.

Ainsi par la première égalité $4x + z + 2 = 5y + x - 1$, on a cette égalité $z = 5y - 3x - 3$.

Par la seconde égalité $4x + z + 2 = 6z + y - 1$, on a $z = \frac{4x + 3 - y}{5}$ & comparant ces deux valeurs de z ,

on

on aura $\frac{4x+3-y}{5} = 5y - 3x - 3$. Et en multipliant tout par 5, on aura $4x + 3 - y = 25y - 15x - 15$, ou $25y + y = 15x + 4x + 15 + 3$, c'est-à-dire, $26y = 19x + 18$. Et $y = \frac{19x+18}{26}$. Or en substituant cette même valeur dans l'égalité $z = 5y - 3x - 3$, on aura cette autre égalité $z = \frac{95x+90}{26} - 3x - 3$, c'est-à-dire, $z = \frac{17x+12}{26}$ multipliant en croix pour ôter l'entier de la fraction, & ôtant des numérateurs 26 autant qu'il est possible, c'est-à-dire trois fois, à cause de $-3x$, car $-3 \times 26 = -78x - 78$.

Le Problème est donc réduit à sa dernière & plus simple expression d'égalité, par conséquent il est indéfiniment résolu, car quelque nombre que je prenne pour x , les valeurs de y & de z sont trouvées; mais il s'agit de trouver des nombres entiers, il faut donc que y étant égal à $\frac{19x+18}{26}$ & z étant égal à $\frac{17x+12}{26}$, il faut dis-je que x soit tel que son produit par 19 augmenté de 18, & de plus son produit par 17 augmenté de 12, soient divisibles par 26.

Or voici la pensée qui me vint là-dessus, si $19x + 18$, & $17x + 12$ sont divisibles par 26, il est évident que leur différence l'est aussi, c'est-à-dire que $2x + 6$ est aussi divisible par 26; donc son multiple sera aussi divisible par 26, c'est-à-dire, considérant dans $17x$ combien de fois il y a $2x$, je l'y trouve 8 fois, ainsi je multiplie $2x + 6 \times 8$, & il est évident que $16x + 48$ sera aussi divisible par 26, & pour abréger j'ôte de l'absolu 48 le nombre 26 autant de fois qu'il est possible, c'est-à-dire ici une fois seulement, & il me reste $16x + 22$,

Analyse.

xxx

qui est divisible par 26, or $17x + 12$ est aussi divisible par 26, donc leur différence $x - 10$ l'est aussi, donc le double de cette différence $2x - 20$ est aussi visible par 26, & ce double $2x - 20$, étant ôté de $2x + 6$, il reste 26.

$$\begin{array}{r}
 \text{de } 19x + 18 \\
 \text{ôtant } 17x + 12 \\
 \hline
 16x + 22 \quad 2x + 6 \text{ reste ou différence } 1^{\text{re}}. \\
 - 17x + 12 \quad \quad \quad x - 8 \\
 \hline
 \text{diff. } x - 10 \quad 16x + 48 \text{ Multiple.} \\
 \quad \quad \quad - 26 \\
 \times 2 \dots 2x - 20 \quad \hline
 \quad \quad \quad - 26 \text{ rest. } 16x + 22 \text{ dont ôtant 26.} \\
 \text{reste } 2x - 20 \quad \quad \quad x - 10 \text{ reste \& différence } 2^{\text{de}}. \\
 \quad \quad \quad 2x - 20 \text{ Multiple.} \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 26
 \end{array}$$

Or d'autant que le nombre absolu étant 26, il est effectivement divisible par 26, je conclus que le Problème peut se résoudre en nombres entiers, & qu'il ne reste qu'à rendre $x - 10$ divisible par 26.

Je suppose $x - 10$, égal à zéro qui est la moindre valeur possible, $\frac{x - 10}{26} = 0$, ce qui donne $x = 10$ qui satisfait.

Ainsi substituant cette valeur dans les égalitez ci-dessus, on aura pour les trois nombres cherchez $5x = 50$. $6y = 48$, $7z = 49$, qui sont les plus petits qui soient possibles, & c'est la solution la plus élégante qu'on puisse désirer; ceux de Diophante sont $\frac{20}{7}$, $\frac{101}{7}$, $\frac{101}{7}$.

$$\begin{array}{l}
 y = \frac{19x + 18}{26} = \frac{190 + 18}{26} = \frac{208}{26} = 8. \text{ donc } 6y = 48. \\
 z = \frac{17x + 12}{26} = \frac{170 + 12}{26} = \frac{182}{26} = 7. \text{ donc } 7z = 49.
 \end{array}$$

donc $5x = 50$.

Si on veut avoir tous les nombres à l'infini qui satis-

font aux conditions du Problème, il n'y a qu'à donner à x les valeurs suivantes.

$$x = 10.$$

$x = 10 + 26$ qui est le diviseur; ce qui donne pour les trois nombres cherchez 180. 162. 168.

$$x = 10 + \frac{2 \times 26}{2}$$

$$x = 10 + \frac{3 \times 26}{3}$$

&c. qui sont tous primitifs; mais leurs multiples ne satisfont pas généralement.

Or, il est évident que tous les Problèmes indéterminez peuvent se réduire à une formule semblable, & par conséquent ils peuvent être résolus de la même manière en nombres entiers, en observant ce qui est dit ci-après.

Voilà l'occasion de la première découverte, je l'ai mieux digérée dans la suite, & je l'ai poussée à l'infini avec un progrès qui m'a étonné. En voici le détail en commençant par les Problèmes les plus simples.

SECTION PREMIÈRE.

Proposition première.

Résoudre en nombres entiers un Problème indéterminé où il y a deux grandeurs inconnues, dont l'égalité finale ne passe pas le premier degré, & où une inconnue n'est pas multipliée par l'autre.
 (On suppose toujours qu'il y a une fraction dans l'égalité finale, autrement il n'y auroit point de difficulté, & partant on n'auroit pas besoin de règle.)

Tous ces Problèmes peuvent aisément se réduire à l'une des quatre formules suivantes.

xxx ij

$$1^{\text{re}} \dots y = \frac{ax}{p}$$

$$2^{\text{de}} \dots y = \frac{ax+q}{p}$$

$$3^{\text{e}} \dots y = \frac{ax-q}{p}$$

$$4^{\text{e}} \dots y = \frac{q-ax}{p}$$

1°. La première formule est aisée, il n'y a qu'à supposer $y = a$, & $x = p$.

Je suppose a & p réduits à leurs moindres termes si l'on veut avoir les plus petits nombres qu'il soit possible; ainsi on aura $a = \frac{ap}{p}$ ce qui donne $a = a$. Tous les multiples satisfont & sont les seuls qui puissent satisfaire, ce qui donne une solution pleine & entière, x & y étant comme a les plus petits de leur raison par là .. du 7 d'Euclide, toutes les valeurs de x & de y sont multiples de la 1^{re}. valeur.

2°. Pour la seconde formule $y = \frac{ax+q}{p}$.

Préparation. Il faut d'abord réduire $a + \frac{q}{p}$ à leurs moindres termes. Ensuite ôter de a ou de q tout ce qui est égal ou multiple de p ; je suppose toujours dans cette préparation a & q plus petits que p , & la raison de cette préparation est évidente; car il est certain que p se mesure lui-même & ses multiples, & par conséquent s'il est possible qu'il mesure le tout proposé, il mesurera la différence.

Ainsi ôtez a de p autant de fois qu'il est possible, précisément, & s'il reste quelque chose, soit ce reste nommé r , ôtez r autant de fois qu'il est possible de a , & s'il reste quelque chose, soit nommé ce second reste t ; ôtez t de r autant de fois qu'il est possible, & ainsi de suite jusques à ce que vous ayez trouvé un diviseur sans reste, ou que vous soyez parvenu à l'unité.

Faites les mêmes divisions sur q & sur p , que vous avez

fait sur a & p , en gardant les signes $+$ & $-$, & si vous parvenez à l'unité, ce qui arrivera toujours lorsque a & p seront premiers entr'eux, si l'absolu restant est $-s$, donc $x = s$: mais si l'absolu restant est $+$ s , donc $x = p - s$, & toutes les valeurs à l'infini sont dans le premier cas.

$p + s$	$p - s$
$2p + s$	$2p - s$
$3p + s$	$3p - s$
$4p + s$	$4p - s$
$5p + s$	$5p - s$
&c.	&c.

3°. Dans le second cas, que si l'on trouve un diviseur sans reste avant l'unité, multipliez l'absolu s par l'exposant de ce diviseur sans reste; ajoutez-le s'il est plus petit au dividende prochainement plus grand, & faisant l'addition ou la soustraction du produit, l'inconnue se détruira, & si l'absolu restant n'est pas divisible par p , le Problème est absolument insoluble en nombres entiers.

Que s'il est divisible, divisez l'absolu précédent par le nombre des racines du dernier diviseur sans reste, & le quotient sera la valeur de la racine s'il est $-$, ou sa différence au dénominateur s'il est $+$.

Que si l'absolu n'est pas divisible sans reste, par le nombre des racines du diviseur sans reste, le Problème est insoluble.

Et si on a soin de rejeter tous les excès dans l'opération, le nombre restant sera le dénominateur même.

4°. Toutes les fois que a & p sont nombres entiers, le Problème est soluble & infiniment soluble, parce que par la soustraction continuelle, on arrive à l'unité, & toutes les fois que a & p ne peuvent pas être réduits à moindres termes avec q , en sorte que a & p soient premiers, ou plus simplement si les trois a , p , q , étant premiers entr'eux, a & p sont composez, le Problème est impossible. Ce qui est un des plus beaux Théorèmes qui puissent être trouvez en ce genre.

EXEMPLE I.

Trouver deux nombres entiers tels que le premier étant multiplié par 7, soit égal au second multiplié par 13, & encore plus 20.

Soit le premier $= x$, le second $= y$. Donc $7x = 13y + 20$. Donc $x = \frac{13y + 20}{7}$ le Problème est indéterminé & réduit aux termes de la proposition.

Mais d'autant que 13 & 20 sont plus grands que 7, je l'ôte de l'un & de l'autre autant de fois qu'il est possible, & il me reste à rendre en nombres entiers $\frac{6y + 6}{7}$, je pose $6y + 6 = 7y$, donc $y = 6$, & par conséquent $x = \frac{6 \times 13 + 20}{7} = \frac{98}{7} = 14$ qui satisfont.

J'aurois pû trouver premièrement x par la même égalité, $7x = 13y + 20$. Donc $13y = 7x - 20$, & $y = \frac{7x - 20}{13}$, & ajoutant 13 à l'absolu -20 , il suffit de rendre en nombres entiers $\frac{7x - 7}{13}$,

je pose $7x - 7 = 13x$
reste $6x + 7$

$x = 14$, & par la règle $x = 14$.

Pour trouver tous les autres nombres qui donnent toutes les solutions possibles à l'infini, il n'y a qu'à ajouter 7 + 6. pour la valeur de x continuellement, & 13 + 14 pour la valeur de y .

Ainsi les valeurs de x seront

$$\begin{array}{rcl} & x & y \\ 6 & = & 6 \dots 14 \\ 6 + 7 & = & 13 \dots 27 \end{array}$$

$$13 + 7 = 20 \dots 40$$

$$20 + 7 = 27 \dots 53$$

$$27 + 7 = 34 \dots 66$$

$$\&c. \quad \&c. \quad \&c.$$

EXEMPLE II.

Pour le premier cas ci-dessus.

Trouver deux nombres tels , que si le premier donne au second sa cinquième partie + 7 , & le second donne au premier sa sixième partie + 13 , les deux nombres résultans soient égaux.

Soient d'abord ces deux nombres x & y . Donc ôtant la cinquième partie du premier $x + 7$, il reste $\frac{4}{5}x - 7$, auquel ajoutant la sixième partie du second $y + 13$, c'est-à-dire $\frac{1}{6}y + 13$. Le premier résultant est $\frac{4}{5}x - 7 + \frac{1}{6}y + 13$.
c'est-à-dire, $\frac{4}{5}x + \frac{1}{6}y + 6$.

De même ôtant du second y sa sixième partie + 13, il reste $\frac{5}{6}y - 13$, auquel ajoutant $\frac{1}{5}x + 7$. Le second résultant $\frac{5}{6}y + \frac{1}{5}x - 6 = \frac{4}{5}x + \frac{1}{6}y + 6$, qui est le premier résultant.

Et multipliant tout par 30 pour ôter les fractions $\frac{4}{5}$ & $\frac{1}{6}$, j'ai cette égalité $25y + 6x - 180 = 24x + 5y + 180$, laquelle étant ordonnée donne $20y = 360 + 18x$, & $y = 18 + \frac{9}{10}x$.

Et d'autant que 18 est un nombre entier, il suffit de rendre en nombres entiers $\frac{9}{10}x$, ce qui se fait par le premier cas, en supposant $x = 10$. ce qui donne $y = 27$, & le résultant est $18 \frac{1}{2}$.

$$x = 10 \dots y = 27$$

$$x = 20 \dots y = 36$$

$$x = 30 \dots y = 45$$

$$x = 40 \dots y = 54$$

$$x = 50 \dots y = 63$$

$$x = 60 \dots y = 72$$

$$x = 70 \dots y = 81 \quad \text{Soit } x = 10$$

$$x = 80 \dots y = 90 \quad 20y = 360 + 18x$$

$$x = 90 \dots y = 99 \quad \text{donne } 20y = 360 + 180$$

$$x = 100 \dots y = 108 \quad = 540$$

$$x = 110 \dots y = 117 \quad \text{je divise } 540 \text{ par } 20 \text{ le quo-}$$

$$x = 120 \dots y = 126 \quad \text{tient est } 27 = y.$$

$$x = 130 \dots y = 135$$

$$x = 140 \dots y = 144$$

$$x = 150 \dots y = 153$$

$$x = 160 \dots y = 162$$

$$x = 170 \dots y = 171$$

$$x = 180 \dots y = 180$$

Dans ce 18^e. rang les deux nombres sont égaux.

Et ainsi de suite à l'infini, où l'on trouve que dans le dix-huitième rang les deux nombres sont égaux; & en effet, si de 180 l'on ôte la cinquième partie 36, plus 7 qui font 43, & qu'on y ajoû-

te la sixième partie qui est 30, plus 13 qui font aussi 43, il est évident que le Problème est résolu.

On auroit pû éviter les fractions, en mettant pour le premier 5 x , & pour le second 6 y , & on auroit trouvé 20 & 36; sçavoir, 4 pour x , & 6 pour y , surquoi il faut remarquer que 10 & 27 sont bien les plus petits nombres qui satisfont en nombres entiers; mais que toutes les opérations du Problème ne sont pas nécessairement en nombres entiers, comme dans ce cas les résultans sont $18\frac{1}{2}$, au lieu qu'en évitant les fractions dans l'opération, on évite aussi toute fraction dans la résolution, non seulement à l'égard des nombres cherchez & principaux, mais aussi à l'égard des nombres intervenans; car ce sont deux sens différens qu'il faut bien remarquer, l'un demande seulement que les nombres proposez soient entiers, & l'autre demande que non seulement les nombres proposez, mais aussi les nombres résultans soient entiers.

EXEMPLE

EXEMPLE III.

Trouver deux nombres tels que le premier donnant au second sa cinquième partie, & le second donnant au premier sa sixième partie les deux résultans soient égaux.

Ces deux nombres soient x & y , ou $5x$ & $6y$.
Donc $\frac{4x}{5} + \frac{1}{6}y = \frac{1}{6}y + \frac{1}{5}x$. Et multipliant tout par 30 pour ôter les fractions, on aura $24x + 5y = 25y + 6x$, & $20y = 18x$ ce qui donne $y = \frac{9x}{10}$. Donc $x = 10$, & $y = 9$. C'est la solution en plus petits nombres, mais elle donne des fractions.

Mais si l'on prend $5x$ & $6y$, on aura cette égalité $4x + y = 5y + x$. Par conséquent $4y = 3x$, donc $y = \frac{3x}{4}$, ce qui donne $x = 4$, & $y = 3$; alors les nombres cherchez font $20 = 5 \times 4 = 5x$ & $3 \times 6 = 3x = 18$ qui satisfont pleinement & tous leurs multiples.

EXEMPLE IV.

Pour le troisième cas.

Suivant la Formule $y = \frac{ax - q}{p}$ la même préparation, la même résolution & le même Théorème ont lieu comme dans le premier cas.

Remarquez, qu'on peut toujours transformer ce troisième cas dans le premier, en ajoutant au numérateur $+ p$; ainsi $\frac{ax - q}{p}$ se change dans le premier cas positif $\frac{ax + p - q}{p}$ où $p - q$ est toujours positif, parce que par la préparation $-q$ est supposé plus petit que p .

Or il est aisé de choisir entre les infinitez de valeurs de x que la règle donne par simple addition, une de ses valeurs telle qu'on en puisse ôter q tel qu'il est, même avant la préparation, supposé que p soit plus grand que q .

Analyse.

yyy

Par exemple. Soit l'égalité proposée $y = \frac{50x - 560}{13}$,

la préparation me donne $13x = \frac{11z - 1}{13}$ & $z = 6$.

$$\begin{array}{r} \text{Opération} \quad 13z. \\ 11z - 1 \\ \hline 2z + 1 \\ 10z + 5 \\ \hline z - 6 \end{array}$$

Or, je ne puis pas prendre $z = 6$ pour x , à cause que divisant 560 par 50, la valeur de x est plus grande $11\frac{1}{5}$, c'est pourquoi j'ajoute 13 à 6, qui me donne 19 pour seconde valeur qui est la première en cas de x qui satisfait.

Car $50 \times 19 - 560 = 950 - 560 = 390$ qui est divisible par 13, dont le quotient est 30 valeur de y .

Exemples des Problèmes impossibles dans le second cas.

Premier Exemple. Soit l'égalité $y = \frac{8y + 7}{10}$.

Démonstration. Si $8y + 7$ est divisible par 10, d'autant que 10 l'est aussi, leur différence $2y - 7$ le fera aussi, ce qui est évident. Par conséquent son quadruple $8y - 28$.

Or $8y + 7$ par l'hypothèse est divisible par 10. donc leur différence 35 est aussi divisible par 10, ce qui est absurde.

2^e. Exemple. $x = \frac{8y + 9}{12}$.

Opération. de $12y$
ôtez $8y + 9$
différ. $4y - 9$
multiple. $8y - 18$, ou $8y - 6$, ce qu'il faut remarquer
 $8y - 6$
 15 qui n'est pas divisible par 12.

Remarque. On peut & on doit toujours, pour abrégér,

sur-tout dans les grands nombres, diminuer tous les nombres qui surpassent le dénominateur, ainsi on doit mettre $8y - 6$ au lieu de $8y - 18$.

3^e Exemple. $x = \frac{12y + 35}{40}$.

Opération.
$$\begin{array}{r} 40y \\ 12y + 35 \\ \hline 36y + 105, \text{ ou } + 25 \\ 4y - 25. \\ \hline 12y - 35 \end{array}$$

70 qui n'est pas divisible par 40. Ainsi le Problème est impossible.

SECTION SECONDE.

Des Problèmes plus qu'indéterminez.

SI le Problème est plus qu'indéterminé; c'est-à-dire, s'il y a plus d'une inconnue outre le nombre des égalitez, alors le Problème qui étant simplement déterminé seroit insoluble, pourra avoir une, ou plusieurs solutions.

Par Exemple. Soit l'égalité $y = \frac{ax + z}{p}$ où il y a trois inconnues dans une seule égalité, qui est par conséquent plus qu'indéterminé, pour avoir toutes les solutions possibles, ayant réduit a & p à leur moindre dénomination, (& s'ils sont premiers entre eux, il n'y a qu'à prendre pour z tel nombre qu'on voudra) mais s'ils sont composés, on peut prendre tous les nombres multiples de leur commune mesure.

Ainsi, *par exemple.* Soit, 1^o. $y = \frac{13x + z}{23}$, 2^o. $\frac{13x + 8z}{23}$, d'autant que 13 & 23 sont des nombres premiers, on peut prendre pour z tel nombre qu'on voudra, par exemple, 1. 2. 3. &c.

yyy ij

en prenant $z = 1 \dots z = 2 \dots z = 3$	$23x$
on aura $x = 7 \dots x = 14 \dots x = 21$	$13x + 1$
$x = 30 \dots x = 37 \dots x = 44$	diff. $10x - 1$
$x = 53 \dots x = 60 \dots x = 67$	$3x + 2$
$x = 76 \dots x = 83$	$9x + 6$
$x = 99 \dots x = 106$ &c.	$x - 7$
$x = 122 \dots x = 129$ &c.	on aura
	$23x$
	$13x + 2$
	$10x - 1$
	$3x + 4$
	$9x + 12$
	$x - 14$
	$23x$
	$13x + 3$
	$10x - 3$
	$3x + 6$
	$9x + 18$
	$x - 2$

d'où il est évident selon les différentes valeurs de z , qu'on peut prendre pour x tous les multiples de 7 ; savoir 14, 21, 28, 35, &c. & tous les composez de ces multiples $+ 23$, ainsi la ptogression seroit 7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. &c. 30. 37. 44. 51. 58. 65. &c.

Mais soit suppose $\frac{34x + z}{51} = y$, d'autant que 34 & 51 sont des nombres composez, toutes les valeurs de z ne peuvent pas être prises à discrétion, mais seulement la commune mesure de 34 & 51. & ses multiples.

C'est-à-dire que la moindre valeur de z est 17, puis 34, 51, 68. &c. ce que je prouve par l'opération même.

Soit $\frac{34x + 17}{51}$ par réduction $\frac{2x + 1}{3}$

$$\begin{array}{r} 3x \\ \hline 2x + 1 \\ \hline x - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \& x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array} \quad \& \text{à tous les nombres à l'infini}$$

mais les valeurs de z correspondantes sont 17. 34. 51. 68. &c.

LIVRE TROISIÈME.

597

mais posons $\frac{34x + 10}{51}$ l'opération

$$\begin{array}{r} 51x \\ 34x + 10 \\ \hline 17x - 10 \\ 34x - 20 \\ \hline \end{array}$$

qui n'est pas
divisible par 51.

30

Or il est aisé de démontrer, que quelque nombre que je mette au-dessous de 17, d'autant que le dernier absolu résultant est triple du supposé, le triple d'aucun nombre au-dessous de 17 n'est divisible par 51, puisque 51 est le triple de 17, & c'est de-là que je tire la démonstration du Théorème ci-dessus.

Mais soit $\frac{13x + 8z}{23}$ j'opère dessus tout de même & les valeurs de z sont 1. 2. 3. 4. 5. &c. celles de x sont 10. 20. 30. &c. & celles de y sont 6. 12. 18. 24. &c.

$$\begin{array}{r} 23x \\ 13x + 8z \\ \hline 10x - 8z \\ \hline 3x + 16z \\ 9x + 48z \\ \hline x - 56z \\ x - 10z \end{array}$$

Soit enfin $\frac{34x + 8z}{51}$ je cherche la plus grande commune mesure de 34 & de 51, qui est 17, & je cherche à 8 & 17 le plus petit produit divisible, & d'autant qu'ils sont premiers, je prends $z = 17$, & $8z = 8 \times 17$, ainsi la plus petite égalité est $\frac{34x + 8 \times 17}{51}$ ou $\frac{2x + 8}{3}$, donc la valeur de x est 8. 16. 24. &c.

yyy iij

Quatrième cas pour la formule $y = \frac{q - ax}{p}$

Il n'y a jamais qu'un certain nombre de solutions dans ce quatrième cas, au lieu que les trois autres en ont une infinité. Soit l'égalité $y = \frac{200 - 7x}{13}$. 1°. on peut le réduire au second cas, ajoutant $+ 13x$ au numérateur, ce qui donne $\frac{200 + 6x}{13}$, ensuite ôtant 13 de 200 autant de fois qu'il est possible, il reste $\frac{5 + 6x}{13}$.

Or divisant d'abord 200 par 7 x on trouve que la valeur de x est au-dessous de 19, & en réduisant l'égalité $\frac{5 + 6x}{13}$, on trouve pour la plus petite valeur de x , 10 qui satisfait, car $200 - 7 \times 10 = 130$ qui est divisible par 13.

$$\begin{array}{r} 13x \\ 6x + 5 \\ 12x + 10 \\ \hline x - 10 \\ \hline \hline \end{array}$$

Les autres valeurs de x sont 23. 36. 49. &c. mais d'autant qu'elles sont plus grandes que 19, terme de la valeur, au-dessus de laquelle x ne peut pas aller, elles sont inutiles.

Autre Exemple. Soit $y = \frac{2873 + 23x}{41}$. Je divise d'abord 2873 par 23 pour avoir la limite au-dessous, & je trouve 125.

Ensuite j'ajoute $41x$ à $- 23x$, & il me reste $+ 18x$, je divise 2873 par 41, & il me reste 3.

Ainsi j'ai l'égalité transformée $\frac{3 + 18x}{41}$, j'opère ainsi,

$$\begin{array}{r}
 41x \\
 \left\{ \begin{array}{r} 18x + 3 \\ \hline 36x + 6 \\ \hline 5x - 6 \\ 15x - 18 \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{r} 3x + 21 \\ 2x - 27 \end{array} \right\} \\
 \hline
 x + 48
 \end{array}$$

réduit à $x + 7$ ou $x - 34$.

Cette opération me donne $x = 34$ qui satisfait, j'y ajoute 41 qui donne une seconde valeur de $x = 75$, & une troisième $x = 116$, qui satisfont toutes trois, les autres valeurs ne satisfont pas, parce qu'elles surpassent 125.

SECTION TROISIÈME.

Des doubles égalitez du premier degré.

L Es doubles égalitez se peuvent toutes réduire à l'une des deux formules suivantes, après avoir réduit à même dénomination pour connoître si le Problème est impossible, pour ne pas calculer inutilement, il faut réduire les trois grandeurs a, b, p , à leurs moindres termes & si les deux grandeurs q & d ne sont pas divisibles par leur plus grande commune mesure, le Problème est impossible.

$$\begin{aligned}
 \text{Formules } y &= \frac{\overline{+} a x \pm q}{p} \\
 y &= \frac{\pm b x \pm d}{p}
 \end{aligned}$$

Si le Problème est simplement indéterminé ; c'est-à.

dire qu'il y ait trois inconnues & deux égalitez du premier degré, on pourra toujours après les substitutions faites, les réduire aux formules ci-dessus, & si les dénominateurs sont différens, il n'y a qu'à les multiplier en croix, & réduire à moindres termes par rapport au dénominateur commun, comme dans l'exemple ci-dessus, $y = \frac{19x + 18}{26}$ & $z = \frac{17x + 12}{26}$, après quoi il faut soustraire continuellement les numérateurs l'un de l'autre, ou diviser quand il est besoin, jusqu'à ce que vous soyez parvenu à l'unité, ou à un diviseur commun, & que l'inconnue soit évanouie.

Divisez ensuite cet absolu par le dénominateur, & s'il ne le divise pas sans reste, le Problème est insoluble en nombres entiers, que s'il est divisible, le nombre absolu accompagnant l'inconnue à l'unité, fera la valeur cherchée s'il est — ou sa différence au dénominateur s'il est +.

Exemple 1^{re}. Soit le Problème ci-dessus $y = \frac{17x + 12}{26}$

& $z = \frac{19x + 18}{26}$ &c. on les résoudra comme ci-dessus.

Exemple 2^d. Soit la double égalité.

$$z = \frac{73507 - 137y}{143} \cdot y < 538 \text{ car } \frac{73507}{137} < 538.$$

$$x = \frac{8232y - 187726}{151} \cdot y > 22 \text{ car } \frac{18772}{8232} > 22. \text{ Je rends}$$

tout positif, ajoutant à la première fraction $143y$ ce qui la transforme en $\frac{73507 + 6y}{143}$, ensuite ajoutant à la deu-

xième un nombre multiple de 151 prochainement plus grand que 187726, ce qui se trouve en divisant 187726, par 151, où sans avoir égard au quotient, je vois qu'il reste 33; c'est pourquoi je transforme la deuxième égalité en celle-ci $\frac{8232y + 33}{151}$, j'ôte ensuite de 73507 au-

tant

tant de fois 143, qu'il est possible, il me reste $\frac{47+6y}{143}$

& faisant la même chose sur $\frac{8232y+33}{151}$ par 151, j'ai la

deuxième transformée $\frac{78y+33}{151}$.

Enfin je réduis à même dénomination $\frac{47y+6y}{143}$, & $\frac{78y+33}{151}$, ce qui me donne $\frac{7097+906y}{21593}$, & $\frac{11154y+4719}{21593}$ pour dernière préparation, après quoi je fais l'opération

$$\begin{array}{r} 11154y + 4719 \\ 906y + 7096 \\ \times 12 \\ \hline 10872y + 70960 + \\ + 14192 \\ \hline = 85152 \end{array}$$

dont j'ôte $\frac{21593}{3}$ autant de fois qu'il est possible, & ici il reste 64779

21393 il reste donc 20373, dont la différence à 21593 est 1220.

1220.	ainsi de 11154y + 4719
282y + 5939	j'ôte 10872y — 1220
× 3	il reste 282y + 5939.
906y + 4719	17817
846y + 17817	4719
160y — 13098	13098
240y — 52392	
42y	

Remarquez, qu'on peut aisément comme ci-dessus réduire tous les cas à un seul, en ajoutant comme il est expliqué le dénominateur multiplié par l'inconnue au nu-

Analyse.

zzz

mérateur, $y = \frac{ax + q}{p}$, & en divisant l'absolu par l'in-
 $z = \frac{bx + d}{p}$

connuë, vous aurez les limites au-dessus & au-dessous desquelles doit être la valeur désirée.

SECTION QUATRIÈME.

Des doubles égalitez plus qu'indéterminées.

Nous avons vû ci-dessus que pour les égalités simples indéterminées, il n'y avoit qu'une condition qui les rendoit impossibles; mais pour les deux égalités semblablement indéterminées, il y en a deux, de sorte qu'en général il y a la moitié moins de Problèmes solubles en nombres entiers dans les doubles égalitez que dans les simples, & la raison en est bien claire, car il est deux fois plus difficile de satisfaire à deux conditions que de ne satisfaire qu'à une seule.

Par exemple, dans l'égalité simple $x = \frac{19y + 18}{26}$, il n'y a qu'à trouver y tel qu'étant multiplié par 19, & son produit augmenté de 18, la somme soit divisible par 26.

Mais dans la double égalité $x = \frac{19y + 18}{26}$
 & $z = \frac{17y + 12}{26}$

il faut de plus que le même y multiplié par 17, & son produit étant augmenté de 12, la somme soit encore divisible par 26.

Or de tous les nombres qui peuvent servir au premier cas, & de tous ceux qui peuvent servir au second, il n'y en a que quelques-uns de communs à tous les deux,

& il peut arriver qu'il n'y en ait point du tout de communs.

Ainsi cherchant , par exemple , $x = \frac{19y + 18}{26}$

$26y$	$19y + 10$	&	$17y + 7$	$26y$
$19y + 10$	26		26	$19y + 18$
$7y - 10$	$26y$			$7y - 18$
$14y - 20$	$17y + 7$		713	$14y - 36$
$5y + 30$	$9y - 7$		253	$5y + 2$
$15y + 90$	$18y - 14$		560	$2y - 20$
$y + 6$	$y - 21$		713	$4y - 14$
$y = 20 \dots y = 21$			24	$y + 16 = 26$
$y = 46 \dots y = 47$			689	$y = 10$
$y = 72 \dots y = 73$			670	
$y = 98 \dots y = 99$			43	

Or il est évident qu'il n'y a aucune valeur commune, & même d'autant que toutes les valeurs se font également par l'addition, si la première valeur ne se trouve pas égale, toutes les autres seront inégales; il n'est donc pas nécessaire de faire aucune réduction à même dénomination, si l'on ne veut; mais on peut séparément trouver les racines, & si leurs racines sont les mêmes, ou leur différence est égale à celle des dénominateurs réciproquement, ou telle qu'en ajoutant un certain nombre de fois le dénominateur de l'un à l'une, & un autre nombre de fois l'autre dénominateur à l'autre, la somme soit égale, le Problème est soluble, & on trouvera toutes les valeurs possibles, en ajoutant continuellement à la plus petite valeur trouvée, le plus petit nombre mesuré par les dénominateurs.

Par Exemple. Soit $z = \frac{47x + 56}{67}$
 $y = \frac{42x + 253}{299}$

1°. Il faut réduire le dénominateur à son plus petit nombre premier, comme si j'avois $\frac{60x+17}{335}$, j'écrirois simplement $\frac{60x+17}{335}$, parce que si un nombre est divisible par 335, il sera aussi divisible par 67. J'opère ainsi. $x = 713$.

$ \begin{array}{r} 67x \\ 47x + 56 \\ \hline 20x - 56 \\ 40x - 112 \\ \hline 7x + 168 \\ 21x + 504 \\ 20x - 56 \\ \hline x + 560 \\ x + 24 = 67 \\ \hline 67 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 42x + 253 \\ \hline 299. \\ 299x + 17 \\ \hline 42x + 253 \\ 294x + 1771 \\ \hline 5x - 1771 \\ 40x - 14168 \\ 2x + 14421 \\ 4x + 28842 \\ \hline x - 30613 = 0. \end{array} $	$ \begin{array}{r} 25 \\ 2043 \\ \hline 19987 \mid 66. \\ \hline 2999 \\ 29 \\ \hline 30613 \mid 102 \\ \hline 299 \end{array} $
---	--	--

1^{re}. valeur de $x = 43$

2^e. valeur $x = 115$

valeurs de la 1^{re}. x .

valeurs de la 2^e. x .

$$\begin{aligned}
 43 & \dots\dots = 43 \\
 43 + 67 & = 110 \\
 43 + 2 \times 67 & = 244 \\
 43 + 3 \times 67 & = 311 \\
 43 + 4 \times 67 & = 378 \\
 43 + 5 \times 67 & = 445 \\
 & = 512 \\
 & = 579
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 115 & \dots\dots = 115 \\
 115 + 299 & = 414 \\
 115 + 2 \times 299 & = 713 \quad \text{valeur} \\
 & \quad \text{commu-} \\
 & \quad \text{ne qui fa-} \\
 & \quad \text{tisfait.}
 \end{aligned}$$

Donc en multipliant 299 par 2, & ajoutant le produit à 11, on aura le nombre cherché.

On auroit pû trouver la valeur commune sans induction, en faisant $43 + 67x = 115 + 299y$

$$\text{Donc } x = \frac{299y + 115 - 43}{67}$$

$$x = \frac{299y + 72}{67}$$

$$x = \frac{31y + 5}{67}$$

$$\begin{array}{r} 67y \\ 31y + 5 \\ 62y + 10 \\ 5y - 10 \\ 30y - 60 \end{array}$$

Pour avoir toutes les valeurs possibles.

$$713 + 67y \text{ \& } 713 + 299z$$

$$\begin{array}{l} y + 65 = va- \\ y = 2. \text{ leur com-} \\ \text{mune.} \end{array}$$

D'autant que 67 & 299 sont premiers entr'eux, il est évident que le plus petit nombre où ils peuvent se rencontrer est le produit de 67×299 , augmenté de 713. Ainsi la deuxième valeur de x est $713 + 67 \times 299 = 20746$.

La troisième valeur est $713 + 2 \times 67 \times 299 = 40779$. &c.

La quatrième est $713 + 3 \times 67 \times 299$ &c. & ainsi de suite à l'infini.

$$\begin{array}{r} 67 \quad 870 \\ 299 \quad 145 \\ \hline 603 \quad 1015 \\ 603- \\ \hline 134 \\ 20033 \\ 713 \\ 40066 \end{array}$$

Autre Exemple. Soit la double égalité plus que déterminée. $\frac{17x + 87}{29} = z$, & $\frac{15x + 5y}{29} = u$.

zzz iij

$$\text{Donc } \frac{x-16y}{39} \text{ \& } \frac{35y}{29}$$

Or d'autant que 35 & 29 sont premiers entr'eux. Soit $y = 29$ la plus petite valeur. Donc $\frac{x-16y}{29} = 0$

$$\text{ou } \frac{x+14y}{29} = m.$$

Et d'autant que y peut être 29 pour la plus petite valeur, & posant $8y + 17x$

$$\begin{array}{r} 5y + 15x \\ \hline 3y + 2x \\ 2y + 13x \\ \hline y - 11x \\ 2y - 22x \\ \hline 35x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x + 3y \\ 14x + 21y \\ \hline x - 16y \\ 2x - 32y \\ \hline + 35y \end{array}$$

généralement continuez la soustraction jusqu'à la plus grande commune mesure trouvée, & divisez l'absolu par cette commune mesure, le quotient si c'est — sera la plus petite valeur possible en nombres entiers, si c'est + la différence au dénominateur ; mais si la division ne peut pas se faire en entiers, le Problème est *insoluble*.

Exemple. Soit $\frac{60x+12}{96}$, on trouve $12x - 36$, divisant 36 par 12, le quotient $3 = x$.

Ou plus facilement. Trouvez séparément la valeur de chaque membre de la double égalité & formez ensuite une égalité simple.

Exemple. Soit l'égalité double $15x - 10 = 28y$ & $15x - 9 = 19z$. Donc $y = \frac{15x-10}{28}$ & $z = \frac{15x-9}{19}$.

Je cherche x par la première égalité comme il suit, & ensuite par la deuxième égalité.

*Valeur de x**Par la première égalité.*

$$\begin{array}{r}
 28x \\
 15x - 10 \\
 \hline
 13x + 10 \\
 2x - 20, \text{ ou } + 8 \\
 12x + 48, \text{ ou } + 20 \\
 \hline
 x - 10 = 0
 \end{array}$$

donc $x = 10$.*Par la seconde égalité*

$$\begin{array}{r}
 19x \\
 15x - 9 \\
 \hline
 4x + 9 \\
 16x + 36, \text{ ou } + 17 \\
 \hline
 x + 7 = 19 \\
 \text{donc } x = 12.
 \end{array}$$

Les deux valeurs de x sont 10, & 12. Je pose donc

$$10 + 28t = 12 + 19u. \text{ Donc } t = \frac{19u + 2}{28}.$$

$$\begin{array}{r}
 28u \\
 19u + 2 \\
 \hline
 9u - 2 \\
 18u - 4
 \end{array}$$

$u + 6 = 28$. Donc $u = 22$, laquelle valeur étant substituée dans l'égalité $12 + 19u$, on aura $430 = x$. Valeur cherchée la plus petite qu'il soit possible.

Pour avoir toutes les autres valeurs, on n'a qu'à ajouter à 430 le produit de 28×19 , c'est 532; ainsi la deuxième valeur est 962. La troisième 1494. & ainsi à l'infini.

SECTION CINQUIÈME.

Des triples & quadruples égalitez & autres à l'infini.

1°. Cherchez séparément les valeurs de la première & de la seconde, & formez-en une égalité résultante, qui donnera les valeurs communes, s'il est possible pour les deux égalitez comme ci-dessus.

2°. Cherchez ensuite la valeur de la troisième égalité & formez-en une quatrième avec l'égalité résultante, & elle donnera toutes les valeurs possibles qui satisferont aux trois égalitez proposées, ainsi de suite s'il y a quatre, cinq, &c. ou plusieurs égalitez.

Remarquez, que lorsque toutes les égalitez ou plusieurs, ont chacune le même dénominateur, le Problème est beaucoup plus aisé, & qu'on en découvre plus facilement l'impossibilité.

SECTION SIXIÈME

Des égalitez où l'inconnue est dans le dénominateur.

Exemple. Soit $y = \frac{7a+153}{9a+18}$, donc $2a < 153$.

$$\text{Si } y = 1 \dots \begin{cases} 11a = 117 \\ 20a = 99 \end{cases}$$

$$\text{Si } y = 2 \dots 47a = 55 \dots 56a = 37 \text{ impossible.}$$

$$\text{Si } y = 3 \dots 29a = 81 \dots 38a = 73$$

Donc 1503 est divisible par $9a - 18$.

$$2 + 9z = 153 - 18z.$$

$$27z = 151 - 18.$$

$$\text{Donc } 9az = 1503 + 18z.$$

C'est-à-dire qu'ajoutant à 1503 un multiple de 18, la somme doit être divisible par 9.

Or ici, d'autant que 18 se trouve divisible lui-même, il faut que 1503 le soit par lui-même.

$$\text{Donc } a = 169.$$

$$\text{Preuve. } 7a = 1183$$

$$+ \dots 153$$

$$= 1336$$

$$9a = 1521$$

$$- 18$$

$$= 1503$$

xx +

$\frac{xx+2}{5} = y$ est impossible, parce que quelque nombre que je prenne pour y , $5y$ sera terminé par 5 ou par 0: si c'est par 5, donc $xx+2=a$, est un nombre terminé par 5. Donc étant 2 de part & d'autre $xx=a$, sera un nombre terminé par 3, ce qui est impossible. Si $5y$ est terminé par 0, de même $xx=a$ sera un nombre terminé par 8, ce qui est aussi impossible. De même $\frac{xx+3}{5} = y$, car il reste 2 ou 7.

Or $9a+18$ est divisible & son multiple aussi par 124; sçavoir, $1116a+2232 = \frac{1112a}{9}$ à peu près ou plus grand. Donc $4a+2232$ & son multiple par $\frac{1112}{4}$
 $= 278 = \frac{1112a}{9} +$.

$$\text{Soit } \frac{7a+284}{9a+8} = y.$$

$$\text{Si } y = 1. \text{ Donc } 2a = 284 - 8$$

$$a = 138.$$

$$\text{Soit } \frac{7a+909}{9a+8}.$$

$$\text{Donc par transformation } 2a+9z = 909 - 8z - 8.$$

$$\text{Donc } 17z = 899$$

$$\frac{4}{899} \frac{52}{17} = z$$

$$9ay+8y=7a+909$$

$$\frac{909-8y}{9y-7}$$

$$\frac{901-8z}{9z+2} \text{ transformée}$$

$$\text{de } \frac{7a+909}{9a+8}$$

$$\text{Si } y = 1.$$

$$2a = 909 - 8$$

$$\text{Si } y = 2$$

$$2a+9a = 909 - 16$$

$$\text{Si } y = 3$$

$$2a+18a = 909 - 24$$

$$\text{Si } y = 8, \text{ \& } z = 7$$

$$2a+63a = 909 - 64$$

$$\text{ou } 907 - 56 - 8.$$

$$65a = 845$$

$$a = 13.$$

Analyse.

4444

$\frac{903+x}{9x+2}$ transformée de $8xy + 5y = 3237$

$$\text{donc } 8x + 5 = \frac{3237}{y}.$$

Il faut prendre garde exactement, que les multiples peuvent être divisibles sans que le simple le soit.

REMARQUE GÉNÉRALE,

Sur les Problèmes plus que déterminez.

Les Problèmes plus que déterminez sont ceux où il y a plus d'équations formées sur les conditions du Problème qu'il n'y a de lettres ou de grandeurs inconnues; de sorte que la même grandeur inconnue se trouve seule, mais avec d'autres grandeurs connues dans deux ou plusieurs équations différentes où elle se trouve élevée, ou au même degré ou à des degrés différens.

Comme nous avons eu besoin de résoudre ces sortes de Problèmes dans la Méthode d'approximation pour trouver une valeur rationnelle de x en comparant les deux sommes alternatives; on peut voir ce que nous avons dit sur ce sujet dans la première Section du second Livre, depuis la page 334 jusqu'à la page 394, & sur-tout dans le Théorème fondamental page 349.

Nous avons donné deux Méthodes & nous les avons appliqué au même exemple, ce qui suffit, mais nous avons ajouté ici ce titre pour ne rien oublier des trois espèces des Problèmes.

CONCLUSION.

Nous avons donné dans cette Analyse la résolution en nombres entiers de tous les Problèmes de tous les genres & de tous les degrés dans les cas où cela est possible.

Et dans les cas où cela n'est pas possible par la nature de la chose, comme il arrive dans les Problèmes déterminez qui se réduisent à des équations dont les racines

sont irrationnelles, lesquelles ne peuvent s'exprimer exactement par aucun nombre, mais seulement par deux nombres consécutifs approchez l'un par excès & l'autre par défaut, nous avons donné trois Méthodes faciles pour trouver les séries infinies les plus promptes & les plus convergentes qui soient possibles, dont chacun des termes finis donnent cette approximation la plus approchée, & la plus approchée à l'infini avec la moindre différence possible, & l'infinitième terme soit de la série par excès, soit de la série par défaut donneroit exactement la racine désirée; s'il étoit possible de l'exprimer en nombre quelconque.

Car tous les Problèmes en général de tous les degrez à l'infini se réduisent à quatre genres, qui sont déterminez, plus que déterminez, indéterminez, plus qu'indéterminez.

1^o. Les Problèmes déterminez que l'on nomme aussi les Equations; ce sont les Problèmes où il n'y a qu'une seule inconnue & une seule solution dans le premier degré, deux solutions dans le second degré, trois solutions dans le troisième degré; c'est-à-dire que ces Problèmes ont un nombre déterminé de solutions égal à l'exposant de la haute puissance de l'inconnue & jamais davantage.

Or nous avons résolu tous ces Problèmes dans les deux premiers livres de cette Analyse dans tous les cas, puisque nous avons donné plusieurs Méthodes dans le premier livre pour résoudre les Problèmes déterminez, ou les équations de tous les degrez à l'infini, dans le premier cas où les racines sont rationnelles, soit réelles soit imaginaires.

Le second cas est celui où les racines sont irrationnelles, soit réelles, soit imaginaires, c'est le sujet du livre second qui contient trois Méthodes pour trouver ces racines irrationnelles.

Le troisième livre donne dans les trois premières

sections la résolution des Problèmes indéterminez qui font le troisième genre des Problèmes, ce sont ceux qui ont une infinité de résolutions possibles.

3°. La quatrième Section du troisième livre donne la résolution des Problèmes plus qu'indéterminez, qui font le quatrième genre des Problèmes; les Problèmes plus qu'indéterminez sont ceux qui se réduisent à plusieurs égalitez, dans lesquelles il n'y a qu'une condition qui les rend impossibles; mais au contraire les Problèmes plus qu'indéterminez, se réduisent à des égalitez où il y a deux conditions renfermées qui les rendent impossibles, & cependant il y a une infinité de solutions possibles dans ces deux genres de Problèmes, & c'est en cela qu'ils sont indéterminez.

4°. Les Problèmes plus que déterminez qui font le second genre des Problèmes sont ceux, dont le nombre des solutions est non-seulement déterminé, en quoi ils conviennent avec le premier genre de Problèmes; mais outre cela ils renferment une condition qui restreint le nombre des solutions à une seule, rendant les autres impossibles, dont le nombre égaleroit l'exposant de la haute puissance de l'inconnu, sans cette nouvelle condition, qui change leur nature, & qui d'un Problème déterminé, fait un Problème plus que déterminé & le restreint à une solution unique.

Comme nous avons expliqué fort en détail ce qui concerne ce second genre dans le cours de cet ouvrage, nous nous contentons d'une seule remarque générale sur la fin, page 610, pour avertir les endroits où ce détail est expliqué.

Ainsi cette Analyse générale contient des Méthodes pour résoudre tous les quatre genres de Problèmes, ce qui comprend tous les Problèmes possibles, & c'est tout ce qu'on peut désirer sur ce sujet.

E I N.



T A B L E D E S M A T I E R E S

contenuës dans ce Volume.

PRE'FACE ,	page v.
DISCOURS PRE'LIMINAIRE , <i>sur la Méthode nouvelle pour résoudre les Equations de tous les degrez à l'infini par des Tables , où j'explique la route que j'ai tenuë pour découvrir ces Tables & leur usage.</i>	xiiij.
AVERTISSEMENT , <i>sur l'avantage de ces Tables.</i>	i
METHODE NOUVELLE , <i>pour résoudre par des Tables les Problèmes déterminez ou les Equations de tous les degrez à l'infini , & même dans le cas irréductible.</i>	9
<i>Division des Formules de chaque degré par classes , par genres & par espèces , réduite à sept Problèmes.</i>	11
PROBLEME I. <i>Déterminer le nombre des Formules dans chaque degré.</i>	12
PROBL. II. <i>Trouver le nombre des Formules de plusieurs degrez pris ensemble , 1°. en nombre fini , 2°. de tous les degrez à l'infini.</i>	14
PROBL. III. <i>Déterminer le nombre des classes des Formules différentes dans chaque degré.</i>	16
PROBL. IV. <i>Trouver le nombre des espèces différentes des Formules dans chaque classe d'un même degré.</i>	18
PROBL. V. <i>Trouver les individus ou les Formules particulières & leur nombre , dans chaque espèce & dans chacune des classes d'un même degré & de tous les degrez à l'infini.</i>	20
PROBL. IV. <i>Trouver en lettres chaque Formules particu-</i>	aaaa iij

T A B L E

*tiété d'une espèce & d'une classe quelconque d'un degré
proposé.* 21

PROBL. VII. *Former les Equations en nombres dans cha-
que Formule particulière d'un degré quelconque* 22

*De la nature & du nombre des Racines des Equations de tous
les degrez, de leurs genres & de leurs espèces.* 22 & 24

*Des termes des Equations, de leur nombre & de leur dif-
férence.* 25

*Méthode pour faire évanouir les termes moyens, & former
des Equations numériques, où il manque quelque terme
moyen.* 29

*Explication & formation générale des Tables des Equa-
tions.* 31

Des Tables de la première espèce. 31

Des Tables de la seconde espèce. 32

*Usage des Tables pour résoudre les Equations de tous les
degrez à l'infini.* 33

*Exemples du second degré, résolus par les Tables de la
première espèce.* 34

Exemples pour le troisième degré. 35

Résolution du cas irréductible du troisième degré 37

*Explication de chaque Table en particulier, avec son usage
pour toutes les Formules du second degré.* 40

Usage des Tables pour toutes les Formules du 3^e. degré. 48

*Trois moïens différens pour abréger la construction des
Tables, & se servir pour les grands nombres des petites
Tables comme des plus grandes.* 51

*Quatrième moïen en réduisant l'Equation à ses moindres
termes. Ce qui rend sa résolution plus facile. C'est une
préparation nécessaire.* 58

*25 Tables pour la résolution des Equations, du 2^d. du 3^e.
& du 4^e. degré.* pag. 61 jusqu'à la pag. 110

L' A N A L Y S E G É N É R A L E,

ou les Règles Générales de l'Analyse.

Discours préliminaire sur l'Analyse, où l'on explique sa

DES MATIERES.

<i>nature, son objet & comment elle procède.</i>	111
<i>Comment l'Analyse procède à la résolution des Problèmes.</i>	113

LIVRE PREMIER.

SECTION PREMIÈRE.

<i>De l'Analyse en général, & de la résolution des Problèmes déterminez du premier degré.</i>	119
<i>Division des Problèmes par degrez & par espèces.</i>	120
<i>Des Problèmes simples, ou des égalitez simples qui n'ont qu'une seule inconnüe. Et des Equations simples ou du premier degré. Leur formation & leur résolution.</i>	124
<i>PROBLEME I. & II. Résolus par transposition & substitution.</i>	125
<i>PROBL. III. Résolu par division & par transposition.</i>	la même.
<i>PROBL. IV. Par la multiplication. PROBL. V. Par division.</i>	126
<i>PROBL. VI. Par extraction de la racine quarrée.</i>	127
<i>Règle générale pour résoudre les égalitez qui n'ont qu'une seule inconnüe, & les Equations du premier degré.</i>	127
<i>Règles pour les égalitez simples qui ont deux inconnües avec des exemples.</i>	132
<i>Règle pour les égalitez simples qui ont trois inconnües avec des exemples.</i>	148
<i>Règle pour les égalitez simples qui ont quatre inconnües avec un Exemple. PROBL. XVI.</i>	164
<i>Seconde Méthode pour résoudre le même Problème.</i>	171
<i>Règle abrégée pour cette seconde Méthode.</i>	176
<i>Troisième Méthode pour résoudre le même Problème.</i>	177
<i>Remarques</i>	189

SECTION DEUXIÈME.

<i>Des Problèmes déterminez de tous les degrez, ou des Equations composées de tous les degrez à l'infini.</i>	181
<i>1^o. De l'origine des Equations.</i>	183
<i>2^o. Formation simple & naturelle des Equations.</i>	185

T A B L E

<i>Des Equations en général. De leurs degrez, de leurs espèces & de leur formation.</i>	189
<i>Des différens degrez des Equations à l'infini.</i>	191
<i>Des espèces différentes des Equations dans chaque degré.</i>	192
<i>En quoi les Equations peuvent être contraires ou soust-contraires, différentes ou semblables.</i>	193
<i>Des termes des Equations de tous les degrez, qui est ce qui les distingue, & quel est leur nombre, comment il faut ordonner les termes d'une Equation</i>	195
<i>Du nombre des termes dans une Equation.</i>	196
<i>Des Racines des Equations. 1°. Leurs genres. 2°. Leurs espèces. 3°. Leur nombre.</i>	197
<i>Du nombre des Racines dans les Equations.</i>	202
<i>De la diversité qui naît dans les Equations par les racines positives, & négatives mêlées ensemble.</i>	203
<i>De la préparation des Equations.</i>	la même.
<i>Règle générale pour les signes dans les différens termes des Equations.</i>	210

SECTION TROISIÈME.

<i>La résolution des Equations en général & en particulier.</i>	
<i>La résolution des Equations pures & simples de tous les degrez, avec la formation & la résolution des Equations du second degré.</i>	212
<i>Règle générale pour la résolution des Equations de tous les degrez à l'infini.</i>	213
<i>La résolution des Equations pures & simples de tous les degrez à l'infini.</i>	214
<i>Formation des Equations du second degré par toutes les espèces des Racines différentes.</i>	216
<i>La Résolution des Equations du second degré dans les six Formules.</i>	221
<i>Séries infinies d'Equations du second degré dans la 3°. & la 4°. Formule.</i>	223
	L4

DES MATIERES.

La résolution des Equations du second degré qui ont des Racines irrationelles. 236

Série de treize Equations irrationelles contenues dans l'intervalle de deux Equations rationnelles semblables. 238

SECTION QUATRIÈME.

Formation & résolution des Equations du 3^e. degré. 239

Méthode pour trouver la Formule de la première Racine des Equations du troisième degré dans tous les cas. 241

Série des dix-huit Formules du troisième degré, avec leur réduction à trois Formules. 248

Séries des Equations dans la 2^{de}. & la 3^e. Formule du troisième degré. 252

En quoi consiste le cas irréductible. 255

Moyen de connoître les trois cas d'une Equation du troisième degré. 257

Méthode pour éviter les fractions dans la résolution des Equations du troisième degré. 257

La résolution des Equations dans les trois Formules du troisième degré. 260

Moyen général pour déterminer tous les cas. 271

Règle générale pour trouver la première & la plus grande Racine des Equations du troisième degré. 273

Résolution du cas irréductible. Première Méthode, pour les Racines rationnelles. 276

Seconde Méthode pour les Racines irrationnelles. 279

La résolution de toutes les autres Formules du troisième degré. 288

Méthode pour faire évanouir le second terme dans une Equation d'un degré quelconque. 289

SECTION CINQUIÈME.

Méthode générale & nouvelle, pour résoudre les Equations de tous les degrez à l'infini, par le terme dominant. 293

Application de cette Méthode aux Equations du second degré dans tous les cas possibles. 295

Résolution des Equations du troisième degré par le terme
bbbb

T A B L E

<i>dominant dans tous les cas possibles.</i>	299
<i>Remarque générale & fondamentale , pour réduire toute Equation à sa plus simple expression , ce qui rend la résolution plus facile.</i>	311 & 58
<i>Méthode pour trouver la seconde Racine , ayant trouvé la première dans les Equations du troisième degré.</i>	313

SECTION SIXIÈME.

<i>Méthode générale pour résoudre les Equations de tous les degrez à l'infini , par les Progressions Arithmétiques , appliquée aux Equations du 2^d. & du 4^e. degré.</i>	320
---	-----

LIVRE SECOND.

SECTION PREMIÈRE.

<i>Méthode générale d'approximation pour trouver les Racines irrationnelles des puissances imparfaites & des Equations irrationnelles de tous les degrez par des Formules rationnelles.</i>	334
<i>Avertissement avec l'Histoire de cette Méthode.</i>	la même.
<i>L'origine & le progrès de cette nouvelle Méthode.</i>	342
<i>THEOREME I. & fondamental.</i>	356
<i>PROBL. I. Trouver les Formules d'approximation par défaut pour résoudre les égalitez & les puissances imparfaites du second degré.</i>	362
<i>Règle générale.</i>	363
<i>PROBL. II. Trouver les Formules d'approximation par excès , pour résoudre les égalitez & les puissances imparfaites du second degré.</i>	369
<i>PROBL. III. Trouver les limites d'approximation , on déterminer la valeur de l'approximation dans chaque Formule du second degré , soit dans le quarré , soit dans la Racine.</i>	370
<i>Formation de la Progression des Formules des limites d'approximation.</i>	377
<i>PROBL. IV. Appliquer les formules d'approximation du second degré à des exemples en nombres.</i>	380

DES MATIERES.

PROBL. V. Trouver les formules d'approximation pour les Racines des troisièmes puissances imparfaites.	384
REGLE GE'NE'RALE.	385
PROBL. VI. Usage de la première formule d'approxima- tion pour les puissances imparfaites du 3 ^e . degré.	389
PROBL. VII. Usage de la seconde formule d'approxima- tion pour les puissances imparfaites du 3 ^e . degré.	390
PROBL. VIII. Trouver les limites dans chaque formule d'approximation du troisième degré.	392
Seconde Méthode pour avoir les formules d'approximation des troisièmes puissances imparfaites.	393

SECTION SECONDE.

Méthode nouvelle & abrégée pour l'extraction des Racines des puissances imparfaites de tous les degrez à l'infini	394
Première formation générale des tranches de chiffres dans toutes les puissances complètes à l'infini.	395
Division des tranches dans les puissances incomplètes.	398
Seconde & troisième manière de diviser par tranches les puissances imparfaites & incomplètes.	400
THEOREME II. & fondamental.	401
LEMME. Elever tout d'un coup un binôme quelconque à une puissance quelconque	404
Démonstration du second Théorème fondamental.	405
PROBLEME GE'NE'RAL. Tirer la racine d'une puissance quelconque par une Méthode plus courte que la Méthode ordinaire, & sa démonstration.	407

SECTION TROISIE' ME.

Résolution des équations dont les Racines sont irrationnelles par des formules rationnelles.	412
Résolution des équations irrationnelles pures & simples de tous les degrez à l'infini.	414
Résolution des équations irrationnelles du second degré, composées ou affectées de termes moïens.	419
Première Méthode pour les équations irrationnelles du se- cond degré.	420

bbbb ij

T A B L E

<i>Résolution des équations irrationnelles pures & simples du troisième degré.</i>	433
<i>Résolution des équations irrationnelles du troisième degré affectées de termes moïens.</i>	437
<i>Formules générales d'approximation des Racines irrationnelles pour les équations du troisième degré, du quatrième, cinquième & en général de tous les degrez.</i>	440
<i>Remarques importantes.</i>	440
<i>COROLLAIRE GENERAL. Pour continuer à l'infini l'approximation des racines irrationnelles des équations & des puissances imparfaites de tous les degrez.</i>	441
SECTION QUATRIÈME	
<i>Seconde Méthode nouvelle pour résoudre les Equations irrationnelles & les puissances imparfaites de tous les degrez à l'infini par des séries rationnelles infinies, les plus promptes & les plus convergentes qui soit possible. Ou nouveau calcul différentiel & intégral réduit à l'expression sensible des nombres naturels.</i>	442
<i>SECONDE METHODE GENERALE, pour trouver les racines irrationnelles par des formules rationnelles.</i>	444
<i>Des séries rationnelles en général.</i>	445
<i>Deux Méthodes pour former les séries en général.</i>	446
<i>Du nombre des formules & des séries pour exprimer chaque nombre irrationnel.</i>	447
<i>En quoi consiste cette Méthode.</i>	452
<i>Table générale de la formation des formules rationnelles pour trouver la racine quarrée des nombres rationaux & irrationaux.</i>	455
<i>Remarque & Paradoxe.</i>	463
<i>DES FORMULES. Pour trouver les séries rationnelles infinies primitives, ou du premier genre, pour exprimer ou transformer les nombres irrationaux du second degré.</i>	471
<i>Première série des formules rationnelles, ou série primitive & fondamentale en lettres. Sa formation.</i>	472

DES MATIERES.

<i>Seconde série des formules rationnelles composée des deux seules lettres a & b.</i>	473
<i>Formation des trois genres de formules pour les séries rationnelles dans chacune des quatre séries primitives.</i>	476
<i>Table des formules rationnelles du troisième genre en progression géométrique jusqu'au dodécuple.</i>	479
<i>Table des numérateurs.</i>	480
<i>Table des dénominateurs.</i>	481
<i>Table des coefficients des numérateurs & des dénominateurs.</i>	482
<i>Construction de la Table des formules rationnelles des termes de la série fondamentale en progression géométrique.</i>	483
<i>Explication & formation de la Table des numérateurs & des dénominateurs pour la série rationnelle de $\sqrt{2}$.</i>	483 & 485
<i>Autre Méthode pour trouver les coefficients du numérateur & du dénominateur des termes en progression géométrique pour $\sqrt{2}$.</i>	487
<i>Examen & formation directe des coefficients.</i>	489
<i>Autre formation des coefficients par des formules générales.</i>	490
<i>Règle pour les signes des formules en progression géométrique.</i>	495
<i>Méthode très-prompte pour continuer la série des formules pour $\sqrt{3}$.</i>	Ibid.
<i>Usage de la Table générale des formules des termes en progression géométrique.</i>	496
<i>Règle pour les signes & les limites de chaque terme des séries.</i>	499
<i>Méthode pour connoître la plus parfaite & la plus convergente des quatre séries primitives qui expriment une racine irrationnelle.</i>	501
<i>Parallèle du second & du quatrième terme des quatre séries primitives.</i>	503
<i>Formation du triangle du rapport inverse pour $\sqrt{41}$.</i>	508

T A B L E.

Triangle du rapport de $\sqrt{A_1}$ formé sur la Période des nombres générateurs 509

Formules pour la série des numérateurs & des dénominateurs. 511

SECTION CINQUIÈME.

La science universelle des Rapports. 513

Discours préliminaire sur la nature des Rapports, leur étendue, & la nécessité de connoître tous les Rapports. Ibid.

Définition des Rapports. 514

LEMME ET PROBLEME FONDAMENTAL. Trouver la commune mesure de deux nombres, au Méthode nouvelle pour faire la division propre pour connoître les Rapports des grandeurs exprimées en nombres. 517

THEOREME. Trouver les élémens des Rapports, ou Théorie générale des Rapports, de leurs Elémens & de leurs propriétés, de leurs genres, de leurs espèces & de leurs individus à l'infini. 520

Formation de la série infinie de tous les genres ou degrez des Rapports à l'infini. 521

Formation des séries infinies des espèces simples & primitives des Rapports à l'infini. 523

Formation des séries des espèces composées & primitives des Rapports à l'infini. 527

Formation des séries des espèces subalternes ou dérivées des Rapports à l'infini. 529

Formation des séries infinies des individus des Rapports. 530

PROBL. II. Un Rapport étant exprimé par deux nombres, le réduire à sa plus simple expression, ou deux nombres étant donnez qui ne sont pas les plus petits de leur raison, trouver les deux plus petits nombres qui soient en même raison. 531

PROBL. III. Inverse du précédent. Trouver les moindres termes d'un Rapport donné; c'est-à-dire d'un Rapport dont les quotients sont donnez, ou trouver la suite des deux plus petits nombres qui soient tels, que divi-

DES MATIERES.

- tant le plus grand des deux nombres par le plus petit ,
& le plus petit nombre par le premier reste , & conti-
nuant à diviser le premier reste par le second , & ainsi
de suite jusqu'au dernier reste qui soit un diviseur exact ,
les quotients soient ceux du Rapport donné.* 535
- PROBL. VI. FONDAMENTAL.** *Pour la construction du
Triangle des Rapports , trouver la suite de tous les nom-
bres premiers entr'eux , qui expriment le plus exacte-
ment qu'il est possible le Rapport de deux grandeurs don-
nées.* 537
- LIMITES** *d'approximation tant par excès que par défaut
avec leur démonstration.* 542
- COROLLAIRE.** *Règle générale pour les limites , & l'origine
du Triangle des Rapports.* 545
- LE TRIANGLE DES RAPPORTS , ou Méthode générale &
facile pour trouver la série infinie de tous les nombres
premiers entr'eux qui expriment le plus exactement qu'il
est possible un Rapport donné quelconque. 552**
- Formation du Triangle des Rapports , pour trouver la
Série infinie des fractions qui expriment en nombres
premiers entr'eux le plus exactement & le plus prompte-
ment qu'il est possible un Rapport donné.* 554
- Construction de chaque colonne du Triangle des Rapports
en particulier.* 556
- Triangle des Rapports numérique & particulier , formé sur
cinq quotients générateurs.* 561
- Triangle des Rapports Analytique & universel formé sur
cinq quotients générateurs.* 562
- Première Règle générale pour former les colonnes du
Triangle des Rapports , sur des quotients générateurs
donnez.* 564
- Seconde Règle pour le nombre des termes contenus dans
chaque colonne en particulier.* 565
- Troisième Règle pour la qualité des termes.* 566
- Premier usage du Triangle des Rapports , ou examen de la*

T A B L E

<i>série fondamentale des Rapports trouvez par le moïen du Triangle des Rapports.</i>	567
<i>DES LIMITES , pour connoître l'erreur , soit par excès , soit par défaut dans chaque terme de la série primitive & fondamentale résultante du Triangle des Rapports.</i>	568
<i>Des séries dérivées.</i>	570
<i>Formation de la seconde série qui est la première dérivée en nombres de la série primitive.</i>	572
<i>De la Méthode inverse du Triangle des Rapports.</i>	573
<i>Former la série générale des Périodes réglées des nombres irrationaux en général.</i>	574
<i>THEOREME , sur les Rapports d'inégalité.</i>	578
<i>Remarque importante & fondamentale sur les Périodes.</i>	580
LIVRE TROISIEME.	
<i>Des Problèmes indéterminez & plus qu'indéterminez.</i>	581
<i>Méthode générale pour résoudre en nombres entiers les Problèmes indéterminez dans tous les cas possibles. Ibid.</i>	
SECTION PREMIERE.	
<i>Proposition première. Résoudre en nombres entiers un Problème indéterminé , où il y a deux grandeurs inconnues du premier degré.</i>	587
SECTION SECONDE.	
<i>Des Problèmes plus qu'indéterminez.</i>	595
SECTION TROISIEME.	
<i>Des doubles égalitez du premier degré.</i>	599
SECTION QUATRIEME.	
<i>Des doubles égalitez plus qu'indéterminées.</i>	602
SECTION CINQUIEME.	
<i>Des triples & des quadruples égalitez & autres à l'infini.</i>	607
SECTION SIXIEME.	
<i>Des égalitez où l'inconnue est dans le dénominateur.</i>	608
<i>Remarque générale, ou Règle générale pour résoudre les Problèmes plus que déterminez.</i>	610

De l'Imprimerie de JEAN-BAPTISTE COIGNARD Fils,
Imprimeur du Roi. 1772.





